

WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER

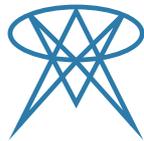
Bachelorarbeit

# Ein lokalisierter Subtraktionsansatz für das EEG Vorwärts Problem

Alexander Schell

Matr.: 443555

22. Oktober 2019



FACHBEREICH 10  
MATHEMATIK UND  
INFORMATIK

Betreuer: Prof. Dr. Christian Engwer  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Carsten Wolters



# Zusammenfassung

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden wir einige Ansätze zur Lösung des EEG Vorwärts Problems behandeln, insbesondere werden wir einen konformen lokalisierten Subtraktionsansatz einführen. Zunächst werden wir uns auf das EEG Vorwärts Problem konzentrieren und mögliche Probleme für die Lösung dieses Problems festhalten. Anschließend werden wir auf der Grundlage dieser Erkenntnisse sowohl einen Subtraktionsansatz als auch einen lokalisierten Subtraktionsansatz einführen und für diese schwache Formulierungen herleiten und vergleichen. Zuletzt werden wir für den konformen lokalisierten Subtraktionsansatz einige Tests durchführen, um die Tauglichkeit dieses Ansatzes zu überprüfen.

## Abstract

This work deals with different approaches for the EEG forward problem. Especially we will introduce a conforming localized subtraction approach. In the first part we will focus on the EEG forward problem and discuss some difficulties we have to deal with when we are looking for a solution. Later on we will present a subtraction approach and a localized subtraction approach and derive a weak formulation for each approach. In the last part of this work we will present some testing results for the conforming localized subtraction approach.



# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	vii
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. EEG Vorwärts Problem</b>	<b>3</b>
<b>3. Subtraktions-Ansatz</b>	<b>7</b>
3.1. Konforme Formulierung . . . . .	8
3.2. Discontinuous Galerkin Formulierung . . . . .	9
<b>4. Lokalisierter Subtraktions-Ansatz</b>	<b>17</b>
4.1. Discontinuous Galerkin Formulierung . . . . .	18
4.2. Konforme Formulierung . . . . .	26
<b>5. Auswertung</b>	<b>31</b>
5.1. Kugelschalenmodell . . . . .	31
5.2. Dipole . . . . .	32
5.3. Fehlermaße . . . . .	32
5.4. Ergebnisse . . . . .	33
5.4.1. Größe des Patches . . . . .	33
5.4.2. Vergleich zum Subtraktionsansatz . . . . .	34
<b>6. Fazit</b>	<b>37</b>
<b>7. Literaturverzeichnis</b>	<b>39</b>
<b>A. Boxplots</b>	<b>41</b>
<b>B. Python Code</b>	<b>45</b>
<b>C. Eigenständigkeitserklärung</b>	<b>51</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1. Neuronen in einem Rattenkortex . . . . .	4
3.1. Geteiltes Kontrollvolumen . . . . .	11
3.2. Skelett . . . . .	12
4.1. Schematische Darstellung von $\Omega^\infty \subset \Omega$ . . . . .	17
4.2. Singularitäts-Potential . . . . .	18
4.3. „stetige Indikatorfunktion“ . . . . .	27
5.1. Gitter mit Leitfähigkeiten . . . . .	31
5.2. RDM für radiale Dipole . . . . .	33
5.3. MAG für radiale . . . . .	34
5.4. Relativer Fehler für radiale Dipole . . . . .	34
5.5. RDM für den Subtraktionsansatz und den lokalisierten Subtraktionsansatz	35
5.6. RDM für den Subtraktionsansatz und den lokalisierten Subtraktionsansatz	35
A.1. RDM und MAG für das kleinste Patch für tangentielle Dipole. . . . .	41
A.2. RDM und MAG für das kleinste Patch für radiale Dipole. . . . .	41
A.3. RDM und MAG für die erste Patcherweiterung für tangentielle Dipole. . .	42
A.4. RDM und MAG für die erste Patcherweiterung für radiale Dipole. . . . .	42
A.5. RDM und MAG für die zweite Patcherweiterung für tangentielle Dipole. .	43
A.6. RDM und MAG für die zweite Patcherweiterung für radiale Dipole. . . . .	43
A.7. RDM und MAG für den Subtraktionsansatz für tangentielle Dipole. . . . .	44
A.8. RDM und MAG für den Subtraktionsansatz für radiale Dipole. . . . .	44



# 1. Einleitung

In der Medizin spielt **Elektroenzephalographie** (EEG) eine wichtige Rolle. Bei der Elektroenzephalographie werden Spannungsschwankungen an der Kopfoberfläche mithilfe von Elektroden gemessen. Die grafische Darstellung dieser Schwankungen nennt sich **Elektroenzephalogramm**. Anwendung findet das EEG beispielsweise bei Epilepsie. Epileptische Anfälle können auf verschiedenste Arten auftreten. Im EEG zeigen sich für die jeweiligen Anfälle allerdings charakteristische Befunde. So kann mithilfe eines EEGs eine Diagnose bestätigt oder auch revidiert werden (Penin & Fröscher, 2010).

Um ein EEG zu berechnen, ist es entscheidend, die Verteilung des elektrischen Potentials im Gehirn zu simulieren. Dies bezeichnen wir mit dem EEG Vorwärts Problem. Wird das EEG Vorwärts Problem nicht angemessen gelöst, führt dies zu großen Fehlern bei der Lösung des Inversen Problems, da dieses schlecht gestellt ist. Das EEG Vorwärts Problem kann dabei durch eine partielle Differentialgleichung beschrieben werden. Aufgrund der komplexen Struktur eines Kopfes ist es im Allgemeinen nicht möglich, dieses Problem analytisch zu lösen. Daher werden numerische Lösungen der partiellen Differentialgleichung gesucht. Ziel dieser Arbeit ist es, einen lokalisierten Subtraktionsansatz für die Lösung des EEG Vorwärts Problems einzuführen. Dafür werden wir zunächst das EEG Vorwärts Problem herleiten, um uns so einen Überblick über die zugrunde liegende partielle Differentialgleichung zu schaffen. Im nächsten Kapitel werden wir einen Subtraktionsansatz einführen, wie er in (Engwer, Vorwerk, Ludewig & Wolters, 2017) vorgestellt wurde. Anschließend wollen wir eine „discontinuous Galerkin“ Formulierung für einen lokalisierten Subtraktionsansatz, wie in (Nüßing, 2018), vorstellen. Nach einer nicht-konformen Formulierung wollen wir zuletzt noch eine konforme Formulierung für den lokalisierten Subtraktionsansatz einführen. Im fünften Kapitel werden wir diesen neuen Ansatz testen.



## 2. EEG Vorwärts Problem

In diesem Kapitel widmen wir uns der partiellen Differentialgleichung für das EEG Vorwärts Problem. Die Grundlage hierfür bilden die Maxwell Gleichungen. Für diese wählen wir einen quasi-statischen Ansatz. Darüber hinaus benötigen wir für die partielle Differentialgleichung eine Randbedingung. Diese wird in diesem Kapitel hergeleitet. Zuletzt wird eine erste schwache Formulierung aufgestellt. Dieses Kapitel orientiert sich insbesondere an (Wagner, 2011), (Vorwerk, 2016), (Nüfing, 2018) und (Evans, 2010), wo weiterführende Informationen und Details gefunden werden können.

Bei einem EEG werden elektrische Signale an der Kopfoberfläche gemessen. Diese Signale werden von Gruppen von Neuronen in der grauen Substanz des Gehirns erzeugt. Diese Neuronen sind über ein Netzwerk miteinander verbunden. Generell bestehen die Neuronen aus einem Zellkörper (Soma), der den Zellkern enthält, sowie den Dendriten, welche sich verzweigen, und dem Axon, einer einzelnen langen Nervenfasern, die den Nervenimpuls weiterleitet. Es werden zwei Arten von Nervenzellen unterschieden: die Pyramidalzellen und die Sternzellen. Die Pyramidalzellen empfangen ein elektrisches Signal von benachbarten Neuronen und verbreiten dieses Signal, indem sie ein Potential freigeben, wenn eine gewisse Schwelle erreicht wurde. So entsteht ein Strom, welcher durch einen Dipol modelliert werden kann. Da die Dendriten der Pyramidalzellen senkrecht zur Hirnoberfläche verlaufen, ist das Dipolmoment senkrecht zur kortikalen Oberfläche orientiert.

Die Basis für das EEG Vorwärts Problem bilden die Maxwell Gleichungen. Diese sind wie folgt gegeben:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \left( j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right), \quad (2.4)$$

mit dem elektrischen Feld  $E$ , der elektrischen Ladungsdichte  $\rho$ , der elektrischen Konstante  $\epsilon_0$ , dem magnetischen Feld  $B$ , der magnetischen Konstante  $\mu_0$  und der Spannungsdichte  $j$ . Darüber hinaus betrachten wir das Problem als ein quasi-statisches Problem, da sowohl  $\frac{\partial E}{\partial t}$  als auch  $\frac{\partial B}{\partial t}$  im Vergleich zu  $B$  und  $E$  sehr klein sind. Damit zeigt uns (2.2), dass die Rotation des elektrischen Feldes null ist. Da darüber hinaus für die Rotation eines Gradienten gilt:

$$\nabla \times \nabla u = 0,$$

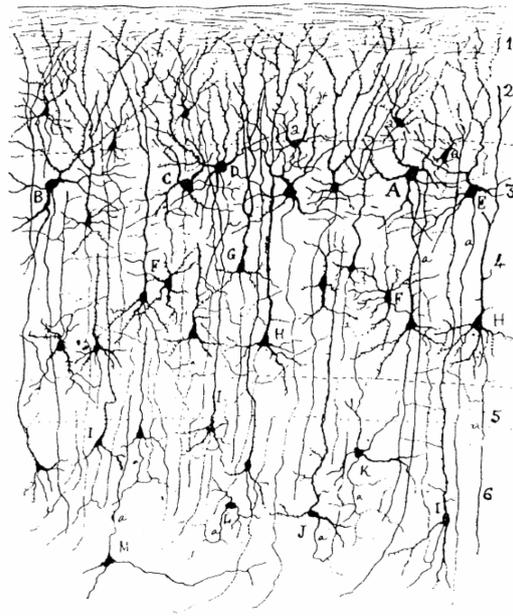


Abbildung 2.1.: Neuronen in einem Rattenkortex. Sowohl Pyramidalzellen als auch Sternzellen sind eingezeichnet (Hämäläinen et al., 1993).

können wir  $E$  darstellen als

$$E = -\nabla u.$$

Des Weiteren teilen wir die Stromdichte  $j$  auf in  $j = j^p + j^v$ . Dabei bezeichnet  $j^p$  den Primärstrom und  $j^v = \sigma E$  den Volumenstrom, wobei  $\sigma$  die Leitfähigkeit beschreibt. Es gilt also

$$\begin{aligned} j = j^p + j^v &= j^p + \sigma E \\ &= j^p - \sigma u. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Betrachten wir die Divergenz von (2.5), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla \cdot j &= \nabla \cdot j^p - \nabla \cdot (\sigma \nabla u) \\ \Leftrightarrow \nabla \cdot j^p &= \nabla \cdot j + \nabla \cdot (\sigma \nabla u). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nehmen wir jetzt die Divergenz von (2.4) und beachten, dass für eine quasi-statischen Ansatz  $\frac{\partial E}{\partial t}$  zu vernachlässigen ist und die Divergenz einer Rotation verschwindet, so erhalten wir

$$0 = \nabla \cdot \nabla \times B = \nabla \cdot \mu_0 j.$$

Es folgt also  $\nabla \cdot j = 0$ . Mit (2.6) folgt

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = \nabla \cdot j^p.$$

Betrachten wir ein Modell eines Kopfes, so unterteilen wir dieses in einzelne Bereiche, wie die Kopfhaut, den Schädel, die CSF (Cerebrospinalflüssigkeit) und das Gehirn. Jeder einzelne Bereich hat dabei seine eigene Leitfähigkeit. Das bedeutet die Leitfähigkeit  $\sigma$  muss nicht stetig sein, sie kann Sprünge an den Grenzen der einzelnen Bereiche haben. Nehmen wir nun an, dass  $\sigma$  innerhalb eines Bereiches konstant und isotrop ist. Damit ist das Potential  $u$  zwischen zwei Bereichen nicht differenzierbar. Allerdings ist  $u$  innerhalb des Kopfes stetig. Es gilt also

$$\lim_{\Omega_l \ni p \rightarrow p^*} u_l(p) = \lim_{\Omega_k \ni p \rightarrow p^*} u_k(p),$$

wobei  $\Omega_l$  der  $l$ -te Bereich von  $\Omega$  ist und  $p^*$  ein Punkt auf der Grenze zwischen dem  $l$ -ten und dem  $k$ -ten Bereich. Darüber hinaus ist der Fluss  $\sigma \nabla u$  stetig. Es gilt also

$$\lim_{\Omega_l \ni p \rightarrow p^*} \langle \sigma_l(p) \nabla u_l(p), \vec{n} \rangle = \lim_{\Omega_k \ni p \rightarrow p^*} \langle \sigma_k(p) \nabla u_k(p), \vec{n} \rangle. \quad (2.7)$$

Außerhalb des Kopfes ist die Leitfähigkeit allerdings null. Dies können wir in (2.7) auf der rechten Seite einsetzen und erhalten

$$\lim_{\Omega \ni p \rightarrow p^*} \langle \sigma(p) \nabla u(p), \vec{n} \rangle = 0.$$

Damit erhalten wir also eine **homogene Neumann Randbedingung**

$$\sigma \partial_n u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Insgesamt erhalten wir damit für das EEG Vorwärts Problem eine Poisson-Gleichung.

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f = \nabla \cdot j^p \quad \text{in } \Omega \quad (2.8a)$$

$$\sigma \partial_n u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (2.8b)$$

Dabei beschreibt  $\Omega$  den Kopf und  $\sigma(x)$  die Leitfähigkeit im Kopf. Es wird angenommen, dass  $\Omega$  offen und zusammenhängend ist.

Klassische Lösungen für dieses Problem existieren nur unter gewissen Annahmen, wie beispielsweise einem genügend regulären Quellterm  $f$  oder einer stetigen Leitfähigkeit  $\sigma$ . Deshalb suchen wir schwache Lösungen von (2.8). Dafür definieren wir zunächst Sobolev-Räume. Diese werden auf dem Funktionenraum  $L^2(\Omega)$  aufgebaut.

**Definition 2.1** (Schwache Ableitung). Sei  $u \in L^2(\Omega)$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  mit stückweise glattem Rand) und  $\alpha$  ein Multiindex. Dann heißt  $v = \partial^\alpha u$ , falls  $v \in L^2(\Omega)$  und

$$\int_{\Omega} \phi(x) v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \partial^\alpha \phi(x) u(x) dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

hierbei bezeichnet  $C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(u) \text{ ist kompakt}\}$  den Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$  mit kompaktem Träger.

**Bemerkung.** Für einen Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  für  $i = 1, \dots, n$ , sind  $\partial^\alpha$  und  $|\alpha|$  definiert durch

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ \partial^\alpha &= \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \end{aligned}$$

wobei  $\partial_i^{\alpha_i} := \partial^{\alpha_i} / \partial x_i^{\alpha_i}$  die  $\alpha_i$ -te Ableitung in die  $i$ -te Richtung beschreibt.

**Definition 2.2** (Sobolev-Raum). Für  $m \in \mathbb{N}$  ist der Sobolev-Raum  $W^{k,p}(\Omega)$  definiert durch alle lokal integrierbaren Funktionen, deren gemischte (schwache) Ableitungen  $\partial^\alpha u$  für  $|\alpha| \leq k$  existieren und in  $L^p(\Omega)$  liegen.

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega) \mid \partial^\alpha u \text{ ex.}, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\}$$

Für den Spezialfall  $p = 2$  schreibt man auch  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ .

$$H^m(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

In  $H^m(\Omega)$  liegen also alle  $u \in L^2(\Omega)$ , die schwache Ableitungen  $\partial^\alpha u$  für alle  $|\alpha| \leq m$  besitzen.

Mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_m := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \, dx$$

und der dazugehörigen Norm  $\|\cdot\|_m$  wird  $H^m(\Omega)$  ein Hilbert-Raum. Besonders interessant ist für uns der Raum  $H^1(\Omega)$ . Denn für die schwache Formulierung von (2.8) multiplizieren wir die Gleichung mit einer Testfunktion  $v$  und integrieren:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\sigma \partial_n u}_=0 v \, dx - \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla v \, dx.$$

**Definition 2.3** (Schwache Formulierung). Die schwache Formulierung für die Poisson-Gleichung ist gegeben durch: Finde  $u \in H^1(\Omega)$ , für das gilt

$$- \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Nach der Herleitung einer schwachen Formulierung stellt sich die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung. Aufschluss darüber liefert der Satz von Lax-Milgram.

**Satz 2.4** (Lax-Milgram). Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $a(\cdot, \cdot)$  eine stetige, koerzive Bilinearform und  $l \in V'$  ein stetiges lineares Funktional. Dann existiert ein eindeutiges  $u \in V$ , so dass

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V.$$

In (Wolters et al., 2007) wurde gezeigt, dass die Bilinearform aus 2.3 stetig und koerziv ist. Unter der Annahme  $f \in V'$  liefert Satz 2.4 also die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung für das EEG Vorwärts Problem. Wir können uns also nun der Modellierung der rechten Seite  $f = \nabla \cdot j^p$  widmen.

### 3. Subtraktions-Ansatz

Wir haben gerade in Abschnitt 2 festgehalten, dass der Primärstrom durch einen Dipol dargestellt werden kann. Daher befasst sich dieses Kapitel mit der Modellierung des Quellterms auf der rechten Seite der partiellen Differentialgleichung (2.8). Dabei werden in diesem Abschnitt die Arbeiten von (Engwer et al., 2017), (Nüfing, 2018) und (Vorwerk, 2016) benutzt.

Um einen Dipol einzuführen, mit dem wir den Primärstrom darstellen wollen, definieren wir zunächst:

**Definition 3.1** (Dirac Delta Distribution). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und sei  $\mathcal{D}(\Omega)$  ein Testfunktionsraum. Für  $y \in \mathbb{R}^d$  heißt dann das Funktional, welches eine Testfunktion in  $y$  auswertet,

$$\delta_y : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}; \xi \mapsto \xi(y),$$

Dirac Delta Distribution.

Damit modellieren wir den Quellterm als

$$f = \nabla \cdot j^p = \nabla \cdot (p\delta_y), \quad (3.1)$$

wobei  $p$  das Dipolmoment,  $y$  die Position des Dipols und  $\delta_y$  die Dirac Delta Distribution ist.

Dies erschwert die weitere Untersuchung mathematischer Eigenschaften, da die rechte Seite nun kein Element des  $L^2(\Omega)$  ist. Diese Eigenschaft ist allerdings entscheidend für die schwache Formulierung aus (2.3). Dieses Problem gilt es also zu lösen.

Sei dafür  $\Omega^\infty \subset \Omega$  eine nicht-leere offene Umgebung von  $y$  mit konstanter, isotroper Leitfähigkeit  $\sigma^\infty$ .

Dann können wir die Leitfähigkeit  $\sigma$  aufteilen in

$$\sigma = \sigma^c + \sigma^\infty. \quad (3.2)$$

So dass  $\sigma^\infty$  konstant ist in  $\Omega$  und  $\sigma^c$  gleich 0 in  $\Omega^\infty$ :  $\sigma^c = 0$  in  $\Omega^\infty$ .

Damit können wir auch das Potential  $u$  aufteilen in

$$u = u^c + u^\infty. \quad (3.3)$$

Dabei ist  $u^\infty$  das Potential in einem unbeschränkten, homogenen Leiter mit konstanter Leitfähigkeit  $\sigma^\infty$  und löst

$$\nabla \cdot (\sigma^\infty \nabla u^\infty) = f. \quad (3.4)$$

Damit kann  $u^\infty$  analytisch berechnet werden.

Diese Zerlegungen von  $u$  und  $\sigma$  lassen uns eine neue Differentialgleichung für das „Korrektur-Potential“  $u^c$  herleiten

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\sigma \nabla u) &= \nabla \cdot (\sigma \nabla u^c) + \nabla \cdot (\sigma \nabla u^\infty) \\ &= \nabla \cdot (\sigma \nabla u^c) + \nabla \cdot (\sigma^c \nabla u^\infty) + \underbrace{\nabla \cdot (\sigma^\infty \nabla u^\infty)}_{=f} = f.\end{aligned}$$

Für die Randbedingung erhalten wir nun

$$\sigma \partial_n u = \sigma \partial_n u^c + \sigma \partial_n u^\infty = 0.$$

Zusammen liefert dies die partielle Differentialgleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u^c) = -\nabla \cdot (\sigma^c \nabla u^\infty) \quad \text{in } \Omega \quad (3.5a)$$

$$\sigma \partial_n u^c = -\sigma \partial_n u^\infty \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.5b)$$

Für diese partielle Differentialgleichung wollen wir nun in den nächsten beiden Abschnitten eine konforme und eine nicht-konforme schwache Formulierung herleiten.

### 3.1. Konforme Formulierung

Da für den Subtraktions-Ansatz gilt, dass  $u^\infty$  stetig ist, ist auch  $u^c$  ein Element des  $H^1(\Omega)$ . Damit ist ein konformer Ansatz möglich. Wir multiplizieren also die partielle Differentialgleichung (3.5) mit einer Testfunktion  $v$  aus  $H^1(\Omega)$  und integrieren.

Sei also  $v \in H^1(\Omega)$ . Dann gilt für die linke Seite

$$\begin{aligned}LHS &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla u^c) v \, dx \\ &\stackrel{P.I.}{=} \int_{\partial\Omega} \sigma \partial_n u^c v \, ds - \int_{\Omega} \sigma \nabla u^c \nabla v \, dx \\ &\stackrel{(3.5b)}{=} - \int_{\partial\Omega} \sigma \partial_n u^\infty v \, ds - \int_{\Omega} \sigma \nabla u^c \nabla v \, dx.\end{aligned}$$

Und für die rechte Seite

$$\begin{aligned}RHS &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma^c \nabla u^\infty) v \, dx \\ &\stackrel{P.I.}{=} - \int_{\partial\Omega} \sigma^c \partial_n u^\infty v \, ds + \int_{\Omega} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v \, dx.\end{aligned}$$

Bringen wir nun das Randintegral von der linken Seite auf die rechte Seite, so erhalten wir für diese

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} [\sigma \partial_n u^\infty - \sigma^c \partial_n u^\infty] v \, ds + \int_{\Omega} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \sigma^\infty \partial_n u^\infty v \, ds + \int_{\Omega} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

Damit können wir die schwache Formulierung aufstellen.

**Definition 3.2** (Schwache Formulierung). Die schwache Formulierung für einen konformen Subtraktions-Ansatz ist gegeben durch: Finde  $u^c \in H^1(\Omega)$ , so dass

$$a(u^c, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

gilt, wobei die Bilinear- und die Linearform durch

$$a(u^c, v) = - \int_{\Omega} \sigma \nabla u^c \nabla v \, dx \quad (3.6)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \sigma^\infty \partial_n u^\infty v \, ds \quad (3.7)$$

definiert sind.

## 3.2. Discontinuous Galerkin Formulierung

Nachdem wir eine konforme Formulierung hergeleitet haben, werden wir uns in diesem Kapitel mit einer nicht-konformen Formulierung, einer „discontinuous Galerkin“ Formulierung befassen. Diese sind interessant, da sie unter anderem Erhaltungseigenschaften garantieren. Daher beginnen wir diesen Abschnitt mit der Herleitung einer Erhaltungseigenschaft, um daran anschließend eine „discontinuous Galerkin“ Formulierung aufzustellen. In der Herleitung orientiert sich dieses Kapitel besonders an (Engwer et al., 2017), sowie an (Vorwerk, 2016).

Eine Eigenschaft, die wir uns für unsere Formulierung erhoffen, ist die Ladungserhaltung. Diese lautet wie folgt:

$$\int_{\partial K} \sigma \nabla u \cdot \vec{n} \, ds = \int_K f \, dx \quad (3.8)$$

für ein Kontrollvolumen  $K \subset \Omega$ . Mit dem Subtraktions-Ansatz teilen wir  $\sigma \nabla u$  auf in

$$\sigma \nabla u = (\sigma^c + \sigma^\infty) \nabla (u^c + u^\infty).$$

Das setzen wir nun in (3.8) ein und erhalten

$$\int_{\partial K} \sigma \nabla u \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\partial K} \sigma \nabla u^c \cdot \vec{n} \, ds + \int_{\partial K} \sigma^c \nabla u^\infty \cdot \vec{n} \, ds + \int_{\partial K} \sigma^\infty \nabla u^\infty \cdot \vec{n} \, ds.$$

Da  $u^\infty$  (3.4) löst, hebt sich der letzte Term mit der rechten Seite auf und wir erhalten

$$\int_{\partial K} \sigma \nabla u^c \bar{n} \, ds = - \int_{\partial K} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n} \, dx.$$

Wenden wir auf die rechte Seite Gauss an, so erhalten wir eine Erhaltungseigenschaft für das Korrektur-Potential:

$$\int_{\partial K} \underbrace{\sigma \nabla u^c \bar{n}}_{\vec{j}^c} \, ds = \int_K \underbrace{-\nabla \cdot (\sigma^c \nabla u^\infty)}_{f^c} \, dx. \quad (3.9)$$

Dies zeigt, dass das Korrektur-Potential  $u^c$  einen Fluss  $\vec{j}^c$  erzeugt, dessen zugehörige Ladung eine erhaltene Eigenschaft mit Quellterm  $f^c = -\nabla \cdot (\sigma^c \nabla u^\infty)$  ist. Für FEM gilt diese Eigenschaft für die diskrete Lösung, falls die charakteristische Funktion (1 in  $K$  und 0 sonst) im Testraum enthalten ist. Dies ist für konforme Ansätze aber nicht unbedingt gegeben. Daher ist es sinnvoll, auch nicht konforme Methoden, wie eine „discontinuous Galerkin“ Formulierung, zu betrachten.

Ladungserhaltung gilt auch für  $u^\infty$  für einen homogenen Leiter (hier mit Leitfähigkeit  $\sigma^\infty$ ). Daher sind die Normalkomponenten des elektrischen Flusses  $\sigma \nabla u$  und  $\sigma^\infty \nabla u^\infty$  stetig. Schreiben wir nun  $\vec{j}$  mit  $\sigma^c, \sigma^\infty, u^c$  und  $u^\infty$ , können wir zeigen, dass die Normalkomponente von  $\sigma \nabla u^c + \sigma^c \nabla u^\infty$  ebenfalls stetig ist.

Dafür definieren wir den Sprung:

**Definition 3.3.** Sei das Kontrollvolumen  $K$  entlang  $\gamma$  geteilt in  $K_l$  und  $K_r$  (siehe Abbildung 3.1). Dann definieren wir den Sprung einer skalaren Funktion  $u$  bzw. einer vektorwertigen Funktion  $v$  entlang  $\gamma$  durch:

$$[[u]]_\gamma := u|_{\partial K_l} \bar{n}_{K_l} + u|_{\partial K_r} \bar{n}_{K_r} \quad (3.10a)$$

$$[[\vec{v}]]_\gamma := \vec{v}|_{\partial K_l} \bar{n}_{K_l} + \vec{v}|_{\partial K_r} \bar{n}_{K_r}. \quad (3.10b)$$

Der Sprung einer skalaren Funktion ist vektorwertig und der Sprung einer vektorwertigen Funktion ist skalar.

**Lemma 3.4.** Sei  $u$  ein Potential mit Fluss  $\sigma \nabla u$  mit stetiger Normalkomponente entlang einem beliebigen  $\gamma$ . Dann ist auch die Normalkomponente von  $\sigma \nabla u^c + \sigma^c \nabla u^\infty$  stetig für den Subtraktions-Ansatz.

*Beweis.* Sei  $\gamma$  eine beliebige Kante. In jedem Punkt  $x$  entlang  $\gamma$  sind die Normalkomponenten der Flüsse,  $\sigma \nabla u \cdot \bar{n}_\gamma$  und  $\sigma^\infty \nabla u^\infty \cdot \bar{n}_\gamma$  stetig. Daher verschwindet der Sprung.

$$[[\sigma \nabla u]]_\gamma = 0 = [[\sigma^\infty \nabla u^\infty]]_\gamma.$$

Setzen wir nun  $\sigma^c, \sigma^\infty, u^c$  und  $u^\infty$  in  $[[\sigma \nabla u]]_\gamma$  ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & [[\sigma^\infty \nabla u^c]]_\gamma + [[\sigma^c \nabla u^c]]_\gamma + [[\sigma^c \nabla u^\infty]]_\gamma = 0 \\ \Leftrightarrow & [[\sigma \nabla u^c]]_\gamma = -[[\sigma^c \nabla u^\infty]]_\gamma \\ \Leftrightarrow & [[\sigma \nabla u^c + \sigma^c \nabla u^\infty]]_\gamma = 0. \end{aligned}$$

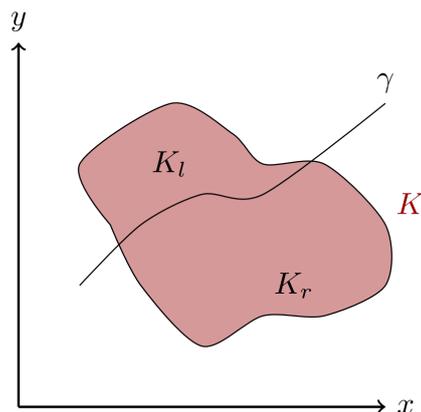


Abbildung 3.1.:  $\gamma$  teilt  $K$  in zwei Teile (Engwer et al., 2017).

Da dies für beliebige Kontrollvolumen gilt, ist die Normalkomponente des Flusses  $\sigma \nabla u^c + \sigma^c \nabla u^\infty$  stetig für jedes beliebiges  $\gamma$ .  $\square$

Aus dem Beweis geht außerdem folgende Gleichung hervor

$$[[\sigma \nabla u^c]]_\gamma = -[[\sigma^c \nabla u^\infty]]_\gamma, \quad (3.11)$$

für ein beliebiges  $\gamma$ . Diese Eigenschaft werden wir später verwenden, um die schwache Formulierung herzuleiten.

Damit können wir nun mit der Herleitung einer „discontinuous Galerkin“ Formulierung für den Subtraktions-Ansatz beginnen. Zunächst starten wir mit einigen Definitionen.

**Definition 3.5** (Triangulierung). Sei  $\mathcal{T}_h(\Omega)$  eine endliche Menge von disjunkten und offenen Teilmengen von  $\Omega$ , welche eine Zerlegung von  $\Omega$  bilden. Dabei steht der Index  $h$  für die Gitterweite  $h := \max\{\text{diam}(E) | E \in \mathcal{T}_h\}$ . Dann nennen wir  $\mathcal{T}_h(\Omega)$  eine Triangulierung von  $\Omega$ .

Für eine Triangulierung  $\mathcal{T}_h(\Omega)$  definieren wir nun das Skelett.

**Definition 3.6** (Skelett). Sei  $\mathcal{T}_h(\Omega)$  eine Triangulierung. Dann ist das **innere Skelett** gegeben durch

$$\Gamma_{int} := \{\gamma_{e,f} = \partial E_e \cap \partial E_f | E_e, E_f \in \mathcal{T}_h, E_e \neq E_f, |\gamma_{e,f}| > 0\} \quad (3.12)$$

und das **Skelett**  $\Gamma := \Gamma_{int} \cup \partial\Omega$  (vgl. Abbildung 3.2).

Nun definieren wir uns einen Ansatzraum:

**Definition 3.7** (Broken polynomial spaces). Die Broken polynomial spaces sind die Räume der elementweise polynomialen Funktionen für eine Triangulierung  $\mathcal{T}_h(\Omega)$ .

$$V_h^k := \{v \in L^2(\Omega) : v|_E \in P^k(E), E \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}. \quad (3.13)$$

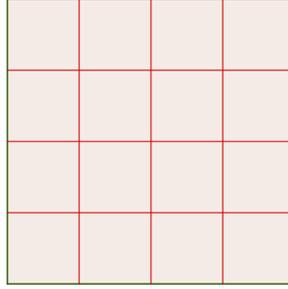


Abbildung 3.2.: Skelett: In Grün ist  $\partial\Omega$  dargestellt und in Rot das innere Skelett  $\Gamma_{int}$ .

**Bemerkung.** Auf jedem Element sind die Funktionen  $v \in V_h^k$  also Polynome, aber zwischen den Elementen müssen sie nicht stetig sein. Daher ist der Gradient einer solchen Funktion auch nicht auf ganz  $\Omega$  definiert. Wir müssten also einen neuen Gradienten, der nur elementweise definiert ist, einführen. Bei einer möglichen Implementierung jedoch werden die für die schwache Formulierung notwendigen Integrale jedoch mit einer Quadraturformel elementweise berechnet. Insofern ist die Definition eines elementweise definierten Gradienten nicht entscheidend.

**Definition 3.8** (Sprung und Mittelwert). Für zwei Elemente  $E_e$  und  $E_f \in \mathcal{T}_h$  definieren wir (wie in Definition 3.3) den Sprung

$$[[x]] := x|_{E_e} \bar{n}_{E_e} + x|_{E_f} \bar{n}_{E_f},$$

wobei  $\bar{n}|_E$  die äußere Normale zu  $E \in \mathcal{T}_h$  ist und den Mittelwert

$$\{x\} := \omega_{e,f} x|_{E_e} + \omega_{f,e} x|_{E_f}.$$

Auf dem Rand ( $\partial E_e \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ ) definieren wir

$$[[x]] := x|_{E_e} \bar{n}_{\partial\Omega} \quad \{x\} := x|_{E_e}.$$

Die Gewichte  $\omega_{e,f}$  und  $\omega_{f,e}$  können als das arithmetische Mittel gewählt werden. Für heterogene Leitfähigkeiten ist allerdings eine leitfähigkeits-abhängige Wahl optimal:

$$\omega_{e,f} := \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_e} \quad \text{und} \quad \omega_{f,e} := \frac{\sigma_e}{\sigma_e + \sigma_f}.$$

Dabei ist  $\sigma_e = \sigma(x)|_{\partial E_e}$ ,  $\sigma_f = \sigma(x)|_{\partial E_f}$ .

Ebenso definieren wir den Mittelwert mit vertauschten Gewichten

$$\{x\}^* := \omega_{f,e} x|_{E_e} + \omega_{e,f} x|_{E_f}. \tag{3.14}$$

Und daraus erhalten wir die Eigenschaft:

**Lemma 3.9** (Multiplikative Eigenschaft des Sprungs). Seien  $x, y \in L^2(\Omega)$  und  $\gamma \in \Gamma^{int}$ . Dann gilt

$$[[xy]] = [[x]]\{y\}^* + \{x\}[[y]].$$

*Beweis.* Sei  $x_e := x|_{E_e}$  und  $\bar{n}_e := \bar{n}|_{E_e}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned}
 \llbracket xy \rrbracket &= x_e y_e \bar{n}_e + x_f y_f \bar{n}_f \\
 &= \underbrace{(\omega_{e,f} + \omega_{f,e}) x_e y_e \bar{n}_e}_{=1} + \underbrace{(\omega_{e,f} + \omega_{f,e}) x_f y_f \bar{n}_e}_{=1} + \underbrace{\omega_{e,f} x_e y_f (\bar{n}_e + \bar{n}_f)}_{=0} + \underbrace{\omega_{f,e} x_f y_e (\bar{n}_e + \bar{n}_f)}_{=0} \\
 &= (x_e \bar{n}_e + x_f \bar{n}_f)(\omega_{f,e} y_e + \omega_{e,f} y_f) + (\omega_{e,f} x_e + \omega_{f,e} x_f)(y_e \bar{n}_e + y_f \bar{n}_f) \\
 &= \llbracket x \rrbracket \{y\}^* + \{x\} \llbracket y \rrbracket.
 \end{aligned}$$

□

Jetzt können wir uns dem Galerkin-Ansatz widmen. Wir suchen also eine Lösung  $u_h^c \in V_h^k$ , so dass sie die Gleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u^c) = -\nabla \cdot (\sigma^c \nabla u^\infty) \quad \text{in } \Omega \quad (3.15a)$$

$$\sigma \partial_n u^c = -\sigma \partial_n u^\infty \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.15b)$$

in einem schwachen Sinne löst. Dafür leiten wir nun erneut eine Bilinearform her. Wir multiplizieren mit einer Testfunktion  $v_h \in V_h^k$  und integrieren:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla u_h^c) v_h \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma^c \nabla u^\infty) v_h \, dx.$$

Für die linke Seite erhalten wir mit elementweiser partieller Integration

$$\begin{aligned}
 LHS &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla u_h^c) v_h \, dx \\
 &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \nabla \cdot (\sigma \nabla u_h^c) v_h \, dx \\
 &\stackrel{P.I.}{=} \sum_E \left[ - \int_E \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\partial E} \sigma \nabla u_h^c \bar{n} v_h \, ds \right] \\
 &= - \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \sigma \nabla u_h^c \bar{n} v_h \, ds \\
 &= - \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\partial\Omega} \sigma \nabla u_h^c \bar{n} v_h \, ds + \int_{\Gamma_{int}} \sigma \nabla u_h^c \bar{n} v_h \, ds \\
 &\stackrel{(3.15b)}{=} - \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx - \int_{\partial\Omega} \sigma \nabla u^\infty \bar{n} v_h \, ds + \int_{\Gamma_{int}} \llbracket \sigma \nabla u_h^c v_h \rrbracket \, ds.
 \end{aligned}$$

Mit der multiplikativen Eigenschaft des Sprungs aus Lemma 3.9 ergibt sich

$$\begin{aligned}
 LHS &= - \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx - \int_{\partial\Omega} \sigma \nabla u^\infty \bar{n} v_h \, ds \\
 &\quad + \int_{\Gamma_{int}} \underbrace{\llbracket \sigma \nabla u_h^c \rrbracket \{v_h\}^* + \{\sigma \nabla u_h^c\} \llbracket v_h \rrbracket}_{=: \dagger} \, ds.
 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Und für die rechte Seite erhalten wir analog

$$\begin{aligned}
 RHS &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} - \int_E \nabla \sigma^c \nabla u^\infty v_h dx \\
 &\stackrel{P.I.}{=} \sum_E \left[ \int_E \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h dx - \int_{\partial E} \sigma^c \nabla u^\infty \tilde{n} v_h ds \right] \\
 &= \int_\Omega \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h dx - \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_\gamma \sigma^c \nabla u^\infty \tilde{n} v_h ds \\
 &= \int_\Omega \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h dx - \int_{\partial\Omega} \sigma^c \nabla u^\infty \tilde{n} v_h ds - \int_{\Gamma_{int}} \llbracket \sigma^c \nabla u^\infty v_h \rrbracket ds.
 \end{aligned}$$

Wieder mit der multiplikativen Eigenschaft des Sprungs erhalten wir

$$\begin{aligned}
 RHS &= \int_\Omega \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h dx - \int_{\partial\Omega} \sigma^c \nabla u^\infty \tilde{n} v_h ds \\
 &\quad - \int_{\Gamma_{int}} \underbrace{\llbracket \sigma^c \nabla u^\infty \rrbracket \{v_h\}^*}_{=:\dagger^2} + \{\sigma^c \nabla u^\infty\} \llbracket v_h \rrbracket ds. \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Nun bringen wir noch das Randintegral aus (3.16) auf die rechte Seite. Außerdem gilt nach (3.11) wie vorhin bemerkt  $\dagger^1 = -\dagger^2$ . Damit kürzt sich auch dieser Term weg und wir erhalten den Operator

$$\tilde{a}(u_h^c, v_h) = - \int_\Omega \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h dx + \int_{\Gamma_{int}} \{\sigma \nabla u_h^c\} \llbracket v_h \rrbracket ds.$$

Es fällt allerdings auf, dass dieser Operator nicht symmetrisch ist. Daher addieren wir noch einen zusätzlichen Term

$$\tilde{a}^{sym}(u_h^c, v_h) := \int_{\Gamma_{int}} \{\sigma \nabla v_h\} \llbracket u_h^c \rrbracket ds.$$

Um darüber hinaus noch Koerzivität zu garantieren, addieren wir zu der linken Seite noch einen Strafterm

$$J(u_h^c, v_h) := -\eta \int_{\Gamma_{int}} \frac{\hat{\sigma}_\gamma}{h_\gamma} \llbracket u_h^c \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket ds.$$

Dabei stehen  $h_\gamma$  und  $\hat{\sigma}_\gamma$  für die lokale Gitterweite und elektrische Leitfähigkeit an einer Kante  $\gamma$ . Dabei sind diese wie folgt gewählt

$$\begin{aligned}
 h_{\gamma_{e,f}} &:= \frac{\min(|E_e|, |E_f|)}{|\gamma_{e,f}|}, \\
 \hat{\sigma}_{\gamma_{e,f}} &:= \frac{2\sigma_e \sigma_f}{\sigma_e + \sigma_f}.
 \end{aligned}$$

Um auch wirklich Koerzivität zu garantieren, muss  $\eta > 0$  groß groß genug gewählt werden.

Dies führt nun auf die schwache Formulierung.

**Definition 3.10** (Schwache Formulierung). Die „discontinuous Galerkin“ Formulierung für den Subtraktions-Ansatz ist gegeben durch:

Finde  $u_h^c \in V_h$ , so dass

$$a(u_h^c, v_h) + J(u_h^c, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

gilt, dabei ist

$$\begin{aligned} a(u_h^c, v_h) &= \tilde{a}(u_h^c, v_h) + \tilde{a}^{sym}(u_h^c, v_h) \\ &= - \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_{int}} \{ \sigma \nabla u_h^c \} \llbracket v_h \rrbracket + \{ \sigma \nabla v_h \} \llbracket u_h^c \rrbracket \, ds \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$J(u_h^c, v_h) = -\eta \int_{\Gamma_{int}} \frac{\hat{\sigma}_\gamma}{h_\gamma} \llbracket u_h^c \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket \, ds \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} l(v_h) &= \int_{\Omega} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h \, dx \\ &\quad - \int_{\Gamma_{int}} \{ \sigma^c \nabla u^\infty \} \llbracket v_h \rrbracket \, ds + \int_{\partial\Omega} \sigma^\infty \partial_n u^\infty v_h \, ds. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mit  $u_h^c$  kann nun das gesamte Potential  $u_h$  berechnet werden aus  $u_h = u_h^c + u^\infty$ .



## 4. Lokalisierter Subtraktions-Ansatz

Nachdem wir den Subtraktions-Ansatz hergeleitet haben, stellt sich die Frage, ob sich dieser Ansatz optimieren lässt. Denn der Träger des Singularitäts-Potentials  $u^\infty$  ist ganz  $\Omega$ . Somit muss für die Assemblierung der rechten Seite über das ganze Gebiet integriert werden. Dies möchten wir vermeiden, um Rechenzeit zu sparen. Eine Idee dafür ist es, das Singularitäts-Potential  $u^\infty$  auf eine Teilmenge  $\Omega^\infty \subset \Omega$  einzuschränken. So eine Teilmenge ist in Abbildung 4.1 für ein Kugelschalenmodell schematisch dargestellt. Die Grundlage für dieses Kapitel bildet hierbei (Nüßing, 2018).

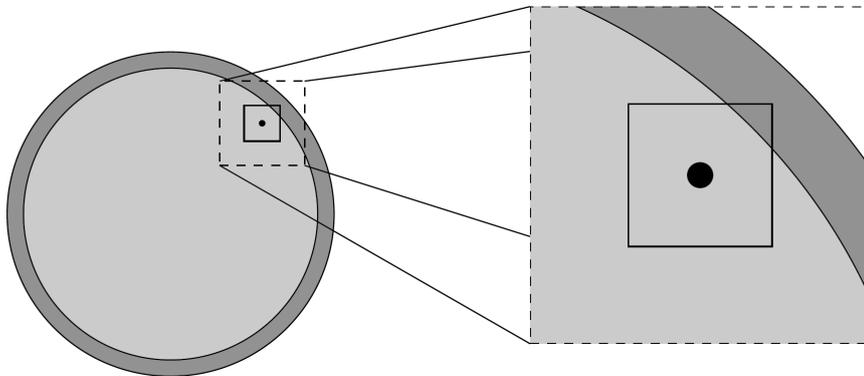


Abbildung 4.1.: Schematische Darstellung von  $\Omega^\infty \subset \Omega$  (Nüßing, 2018).

Um das Singularitäts-Potential  $u^\infty$  auf eine Teilmenge  $\Omega^\infty \subset \Omega$  einzuschränken, verwenden wir eine Indikatorfunktion.

**Definition 4.1** (Indikatorfunktion). Sei  $\Omega$  eine Menge und  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  eine Teilmenge. Dann ist die Indikatorfunktion  $\chi_{\tilde{\Omega}}$  definiert durch:

$$\chi_{\tilde{\Omega}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \tilde{\Omega} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit können wir nun das Potential und die Leitfähigkeit für einen lokalisierten Subtraktions-Ansatz aufteilen.

$$u = u^c + \chi_{\Omega^\infty} u^\infty \quad (4.1a)$$

$$\sigma = \sigma^c + \chi_{\Omega^\infty} u^\infty. \quad (4.1b)$$

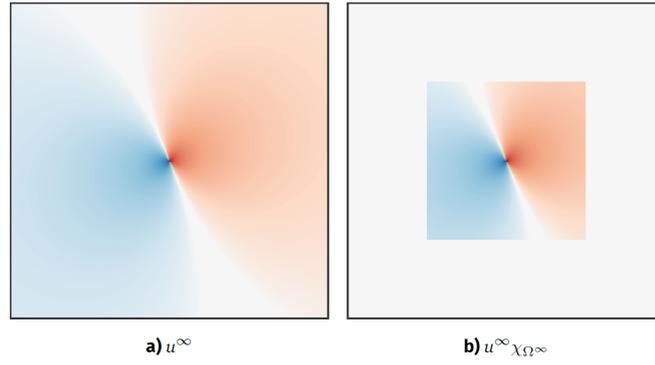


Abbildung 4.2.: Singularitäts-Potential  $u^\infty$  und dessen Einschränkung auf  $\Omega^\infty$  für ein zweidimensionales Gebiet. Negative Werte werden in blau, positive Werte in rot dargestellt. Skaliert wurde logarithmisch (Nüfing, 2018).

Dabei ist  $u^\infty$  weiterhin die Lösung von

$$\nabla \cdot (\sigma^\infty \nabla u^\infty) = \nabla \cdot j^p, \quad (4.2)$$

welche analytisch berechnet werden kann.

Da wir die Stetigkeit des Flusses fordern, stellen wir eine zusätzliche Bedingung,

$$[[\sigma \nabla u]] = 0, \quad \text{auf } \partial\Omega^\infty, \quad (4.3)$$

für den Rand des Patches auf. Hierbei ist der Sprung  $[[\cdot]]$  definiert wie in Definition 3.8.

Das Einschränken von  $u^\infty$  auf  $\Omega^\infty$  führt natürlich zu einem Fehler. In Abbildung 4.2 sind  $u^\infty$  und  $\chi_{\Omega^\infty}$  für den zweidimensionalen Fall dargestellt. Dabei fällt auf, dass mit zunehmendem Abstand zur Dipolposition  $u^\infty$  schnell abnimmt. Gleichzeitig gilt dies auch für den Gradienten von  $u^\infty$ . Zusammen lässt dies also vermuten, dass das Einschränken von  $u^\infty$  auf  $\Omega^\infty$  nur zu kleineren Fehlern in der Genauigkeit, die durch das Korrektur-Potential  $u^c$  ausgeglichen werden können, führt.

Allerdings ist  $\chi_{\Omega^\infty}$  nicht aus  $H^1(\Omega)$ , da es auf  $\partial\Omega^\infty$  einen Sprung hat. Für das gesamte Potential fordern wir aber Stetigkeit, weshalb das Korrektur-Potential  $u^c$  ebenfalls einen Sprung besitzen muss - diesen aber in die entgegengesetzte Richtung. Somit ist das Korrektur-Potential auch kein Element aus  $H^1(\Omega)$ . Das bedeutet, ein konformer Ansatz ist zunächst nicht anwendbar. Daher widmen wir uns zunächst einer „discontinuous Galerkin“-Formulierung.

## 4.1. Discontinuous Galerkin Formulierung

In der Herleitung der DG-Formulierung für den Subtraktions-Ansatz wurde zunächst eine Erhaltungseigenschaft für das Korrektur-Potential hergeleitet. Für den lokalisierten

Subtraktions-Ansatz beginnen wir analog. Dafür beginnen wir mit der Ladungserhaltung für ein beliebiges Kontrollvolumen  $K \subset \Omega$ .

$$\int_{\partial K} \sigma \nabla u \vec{n} \, ds = \int_K f \, dx \quad (4.4)$$

mit  $f = \nabla \cdot j^p$ . Definiere nun  $\tilde{\Omega} := \Omega \setminus \bar{\Omega}^\infty$ . Mit der Kopplungseigenschaft (4.3) können wir die linke Seite umformen und erhalten

$$\begin{aligned} LHS &= \int_{\partial K} \sigma \nabla u \vec{n} \, ds \\ &= \int_{\partial K} \sigma \nabla u \vec{n} \, ds + \int_{(\partial \Omega^\infty) \cap K} \llbracket \sigma \nabla u \rrbracket ds \\ &= \int_{\partial K} \sigma \nabla u \vec{n} \, ds - \int_{(\partial \Omega^\infty) \cap K} \sigma \nabla u \vec{n}^\infty \, ds + \int_{(\partial \Omega^\infty) \cap K} \sigma \nabla u \vec{n}^\infty \, ds \\ &= \int_{\partial(K \setminus \Omega^\infty)} \sigma \nabla u|_{\tilde{\Omega}} \vec{n} \, ds + \int_{\partial(K \cap \Omega^\infty)} \sigma \nabla u|_{\Omega^\infty} \vec{n} \, ds. \end{aligned}$$

Hierbei ist  $\vec{n}^\infty$  die äußere Einheitsnormale auf  $\partial \Omega^\infty$ . Der erste Term beschreibt hierbei das Integral über den Fluss über den Rand des Kontrollvolumens außerhalb von  $\Omega^\infty$ . Da das Singularitäts-Potential für den lokalisierten Subtraktions-Ansatz nur in  $\Omega^\infty$  existiert, gilt für den ersten Term

$$\int_{\partial(K \setminus \Omega^\infty)} \sigma \nabla u|_{\tilde{\Omega}} \vec{n} \, ds = \int_{\partial(K \setminus \Omega^\infty)} \sigma \nabla u^c|_{\tilde{\Omega}} \vec{n} \, ds.$$

Der zweite Term beschreibt das Integral über den Fluss über den Teil des Kontrollvolumens in  $\Omega^\infty$ . Für dieses Integral können wir die Zerlegung des Potentials einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(K \cap \Omega^\infty)} \sigma \nabla u|_{\Omega^\infty} \vec{n} \, ds \\ &= \int_{\partial(K \cap \Omega^\infty)} \sigma \nabla u^c|_{\Omega^\infty} \vec{n} \, ds + \int_{\partial(K \cap \Omega^\infty)} \sigma^c \nabla u^\infty \, ds + \int_{\partial(K \cap \Omega^\infty)} \sigma^\infty \nabla u^\infty \vec{n} \, ds. \end{aligned}$$

Nun setzen wir beides ein in (4.4) und erhalten

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(K \setminus \Omega^\infty)} \sigma \nabla u^c|_{\tilde{\Omega}} \vec{n} \, ds + \int_{\partial(K \cap \Omega^\infty)} \sigma \nabla u^c|_{\Omega^\infty} \vec{n} \, ds + \int_{\partial(K \cap \Omega^\infty)} \sigma^c \nabla u^\infty \vec{n} \, ds \\ &+ \int_{\partial(K \cap \Omega^\infty)} \sigma^\infty \nabla u^\infty \vec{n} \, ds \\ &= \int_K f \, dx. \end{aligned}$$

Da aber  $u^\infty$  eine Lösung von (4.2) ist, heben sich der letzte Term und die rechte Seite gegenseitig auf. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\partial(K \setminus \Omega^\infty)} \sigma \nabla u^c|_{\tilde{\Omega}} \bar{n} \, ds + \int_{\partial(K \cap \Omega^\infty)} \sigma \nabla u^c|_{\Omega^\infty} \bar{n} \, ds + \int_{\partial(K \cap \Omega^\infty)} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n} \, ds = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{\partial(K \setminus \Omega^\infty)} \sigma \nabla u^c|_{\tilde{\Omega}} \bar{n} \, ds + \int_{\partial(K \cap \Omega^\infty)} \sigma \nabla u^c|_{\Omega^\infty} \bar{n} \, ds = - \int_{\partial(K \cap \Omega^\infty)} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n} \, ds. \end{aligned}$$

Wenden wir nun den Satz von Gauss auf die rechte Seite an. Das liefert

$$\int_{\partial K} \sigma \nabla u^c \bar{n} \, ds + \int_{(\partial \Omega^\infty) \cap K} [\![\sigma \nabla u^c]\!] \, ds = \int_K -\chi_{\Omega^\infty} \nabla \cdot \sigma^c \nabla u^\infty \, dx. \quad (4.5)$$

Vergleichen wir dies nun mit der Erhaltungsgleichung für den Subtraktions-Ansatz aus Abschnitt 3.2:

$$\int_{\partial K} \sigma \nabla u^c \bar{n} \, ds = \int_K -\nabla \cdot (\sigma^c \nabla u^\infty) \, dx.$$

Es fällt auf, dass die rechte Seite in Gleichung (4.5) nur nicht-null Werte auf dem Patch  $\Omega^\infty$  hat. Zusätzlich erhalten wir einen Fluss am Rand dieses Patches, da wir das Singularitäts-Potential abschneiden. Da wir für den Fluss Stetigkeit fordern, also  $[\![\sigma \nabla u]\!] = 0$  auf  $\partial \Omega^\infty$  (vgl. (4.3)), kann dieser Fluss auch dargestellt werden als  $-\sigma \nabla u^\infty \bar{n}^\infty$ . Damit kann die Gleichung (4.5) als Erhaltungseigenschaft für den lokalisierten Subtraktions-Ansatz gesehen werden, welche einen Quellterm auf dem Patch und einen zusätzlichen Fluss auf dessen Rand enthält.

Nun beginnen wir mit der Herleitung einer DG-Formulierung. Dafür seien  $\mathcal{T}_h(\Omega^\infty)$  und  $\mathcal{T}_h(\tilde{\Omega})$  zwei Triangulierungen von  $\Omega^\infty$  und  $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \bar{\Omega}^\infty$ . In der Praxis verwenden wir lediglich eine Triangulierung von  $\Omega$  und betrachten die Elemente, welche in  $\Omega^\infty$  liegen, extra.

Für die schwache Formulierung multiplizieren wir wie immer mit einer Testfunktion und integrieren, zunächst nur über ein Element  $E \in \mathcal{T}_h(\Omega^\infty)$ .

$$\int_E (\nabla \cdot \sigma \nabla u_h) v_h \, dx = \int_E (\nabla \cdot j^p) v_h \, dx.$$

Nun nutzen wir die Zerlegungen der Leitfähigkeit und des Potentials für den lokalisierten Subtraktions-Ansatz (4.1) und erhalten für die linke Seite

$$\begin{aligned} LHS &= \int_E (\nabla \cdot \sigma \nabla u_h^c) v_h + (\nabla \cdot \sigma^c \nabla u^\infty) v_h + (\nabla \cdot \sigma^\infty \nabla u^\infty) v_h \, dx \\ &\stackrel{(4.2)}{=} \int_E (\nabla \cdot \sigma \nabla u_h^c) v_h + (\nabla \cdot \sigma^c \nabla u^\infty) v_h \, dx + \int_E (\nabla \cdot j^p) v_h \, dx. \end{aligned}$$

Damit hebt sich der letzte Term mit der rechten Seite auf, da  $u^\infty$  (4.2) löst. Wir erhalten also

$$\int_E (\nabla \cdot \sigma \nabla u_h^c) v_h \, dx = - \int_E (\nabla \cdot \sigma^c \nabla u^\infty) v_h \, dx.$$

Mit partieller Integration auf beiden Seiten ergibt sich

$$- \int_E \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\partial E} \sigma \nabla u_h^c |_{\Omega^\infty} \bar{n} v_h \, ds = \int_E \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h \, dx - \int_{\partial E} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n} v_h \, ds.$$

Nun summieren wir über alle Elemente  $E \in \mathcal{T}_h(\Omega^\infty)$ . Dafür sei wieder  $\bar{n}^\infty$  die äußere Einheitsnormale an  $\partial\Omega^\infty$  und  $\Gamma^\infty$  das innere Skelett von  $\Omega^\infty$ . Das liefert

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega^\infty} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\Gamma^\infty} [\sigma \nabla u_h^c v_h] \, ds + \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma \nabla u_h^c |_{\Omega^\infty} \bar{n}^\infty v_h |_{\Omega^\infty} \, ds \\ & = \int_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h \, dx - \int_{\Gamma^\infty} [\sigma^c \nabla u^\infty v_h] \, ds - \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h |_{\Omega^\infty} \, ds. \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die multiplikative Eigenschaft des Sprungs und erhalten zunächst für die linke Seite

$$- \int_{\Omega^\infty} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\Gamma^\infty} \underbrace{[\sigma \nabla u_h^c] \{v_h\}^* + \{\sigma \nabla u_h^c\} [v_h]}_{\dagger^1} \, ds + \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma \nabla u_h^c |_{\Omega^\infty} \bar{n}^\infty v_h |_{\Omega^\infty} \, ds.$$

Für die rechte Seite gilt mit der multiplikativen Eigenschaft des Sprungs

$$\int_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h \, dx - \int_{\Gamma^\infty} \underbrace{[\sigma^c \nabla u^\infty] \{v_h\}^* + \{\sigma^c \nabla u^\infty\} [v_h]}_{\dagger^2} \, ds - \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h |_{\Omega^\infty} \, ds.$$

Im Abschnitt zum Subtraktions-Ansatz haben wir gezeigt, dass  $[\sigma \nabla u_h^c + \sigma^c \nabla u^\infty] = 0$  gilt (vgl. Lemma 3.4). Bringen wir also den Term  $\dagger^1$  auf die rechte Seite. Für diese gilt dann

$$\int_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h \, dx - \int_{\Gamma^\infty} \underbrace{([\sigma^c \nabla u^\infty] + [\sigma \nabla u_h^c]) \{v_h\}^* + \{\sigma^c \nabla u^\infty\} [v_h]}_{=0} \, ds - \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h |_{\Omega^\infty} \, ds.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega^\infty} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\Gamma^\infty} \{\sigma \nabla u_h^c\} [v_h] \, ds + \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma \nabla u_h^c |_{\Omega^\infty} \bar{n}^\infty v_h |_{\Omega^\infty} \, ds \\ & = \int_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h \, dx - \int_{\Gamma^\infty} \{\sigma^c \nabla u^\infty\} [v_h] \, ds - \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h |_{\Omega^\infty} \, ds. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Nachdem wir über die Elemente von  $\mathcal{T}_h(\Omega)$  summiert haben, können wir uns den Elementen von  $\mathcal{T}_h(\tilde{\Omega})$  widmen. Für ein Element  $E \in \mathcal{T}_h(\tilde{\Omega})$  gilt  $u_h \equiv u_h^c$  und

$$\int_E (\nabla \cdot \sigma \nabla u_h^c) v_h \, dx = 0.$$

Mit partieller Integration erhalten wir

$$-\int_E \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\partial E} \sigma \nabla u_h^c|_{\tilde{\Omega}} \bar{n} v_h|_{\tilde{\Omega}} \, ds = 0.$$

Wir summieren wieder über alle  $E \in \mathcal{T}_h(\tilde{\Omega})$  und beachten dabei die homogenen Neumann Randwerte auf  $\partial\Omega$ . Damit erhalten wir

$$-\int_{\tilde{\Omega}} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\Gamma \setminus (\Gamma^\infty \cup \partial\Omega^\infty)} [[\sigma \nabla u_h^c v_h]] \, ds - \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma \nabla u_h^c|_{\tilde{\Omega}} \bar{n}^\infty v_h|_{\tilde{\Omega}} \, ds = 0,$$

wobei  $\Gamma$  das innere Skelett von  $\Omega$  und  $\bar{n}$  die äußere Einheitsnormale an  $\Omega^\infty$  beschreibt. Nun verwenden wir die multiplikative Eigenschaft des Sprungs aus Lemma 3.9 und bekommen

$$\begin{aligned} -\int_{\tilde{\Omega}} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\Gamma \setminus (\Gamma^\infty \cup \partial\Omega^\infty)} [[\sigma \nabla u_h^c]] \{v_h\}^* + \{\sigma \nabla u_h^c\} [[v_h]] \, ds \\ - \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma \nabla u_h^c|_{\tilde{\Omega}} \bar{n}^\infty v_h|_{\tilde{\Omega}} \, ds = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Insgesamt haben wir  $\Omega$  zerlegt in  $\mathcal{T}_h(\Omega^\infty)$  und  $\mathcal{T}_h(\tilde{\Omega})$ . Wir müssen also noch (4.6) und (4.7) summieren. Beachten wir dabei, dass  $[[\sigma \nabla u_h^c]] = 0$  auf allen inneren Kanten  $\Gamma \setminus (\Gamma^\infty \cup \partial\Omega^\infty)$  gilt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & -\int_{\Omega^\infty} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx - \int_{\tilde{\Omega}} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx \\ & + \int_{\Gamma^\infty} \{\sigma \nabla u_h^c\} [[v_h]] \, ds + \int_{\Gamma \setminus (\Gamma^\infty \cup \partial\Omega^\infty)} \{\sigma \nabla u_h^c\} [[v_h]] + \underbrace{[[\sigma \nabla u_h^c]] \{v_h\}^*}_{=0} \, ds \\ & + \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma \nabla u_h^c|_{\Omega^\infty} \bar{n}^\infty v_h|_{\Omega^\infty} \, ds - \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma \nabla u_h^c|_{\tilde{\Omega}} \bar{n}^\infty v_h|_{\tilde{\Omega}} \, ds \\ & = \int_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h \, dx - \int_{\Gamma^\infty} \{\sigma^c \nabla u^\infty\} [[v_h]] \, ds + \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h|_{\Omega^\infty} \, ds. \end{aligned}$$

Dabei können wir jetzt die einzelnen Zeilen zusammenfassen, wobei wir in der dritten

Zeile bemerken, dass  $\sigma \nabla u_h^c|_{\Omega^\infty} \bar{n}^\infty v_h|_{\Omega^\infty} + \sigma \nabla u_h^c|_{\tilde{\Omega}} - \bar{n}^\infty v_h|_{\tilde{\Omega}} = \llbracket \sigma \nabla u_h^c v_h \rrbracket$  gilt:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx \\
 & + \int_{\Gamma \setminus \partial \Omega^\infty} \{ \sigma \nabla u_h^c \} \llbracket v_h \rrbracket \, ds \\
 & + \int_{\partial \Omega^\infty} \underbrace{\llbracket \sigma \nabla u_h^c v_h \rrbracket}_{=:\ddagger} \, ds \\
 = & \int_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h \, dx - \int_{\Gamma^\infty} \{ \sigma^c \nabla u^\infty \} \llbracket v_h \rrbracket \, ds - \int_{\partial \Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h|_{\Omega^\infty} \, ds.
 \end{aligned}$$

Für den Term  $\ddagger$  nutzen wir erneut die multiplikative Eigenschaft des Sprungs aus Lemma 3.9. Mit dieser gilt

$$\llbracket \sigma \nabla u_h^c v_h \rrbracket = \{ \sigma \nabla u_h^c \} \llbracket v_h \rrbracket + \llbracket \sigma \nabla u_h^c \rrbracket \{ v_h \}^*.$$

Die linke Seite lässt sich mit dieser Eigenschaft also umschreiben in

$$- \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\Gamma} \{ \sigma \nabla u_h^c \} \llbracket v_h \rrbracket \, ds + \int_{\partial \Omega^\infty} \llbracket \sigma \nabla u_h^c \rrbracket \{ v_h \}^* \, ds. \quad (4.8)$$

Auf dem Rand des Patches zwischen zwei Elementen  $e \in \mathcal{T}_h(\Omega^\infty)$  und  $f \in \mathcal{T}_h(\tilde{\Omega})$  können wir die Stetigkeitsbedingung (4.3) für den Fluss  $\sigma \nabla u$  verwenden:

$$\begin{aligned}
 0 & = \llbracket \sigma \nabla u \rrbracket = \sigma \nabla u|_e \bar{n}_e + \sigma \nabla u|_f \\
 & = \sigma \nabla u_h^c|_e \bar{n}_e + \sigma \nabla u^\infty \bar{n}_e + \sigma \nabla u_h^c|_f \bar{n}_f = \llbracket \sigma \nabla u_h^c \rrbracket + \sigma \nabla u^\infty \bar{n}_e,
 \end{aligned}$$

wobei  $\bar{n}_e$  und  $\bar{n}_f$  die äußere Einheitsnormale an  $e$  und  $f$  bezeichnen. Das liefert  $\llbracket \sigma \nabla u_h^c \rrbracket = -\sigma \nabla u^\infty \bar{n}_e$ . Somit können wir diese Gleichung einsetzen in (4.8) und erhalten

$$- \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\Gamma} \{ \sigma \nabla u_h^c \} \llbracket v_h \rrbracket \, ds - \int_{\partial \Omega^\infty} \sigma \nabla u^\infty \bar{n}^\infty \{ v_h \}^* \, ds.$$

Damit hängt der letzte Term nicht mehr von  $u_h^c$  ab. Wir können diesen Term also auf die rechte Seite bringen:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\Gamma} \{ \sigma \nabla u_h^c \} \llbracket v_h \rrbracket \, ds \\
 = & \int_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h \, dx - \int_{\Gamma^\infty} \{ \sigma^c \nabla u^\infty \} \llbracket v_h \rrbracket \, ds \\
 & - \int_{\partial \Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h|_{\Omega^\infty} \, ds + \int_{\partial \Omega^\infty} \sigma \nabla u^\infty \bar{n}^\infty \{ v_h \}^* \, ds.
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Um Symmetrie zu erhalten, addieren wir noch einen Symmetrie-Term zu der linken Seite. Dafür betrachten wir für das gesamte Potential den folgenden Term:

$$\int_{\Gamma} \{\sigma \nabla v_h\} \llbracket u_h \rrbracket ds.$$

Auf Kanten innerhalb von  $\Omega^\infty$  oder  $\tilde{\Omega}$  gilt  $\llbracket u_h \rrbracket = \llbracket u_h^c \rrbracket$ , da das Singularitäts-Potential stetig ist. Auf einer Kante auf dem Rand des Patches zwischen zwei Elementen  $e \in \mathcal{T}_h(\Omega^\infty)$  und  $f \in \mathcal{T}_h(\tilde{\Omega})$  gilt

$$\llbracket u_h \rrbracket = u_h|_e \vec{n}_e + u_h|_f \vec{n}_f = u_h^c|_e \vec{n}_e + u^\infty \vec{n}_e + u_h^c|_f \vec{n}_f = \llbracket u_h^c \rrbracket + u^\infty \vec{n}_e. \quad (4.10)$$

Damit wird der Symmetrie-Term zu einem Symmetrie-Term für das Korrektur-Potential

$$\int_{\Gamma} \{\sigma \nabla v_h\} \llbracket u_h \rrbracket ds = \int_{\Gamma} \{\sigma \nabla v_h\} \llbracket u_h^c \rrbracket ds + \int_{\partial\Omega^\infty} u^\infty \{\sigma \nabla v_h|_{\Omega^\infty}\} \vec{n}^\infty ds. \quad (4.11)$$

Darüber hinaus müssen wir noch den für die „discontinuous Galerkin“ Methode notwendigen Strafterm addieren. Dieser lautet zunächst

$$J(u_h, v_h) = -\eta \int_{\Gamma} \frac{\hat{\sigma}}{h} \llbracket u_h \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket ds. \quad (4.12)$$

Im Strafterm setzen wir für den Sprung auf  $\partial\Omega^\infty$  (4.10) ein und erhalten

$$J(u_h, v_h) = -\eta \int_{\Gamma} \frac{\hat{\sigma}}{h} \llbracket u_h \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket ds \quad (4.13)$$

$$= -\eta \int_{\Gamma} \frac{\hat{\sigma}}{h} \llbracket u_h^c \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket ds - \eta \int_{\partial\Omega^\infty} \frac{\hat{\sigma}}{h} u^\infty \llbracket v_h \rrbracket \vec{n}^\infty ds. \quad (4.14)$$

Damit erhalten wir für die linke Seite, indem wir den Symmetrie-Term (4.11) und den Strafterm (4.14) addieren

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\Gamma} \{\sigma \nabla u_h^c\} \llbracket v_h \rrbracket ds \\ & + \int_{\Gamma} \{\sigma \nabla v_h\} \llbracket u_h^c \rrbracket ds + \int_{\partial\Omega^\infty} u^\infty \{\sigma \nabla v_h|_{\Omega^\infty}\} \vec{n}^\infty ds \\ & - \eta \int_{\Gamma} \frac{\hat{\sigma}}{h} \llbracket u_h^c \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket ds - \eta \int_{\partial\Omega^\infty} \frac{\hat{\sigma}}{h} u^\infty \llbracket v_h \rrbracket \vec{n}^\infty ds. \end{aligned}$$

Bringen wir nun noch alle Terme, die nicht von  $u_h^c$  abhängen auf die rechte Seite, so liefert dies

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\Gamma} \{ \sigma \nabla u_h^c \} \llbracket v_h \rrbracket + \{ \sigma \nabla v_h \} \llbracket u_h^c \rrbracket \, ds + \eta \int_{\Gamma} \frac{\hat{\sigma}}{h} \llbracket u_h^c \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket \, ds = \\
 & \int_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h \, dx - \int_{\Gamma^\infty} \{ \sigma^c \nabla u^\infty \} \llbracket v_h \rrbracket \, ds - \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h|_{\Omega^\infty} \, ds \\
 & + \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma \nabla u^\infty \bar{n}^\infty \{ v_h \}^* \, ds - \int_{\partial\Omega^\infty} u^\infty \{ \sigma \nabla v_h \} \bar{n}^\infty \, ds + \eta \int_{\partial\Omega^\infty} \frac{\hat{\sigma}}{h} u^\infty \llbracket v_h \rrbracket \bar{n}^\infty \, ds,
 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 a(u_h^c, v_h) + J(u_h^c, v_h) &= \\
 & \int_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h \, dx - \int_{\Gamma^\infty} \{ \sigma^c \nabla u^\infty \} \llbracket v_h \rrbracket \, ds - \underbrace{\int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h|_{\Omega^\infty} \, ds}_{\dagger^1} \\
 & + \underbrace{\int_{\partial\Omega^\infty} \sigma \nabla u^\infty \bar{n}^\infty \{ v_h \}^* \, ds}_{\dagger^2} - \int_{\partial\Omega^\infty} u^\infty \{ \sigma \nabla v_h \} \bar{n}^\infty \, ds + \eta \int_{\partial\Omega^\infty} \frac{\hat{\sigma}}{h} u^\infty \llbracket v_h \rrbracket \bar{n}^\infty \, ds.
 \end{aligned}$$

Für die Terme  $\dagger^1$  und  $\dagger^2$  verwenden wir  $\sigma^c = \sigma - \sigma^\infty$  und  $(v_h|_{\Omega^\infty} - \{v_h\}^*) \bar{n}^\infty = \omega^\infty \llbracket v_h \rrbracket$ , wobei  $\omega^\infty$  das durchschnittliche Gewicht auf  $\Omega^\infty$  beschreibt.

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h|_{\Omega^\infty} \, ds + \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma \nabla u^\infty \bar{n}^\infty \{ v_h \}^* \, ds \\
 & = \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^\infty \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h|_{\Omega^\infty} \, ds - \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h|_{\Omega^\infty} \, ds + \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma \nabla u^\infty \bar{n}^\infty \{ v_h \}^* \, ds \\
 & = \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^\infty \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h|_{\Omega^\infty} \, ds - \int_{\partial\Omega^\infty} (v_h|_{\Omega^\infty} - \{v_h\}^*) \bar{n}^\infty \sigma \nabla u^\infty \, ds \\
 & = \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^\infty \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h|_{\Omega^\infty} \, ds - \int_{\partial\Omega^\infty} \omega^\infty \sigma \nabla u^\infty \llbracket v_h \rrbracket \, ds.
 \end{aligned}$$

Damit können wir jetzt die schwache Formulierung für den lokalisierten Subtraktions-Ansatz aufstellen:

**Definition 4.2** (Lokalisierter Subtraktions-Ansatz). Der lokalisierte Subtraktions-Ansatz für eine „discontinuous Galerkin“ Formulierung ist gegeben durch:

Finde  $u_h^c \in V_h$  so dass

$$a(u_h^c, v_h) + J(u_h^c, v_h) = \quad (4.15)$$

$$\int_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \nabla v_h \, dx - \int_{\Gamma^\infty} \{\sigma^c \nabla u^\infty\} \llbracket v_h \rrbracket ds + \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^\infty \nabla u^\infty \bar{n}^\infty v_h |_{\Omega^\infty} ds \quad (4.16)$$

$$- \int_{\partial\Omega^\infty} \omega^\infty \sigma \nabla u^\infty \llbracket v_h \rrbracket ds - \int_{\partial\Omega^\infty} u^\infty \left( \{\sigma \nabla v_h\} - \eta \frac{\hat{\sigma}}{h} \right) \bar{n}^\infty ds \quad (4.17)$$

gilt, für alle  $v_h \in V_h$ .

Hierbei ist

$$a(u_h^c, v_h) = - \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx + \int_{\Gamma} \{\sigma \nabla u_h^c\} \llbracket v_h \rrbracket + \{\sigma \nabla v_h\} \llbracket u_h^c \rrbracket ds \quad (4.18)$$

$$J(u_h^c, v_h) = -\eta \int_{\Gamma} \frac{\hat{\sigma}}{h} \llbracket u_h^c \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket ds. \quad (4.19)$$

Dabei fällt auf, dass die Bilinearform aus (4.18) für den lokalisierten Subtraktions-Ansatz die gleiche ist wie für den „discontinuous Galerkin“ Ansatz für den Subtraktions-Ansatz aus Abschnitt 3.2. Das bedeutet insbesondere, dass die Transfermatrizen mit einer neuen rechten Seite verwendet werden können. Betrachten wir (4.16) so fällt auf, dass diese der rechten Seite des Subtraktions-Ansatzes aus dem vorherigen Abschnitt entsprechen, falls wir  $\Omega^\infty$  durch  $\Omega$ ,  $\Gamma^\infty$  durch  $\Gamma$  und  $\bar{n}^\infty$  durch  $\bar{n}$  ersetzen. Der entscheidende Unterschied zum Subtraktions-Ansatz liegt in den letzten beiden Termen in (4.17). Diese Terme sollen in gewisser Weise eine Stetigkeit von  $u_h = u_h^c + \chi_{\Omega^\infty} u^\infty$  auf  $\partial\Omega^\infty$  liefern.

## 4.2. Konforme Formulierung

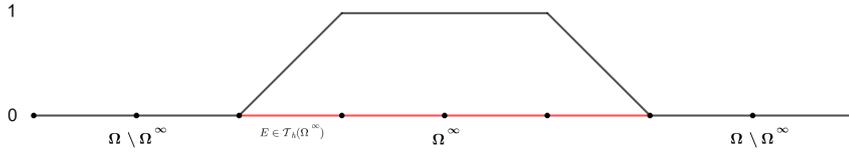
Nachdem wir eine DG-Formulierung hergeleitet haben, können wir uns nun einem konformen Ansatz widmen. Es stellt sich die Frage, ob wir auch den konformen Subtraktions-Ansatz aus Abschnitt 3.1 verbessern können, indem wir das Integrationsgebiet auf der rechten Seite verkleinern. Zu Beginn von Abschnitt 4.1 haben wir allerdings festgestellt, dass aufgrund der Verwendung der (unstetigen) Indikatorfunktion konforme Methoden nicht anwendbar sind. Deshalb wollen wir diese Indikatorfunktion durch eine „stetige Indikatorfunktion“ ersetzen.

**Definition 4.3.** Sei  $\Omega^\infty \subset \Omega$  und  $\mathcal{T}_h(\Omega^\infty)$  eine Triangulierung von  $\Omega^\infty$ . Dann definieren wir eine Funktion  $\tilde{\chi}_{\Omega^\infty}$ , indem wir die Funktion an den Knoten im Inneren von  $\Omega^\infty$  auf 1 und auf den äußeren Knoten auf dem Rand von  $\Omega^\infty$  auf 0 setzen (vgl. Abbildung 4.3).

Damit lässt sich das Potential nun aufteilen in

$$u = u^c + \tilde{\chi}_{\Omega^\infty}, \quad (4.20)$$

wobei  $u^\infty$  nach wie vor die Lösung von  $\nabla \cdot (\sigma^\infty \nabla u^\infty) = \nabla \cdot j^p$  ist. Dabei ist  $u^\infty$  eine stetige Funktion. Da  $\tilde{\chi}_{\Omega^\infty}$  ebenfalls stetig ist, gilt dies auch für  $\tilde{\chi}_{\Omega^\infty}$ . Wegen der Stetigkeit des


 Abbildung 4.3.: Schematische Darstellung der „stetigen Indikatorfunktion“  $\tilde{\chi}$ .

gesamten Potentials ist also auch das Korrektur-Potential stetig und wir können konforme Methoden anwenden.

Die partielle Differentialgleichung für das EEG-Vorwärts-Problem ist weiterhin gegeben durch

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) &= f && \text{in } \Omega \\ \sigma \partial_n u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Für die Herleitung einer schwachen Formulierung multiplizieren wir die partielle Differentialgleichung mit einer Testfunktion  $v \in H^1(\Omega)$  und integrieren. Damit erhalten wir für die linke Seite

$$\begin{aligned} LHS &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) v \, dx \\ &\stackrel{P.I.}{=} \underbrace{\int_{\partial\Omega} \sigma \partial_n u v \, ds}_{=0} - \int_{\Omega} \sigma \nabla u \nabla v \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \sigma \nabla u^c \nabla v \, dx - \int_{\Omega} \sigma^c \nabla(\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} u^\infty) \nabla v \, dx - \int_{\Omega} \sigma^\infty \nabla(\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} u^\infty) \nabla v \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \sigma \nabla u^c \nabla v \, dx - \int_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla(\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} u^\infty) \nabla v \, dx - \int_{\Omega^\infty} \sigma^\infty \nabla(\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} u^\infty) \nabla v \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \sigma \nabla u^c \nabla v \, dx - \int_{\Omega^\infty} \left[ \underbrace{\sigma^c \nabla(\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} u^\infty)}_{\dagger^1} + \underbrace{\sigma^\infty \nabla(\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} u^\infty)}_{\dagger^2} \right] \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

Da wir die Terme  $\dagger^1$  und  $\dagger^2$  bei der Implementierung nicht auswerten können, verwenden wir die Produktregel, um den Gradienten  $\nabla(\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} u^\infty)$  zu berechnen.

$$\begin{aligned} \dagger^1 &= \sigma^c \nabla(\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} u^\infty) = \sigma^c u^\infty \nabla \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} + \sigma^c \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \nabla u^\infty \\ \dagger^2 &= \sigma^\infty \nabla(\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} u^\infty) = \sigma^\infty u^\infty \nabla \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} + \sigma^\infty \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \nabla u^\infty. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die linke Seite ein, so erhalten wir

$$- \int_{\Omega} \sigma \nabla u^c \nabla v \, dx - \int_{\Omega^\infty} \left[ \sigma^c u^\infty \nabla \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} + \sigma^c \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \nabla u^\infty + \sigma^\infty u^\infty \nabla \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} + \sigma^\infty \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \nabla u^\infty \right] \nabla v \, dx.$$

Für die rechte Seite gilt gleichzeitig

$$\begin{aligned} RHS &= \int_{\Omega} f v \, dx \\ &= \int_{\Omega^\infty} \nabla \cdot (\sigma^\infty \nabla u^\infty) v \, dx \\ &\stackrel{P.I.}{=} \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^\infty \partial_n u^\infty \, ds - \int_{\Omega^\infty} \sigma^\infty \nabla u^\infty \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

Bringen wir nun den zweiten Term der linken Seite auf die rechte Seite. Dann gilt

$$\begin{aligned} RHS &= \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^\infty \partial_n u^\infty \, ds - \int_{\Omega^\infty} \sigma^\infty \nabla u^\infty \nabla v \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega^\infty} \left[ \sigma^c u^\infty \nabla \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} + \sigma^c \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \nabla u^\infty + \sigma^\infty u^\infty \nabla \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} + \sigma^\infty \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \nabla u^\infty \right] \nabla v \, dx \\ &\stackrel{\sigma = \sigma^c + \sigma^\infty}{=} \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^\infty \partial_n u^\infty \, ds + \int_{\Omega^\infty} \left[ \sigma u^\infty \nabla \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} + \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \right] \nabla v \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega^\infty} \left[ \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \sigma^\infty \nabla u^\infty - \sigma^\infty \nabla u^\infty \right] \nabla v \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^\infty \partial_n u^\infty \, ds + \int_{\Omega^\infty} \left[ \sigma u^\infty \nabla \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} + \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty \right] \nabla v \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega^\infty} \left[ \sigma^\infty (\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} - 1) \nabla u^\infty \right] \nabla v \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^\infty \partial_n u^\infty \, ds + \int_{\Omega^\infty} \left[ \sigma u^\infty \nabla \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} + \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty + \sigma^\infty (\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} - 1) \nabla u^\infty \right] \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

Problematisch wird die rechte Seite allerdings in dem Element  $E \in \mathcal{T}_h(\Omega^\infty)$ , in dem sich der Dipol befindet. Daher betrachten wir dieses Element einmal gesondert. In diesem Element gilt aber  $\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \equiv 1$  und damit  $\nabla \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} = 0$ , sowie  $\sigma^c = 0$ . Für die rechte Seite gilt also im Dipol-Element  $E$

$$\int_E \left[ \underbrace{\sigma u^\infty \nabla \tilde{\chi}_{\Omega^\infty}}_{=0} + \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \underbrace{\sigma^c \nabla u^\infty}_{=0} + \sigma^\infty \underbrace{(\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} - 1) \nabla u^\infty}_{=0} \right] \nabla v \, dx = 0.$$

Die rechte Seite hebt sich also im Dipol-Element zu 0 auf. Wir müssen dieses Element also nicht gesondert betrachten. Damit können wir nun die schwache Formulierung aufstellen.

**Definition 4.4** (schwache Formulierung). Die schwache Formulierung für einen konformen lokalisierten Subtraktions-Ansatz ist gegeben durch: Finde  $u_h^c \in H^1(\Omega)$ , so dass

$$a(u_h^c, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in H^1(\Omega)$$

gilt, wobei

$$a(u_h^c, v_h) = - \int_{\Omega} \sigma \nabla u_h^c \nabla v_h \, dx \quad (4.21)$$

und

$$l(v_h) = \int_{\Omega^\infty} \left[ \sigma u^\infty \nabla \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} + \tilde{\chi}_{\Omega^\infty} \sigma^c \nabla u^\infty + \sigma^\infty (\tilde{\chi}_{\Omega^\infty} - 1) \nabla u^\infty \right] \nabla v \, dx \quad (4.22a)$$

$$+ \int_{\partial\Omega^\infty} \sigma^\infty \partial_n u^\infty \, ds \quad (4.22b)$$

sind.

Dabei bemerken wir, dass die Bilinearform in (4.21) die gleiche ist wie für den Subtraktions-Ansatz aus Abschnitt 3.1. Bei der Implementierung muss also wieder lediglich die rechte Seite angepasst werden. Ersetzen wir bei der Linearform in (4.22)  $\Omega^\infty$  durch  $\Omega$ , so erhalten wir die rechte Seite des Subtraktions-Ansatzes unter der Voraussetzung, dass  $\tilde{\chi} \equiv 1$ .



## 5. Auswertung

In diesem Kapitel werden wir den konformen lokalisierten Subtraktionsansatz aus Abschnitt 4.2 mit dem konformen Subtraktionsansatz aus Abschnitt 3.1 vergleichen. Darüber hinaus werden wir untersuchen, welche Auswirkung die Größe des Patches  $\Omega^\infty$  auf den lokalisierten Subtraktionsansatz hat. Ebenfalls einen Einfluss auf die Genauigkeit des Verfahrens hat die Wahl der Quadraturordnung. In (Nüßing, 2018) wurde die Auswirkung der Wahl der Quadraturordnung auf den DG-FEM lokalisierten Subtraktionsansatz untersucht. Dabei lieferte eine Quadratur der Ordnung 5 die besten Ergebnisse. Daher werden wir bei unseren Tests auch eine Quadratur der Ordnung 5 wählen.

### 5.1. Kugelschalenmodell

Um die beiden Methoden vergleichen zu können, verwenden wir ein Kugelschalenmodell und unterteilen dieses in vier Bereiche: Kopfhaut, Schädel, Cerebrospinalflüssigkeit (CSF) und Gehirn. Dabei sind die folgenden Radien und Leitfähigkeiten gegeben.

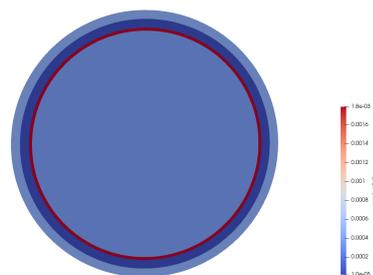


Abbildung 5.1.: Querschnitt durch das Kugelschalenmodell mit den entsprechenden Leitfähigkeiten.

Bereich	äußerer Radius	Leitfähigkeit
Kopfhaut	92 mm	0.43 S/m
Schädel	86 mm	0.01 S/m
CSF	80 mm	1.79 S/m
Gehirn	78 mm	0.33 S/m

Dargestellt wird dieses Modell (als Querschnitt) in Abbildung 5.1. Als Gitter für dieses Modell verwenden wir ein Tetraeder-Gitter. Insbesondere ist es in diesem Modell möglich, die analytische Lösung zu berechnen. Wir können also bei der Bewertung der Methoden auf die analytische Lösung zurückgreifen.

## 5.2. Dipole

Die Genauigkeit der numerischen Lösung hängt darüber hinaus von der Position der Dipole und deren Orientierung ab. Wir testen unsere Verfahren für 10 verschiedene Exzentrizitäten mit je 1000 Dipolen. Dabei betrachten wir sowohl radiale als auch tangentielle Dipole. Damit können wir die Genauigkeit der Verfahren für die einzelnen Exzentrizitäten untersuchen. Wir verwenden Dipole zu folgenden Exzentrizitäten:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.3	0.6	0.771	0.869	0.925	0.957	0.976	0.986	0.992	0.995

## 5.3. Fehlermaße

Da wir in unserem Kugelschalenmodell die analytische Lösung berechnen können, wählen wir diese als Grundlage für die Fehlermaße. Wie in der Arbeit von (Nüßing, 2018) definieren wir also den *relative difference measure* (RDM)

$$RDM(u_{num}, u_{ana}) := 50 \left\| \frac{u_{num}}{\|u_{num}\|_2} - \frac{u_{ana}}{\|u_{ana}\|_2} \right\|_2 \% \quad (5.1)$$

und den *magnitude error* (MAG)

$$MAG(u_{num}, u_{ana}) := 100 \left( \frac{\|u_{num}\|_2}{\|u_{ana}\|_2} - 1 \right) \%. \quad (5.2)$$

Hierbei bezeichnen  $u_{num}$  und  $u_{ana}$  die Potentialwerte der numerischen und der analytischen Lösung an den Elektroden. Der RDM misst dabei den Fehler in Bezug auf die Topologie. Aufgrund der Definition kann der RDM Werte zwischen 0% und 100% annehmen. Optimal ist dabei ein Wert von 0 %. Der MAG hingegen misst die relative Differenz zwischen der numerischen und der analytischen Lösung. Von unten beschränkt ist der MAG durch -100%, nach oben ist er allerdings unbeschränkt. Auch hier ist der optimale Wert 0 %.

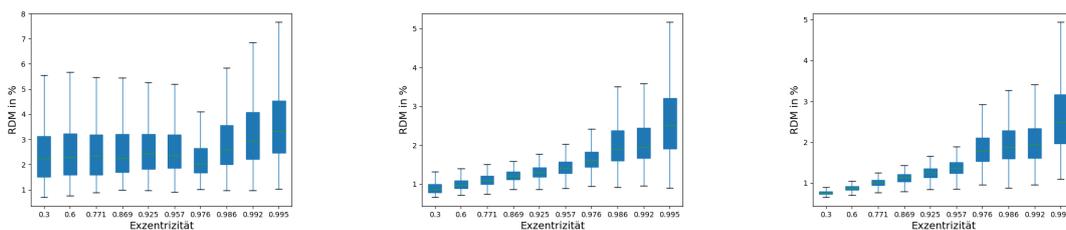
## 5.4. Ergebnisse

Mit den Fehlermaßen und den gegebenen Dipolen können wir nun die Ergebnisse vergleichen. Dabei befassen wir uns zum einen mit der Auswirkung der Größe des Patches auf das Verfahren und zum anderen vergleichen wir den lokalisierten Subtraktionsansatz mit dem Subtraktionsansatz. Für das Vergleichen mithilfe der Fehlermaße bieten sich Boxplots an. Dabei wurden für jeden Test Boxplots für den RDM und MAG erstellt. Abgebildet wird hier jedoch nur ein Teil der Plots. Alle berechneten Plots befinden sich im Anhang A.

### 5.4.1. Größe des Patches

Der konforme lokalisierte Subtraktionsansatz lässt etwas Spielraum bei der Wahl von  $\Omega^\infty$ . Daher haben wir in einigen Tests die Auswirkung der Größe des Patches auf das Verfahren untersucht. Das kleinste Patch enthält hierbei das Dipol-Element und alle über eine Ecke benachbarten Elemente. Nach und nach erweitern wir das Patch um die Elemente, welche eine gemeinsame Ecke mit bereits im Patch enthaltenen Elementen besitzen. In unserem Fall führen wir zwei solche Erweiterungen des Patches aus.

Für das kleinste Patch stellen wir fest, dass wir noch große Fehler erhalten, insbesondere für den MAG. Dargestellt sind die Fehler in den Abbildungen 5.2 und 5.3. Selbst für niedrigere Exzentrizitäten erhalten wir kaum geringere Werte für den RDM und MAG als für hohe Exzentrizitäten. Erweitern wir das Patch um die Elemente, die eine Ecke mit dem Dipol-Element teilen, so erhalten wir bereits deutlich niedrigere Werte für den RDM und MAG. Führen wir eine weitere Erweiterung des Patches durch, so erhalten wir wieder bessere Ergebnisse für den RDM und MAG. Allerdings fällt die Verbesserung nicht so deutlich aus wie bei der ersten Erweiterung. Gleiches gilt auch für den relativen Fehler. Für das kleinste Patch erhalten wir noch große relative Fehler. Bereits nach der ersten Patcherweiterung sinkt der relative Fehler deutlich. Bei einer weiteren Patcherweiterung sinkt der relative Fehler weiter, allerdings nicht mehr so stark (siehe Abbildung 5.4).



(a) Ergebnisse für das kleinste Patch

(b) Ergebnisse für die erste Patcherweiterung

(c) Ergebnisse für die zweite Patcherweiterung

Abbildung 5.2.: RDM des lokalisierten Subtraktionsansatzes für die unterschiedlichen Patchgrößen für radiale Dipole. Dargestellt wird der RDM (in %) für die unterschiedlichen Exzentrizitäten.

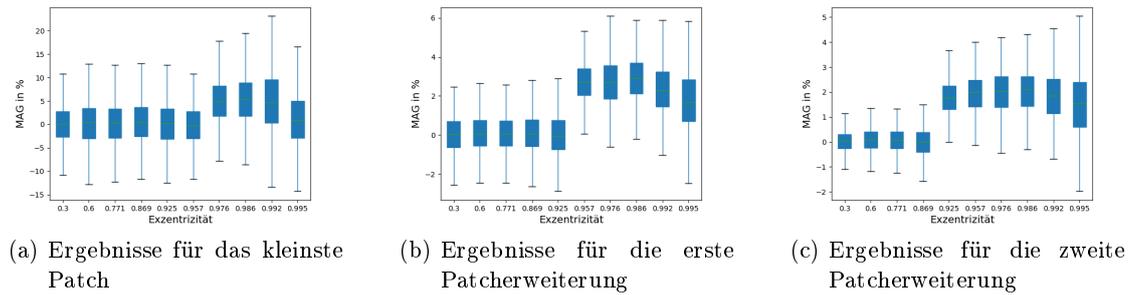


Abbildung 5.3.: MAG des lokalisierten Subtraktionsansatzes für die unterschiedlichen Patchgrößen für radiale Dipole. Dargestellt wird der MAG (in %) für die unterschiedlichen Exzentrizitäten.

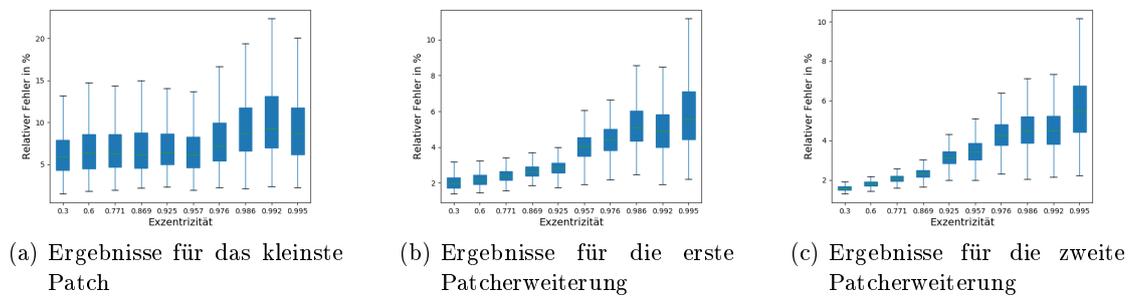


Abbildung 5.4.: Relativer Fehler des lokalisierten Subtraktionsansatzes für die unterschiedlichen Patchgrößen für radiale Dipole. Dargestellt wird der relative Fehler (in %) für die einzelnen Dipole an den unterschiedlichen Exzentrizitäten.

### 5.4.2. Vergleich zum Subtraktionsansatz

Nachdem wir festgestellt haben, dass für die erste und zweite Erweiterung des Patches die Unterschiede in der Genauigkeit relativ gering sind, können wir beide Varianten einmal mit dem lokalisierten Subtraktionsansatz vergleichen. Auffällig ist hierbei, dass alle drei Methoden ähnliche Werte für den RDM liefern (vgl. Abbildung 5.5). Insbesondere steigt der RDM für alle drei Verfahren mit zunehmender Exzentrizität. Für den lokalisierten Subtraktionsansatz ist außerdem ein Sprung in den Werten wahrnehmbar, für das kleinste Patch bei einer Exzentrizität von 0.986 und für das nächstgrößere Patch bei 0.976.

Die Werte des MAG unterscheiden sich für den Subtraktionsansatz jedoch sichtbar von denen für den lokalisierten Ansatz (vgl. Abbildung 5.6), insbesondere für niedrigere Exzentrizitäten. Für höhere Exzentrizitäten liegen die Werte nah beieinander. Das

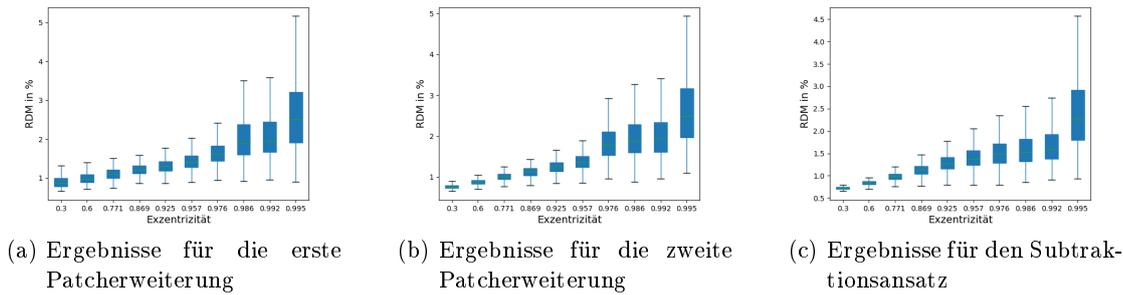


Abbildung 5.5.: RDM des lokalisierten Subtraktionsansatzes für unterschiedliche Patchgrößen im Vergleich zum Subtraktionsansatz. Betrachtet wurden radiale Dipole. Dargestellt wird der RDM (in %) für die unterschiedlichen Exzentrizitäten.

zeigt, dass der lokalisierte Subtraktionsansatz, wie in den theoretischen Überlegungen vermutet, eine gute Alternative zum Subtraktionsansatz bietet. Besonders entscheidend ist hierbei auch die Laufzeit der einzelnen Verfahren. Für unser Modell mit 1000 Dipolen zu 10 Exzentrizitäten benötigte die Lösung mit dem Subtraktionsansatz 8,3 Stunden. Der lokalisierte Subtraktionsansatz für die erste Patcherweiterung benötigte hingegen nur 20 Minuten. Für die zweite Patcherweiterung betrug die Rechenzeit 2,5 Stunden. Es ist also bemerkenswert, dass wir in einer Rechenzeit von 20 Minuten mit dem lokalisierten Subtraktionsansatz ähnliche Ergebnisse erhalten, wie nach einer Rechenzeit von 8,3 Stunden mit dem Subtraktionsansatz.

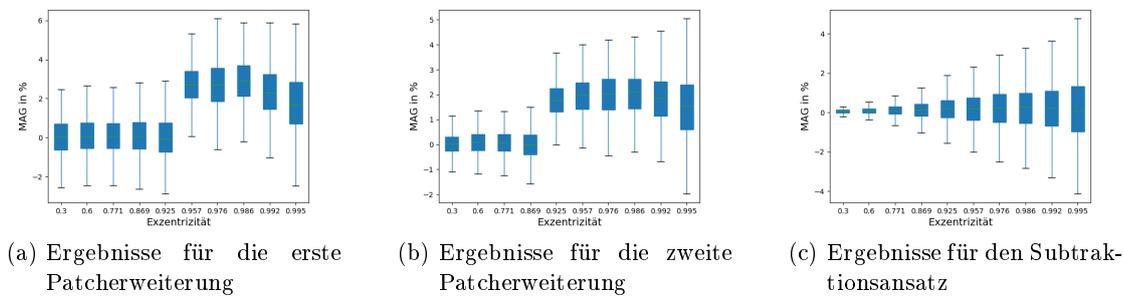


Abbildung 5.6.: MAG des lokalisierten Subtraktionsansatzes für unterschiedliche Patchgrößen im Vergleich zum Subtraktionsansatz. Betrachtet wurden radiale Dipole. Dargestellt wird der MAG (in %) für die unterschiedlichen Exzentrizitäten.



## 6. Fazit

In dieser Arbeit haben wir das EEG Vorwärts Problem untersucht. Dabei haben wir zunächst mithilfe der Maxwell-Gleichungen eine Poisson-Gleichung für das EEG Vorwärts Problem formuliert. Aufgrund der physikalischen Begebenheiten haben wir allerdings festgestellt, dass der Quellterm auf der rechten Seite dieser Poisson-Gleichung Probleme verursacht und wir diesen modellieren müssen.

Dafür haben wir einen Subtraktionsansatz eingeführt und schwache Formulierungen aufgestellt. Dabei haben wir das Potential  $u$  aufgeteilt in ein Singularitäts-Potential  $u^\infty$  und ein Korrektur-Potential  $u^c$ . Auf diese Weise konnten wir die Singularität auf der rechten Seite umgehen. Allerdings haben wir festgestellt, dass dieser Ansatz jedoch einen Nachteil mit sich bringt. Zur Bestimmung einer schwachen Lösung der partiellen Differentialgleichung muss auf der rechten Seite über das ganze Gebiet  $\Omega$  integriert werden. Das führt zu einem großen Rechenaufwand.

Daher haben wir überlegt, das Singularitäts-Potential  $u^\infty$  auf eine Teilmenge  $\Omega^\infty \subset \Omega$  einzuschränken. Auf diese Weise konnten wir mithilfe der Indikatorfunktion zunächst eine nicht-konforme Formulierung aufstellen, um anschließend mit einer „stetigen Indikatorfunktion“ eine konforme Formulierung herzuleiten. Durch das Einschränken des Singularitäts-Potentials konnten wir das Integrationsgebiet auf  $\Omega^\infty$  verringern.

Zuletzt haben wir Tests durchgeführt, um unsere theoretischen Überlegungen zu überprüfen. Dabei haben wir festgestellt, dass unser Verfahren die gewünschten Ergebnisse liefert. Der lokalisierte Subtraktionsansatz liefert also ähnliche Ergebnisse wie der Subtraktionsansatz - dies allerdings in einer deutlich kürzeren Rechenzeit. Es bietet sich also an, noch weitere Tests, insbesondere mit einem realistischen Kopfmodell, durchzuführen und weitere Ergebnisse festzuhalten.



## 7. Literaturverzeichnis

- Engwer, C., Vorwerk, J., Ludewig, J. & Wolters, C. H. (2017). A discontinuous Galerkin method to solve the EEG forward problem using the subtraction approach. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 39 (1), B138–B164.
- Evans, L. C. (2010). Partial differential equations, 2nd edition, 19. *Graduate Studies in Mathematics*, AMS.
- Hämäläinen, M., Hari, R., Ilmoniemi, R. J., Knuutila, J. & Lounasmaa, O. V. (1993). Magnetoencephalography—theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. *Reviews of modern Physics*, 65 (2), 413.
- Nüßing, A. (2018). *Fitted and Unfitted Finite Element Methods for Solving the EEG Forward Problem* (Unveröffentlichte Dissertation). Universität Münster.
- Penin, H. & Fröscher, W. (2010). Elektroenzephalographie.
- Vorwerk, J. (2016). *New finite element methods to solve the EEG/MEG forward problem* (Unveröffentlichte Dissertation). Westfälische Wilhelms-Universität Münster.
- Wagner, S. (2011). An adjoint FEM approach for the EEG forward problem. University of Muenster.
- Wolters, C. H., Köstler, H., Möller, C., Härdtlein, J., Grasedyck, L. & Hackbusch, W. (2007). Numerical mathematics of the subtraction method for the modeling of a current dipole in eeg source reconstruction using finite element head models. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30 (1), 24–45.



# Anhang A.

## Boxplots

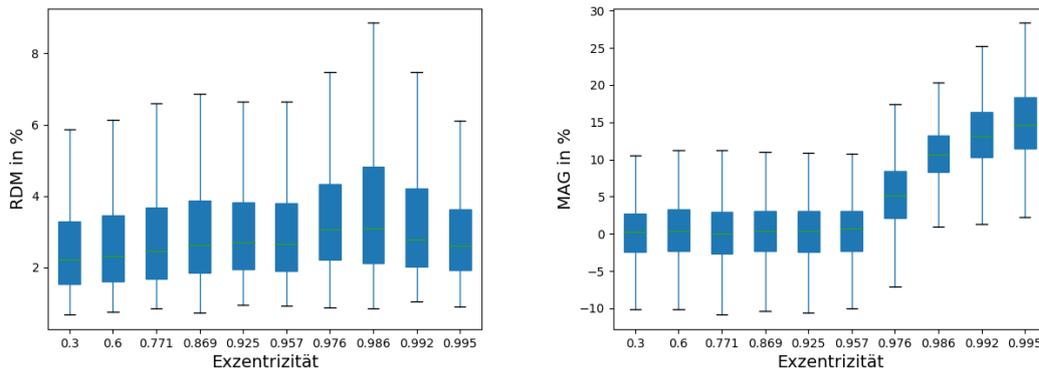


Abbildung A.1.: RDM und MAG für das kleinste Patch für tangentielle Dipole.

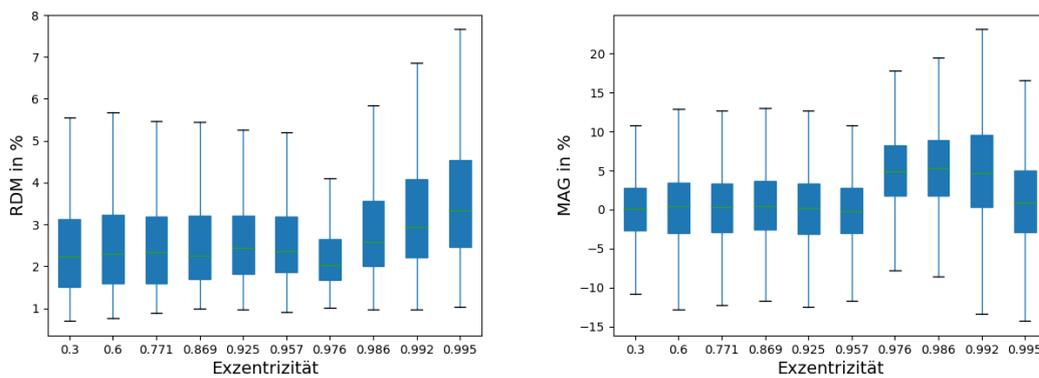


Abbildung A.2.: RDM und MAG für das kleinste Patch für radiale Dipole.

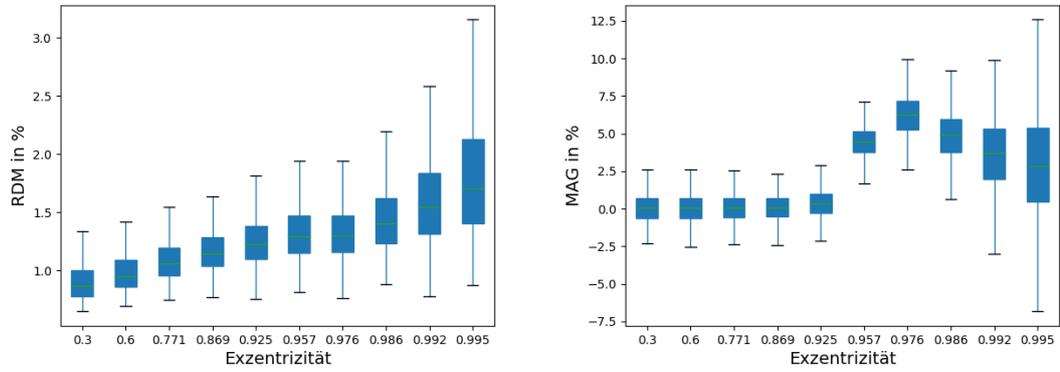


Abbildung A.3.: RDM und MAG für die erste Patcherweiterung für tangentielle Dipole.

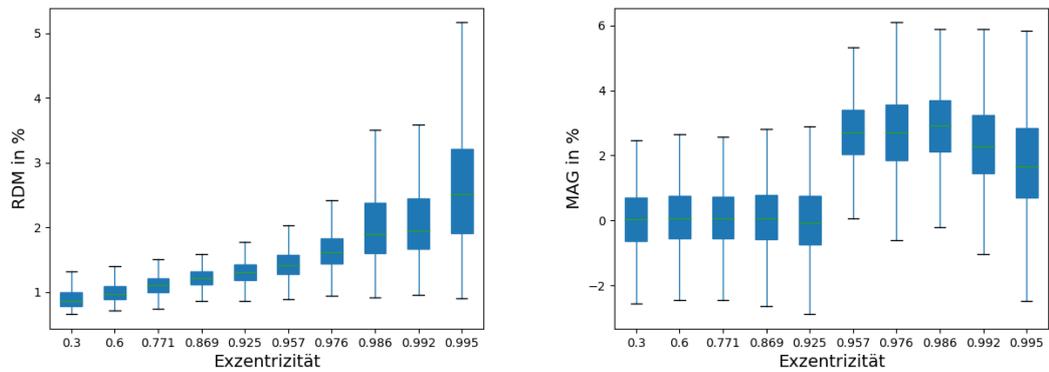


Abbildung A.4.: RDM und MAG für die erste Patcherweiterung für radiale Dipole.

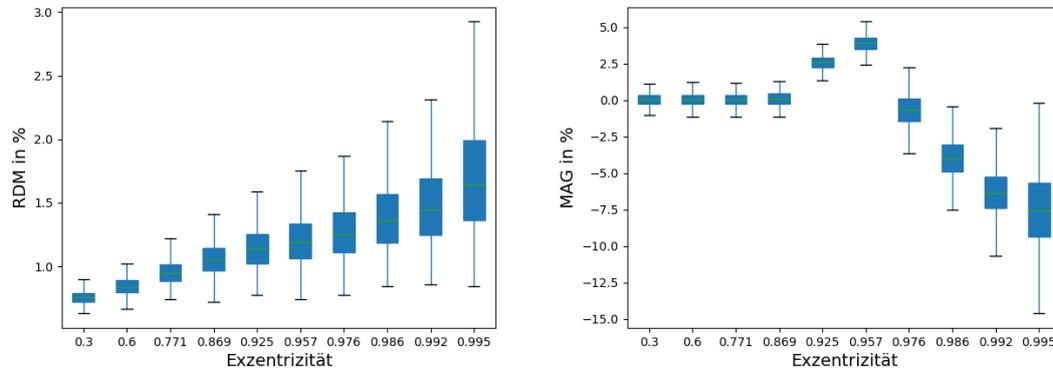


Abbildung A.5.: RDM und MAG für die zweite Patcherweiterung für tangentielle Dipole.

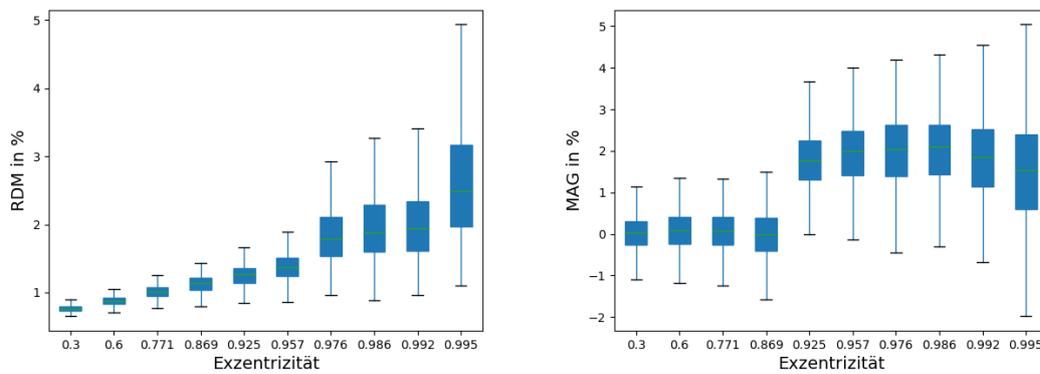


Abbildung A.6.: RDM und MAG für die zweite Patcherweiterung für radiale Dipole.

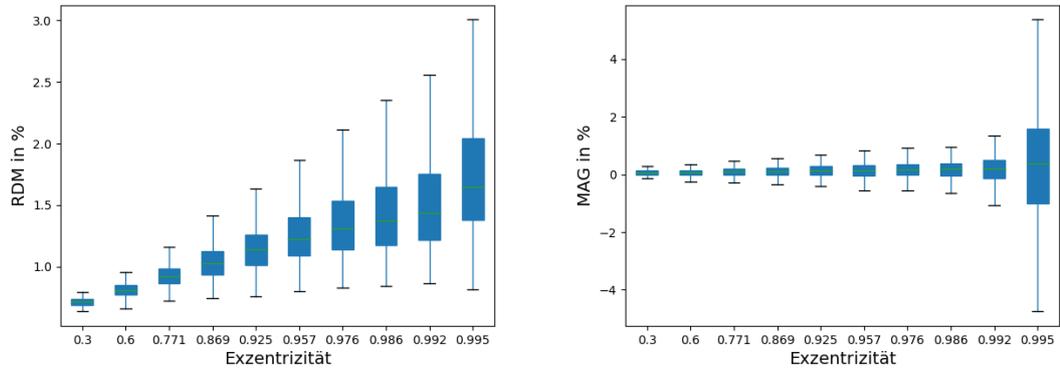


Abbildung A.7.: RDM und MAG für den Subtraktionsansatz für tangentielle Dipole.

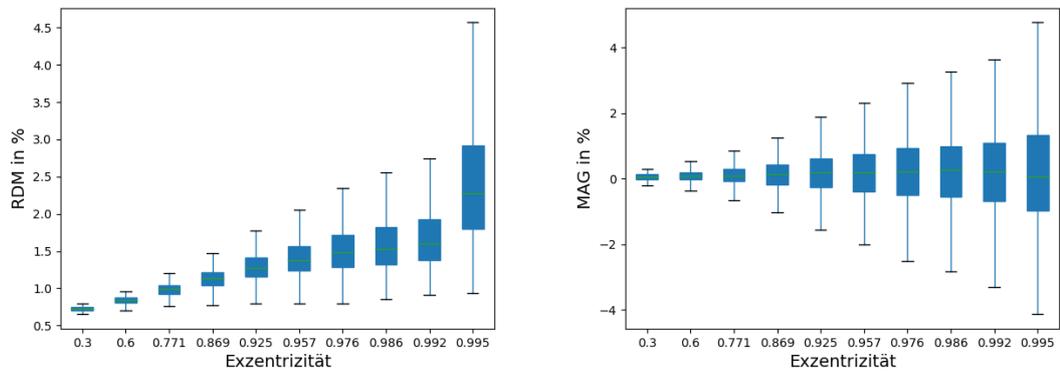


Abbildung A.8.: RDM und MAG für den Subtraktionsansatz für radiale Dipole.

# Anhang B.

## Python Code

Compute the EEG Transfer Matrix

```
1 # We compute the EEG transfer matrix
2
3 import duneurophy as dp
4 import numpy as np
5 import time
6
7 # build the driver
8
9 config = {
10     'type' : 'fitted',
11     'solver_type' : 'cg',
12     'element_type' : 'tetrahedron',
13     'solver' : {
14         'dg_smoother_type' : 'ssor',
15         'edge_norm_type' : 'houston',
16         'intorderadd' : '0',
17         'penalty' : '20',
18         'preconditioner_type' : 'amg',
19         'reduction' : '1e-15',
20         'scheme' : 'sipg',
21         'solver_type' : 'cg',
22         'weights' : 'true'
23     },
24     'volume_conductor' : {
25         'grid.filename' : 'mesh_for_alex/test_sphere_tet_786k.msh',
26         'tensors.filename' : 'test_sphere_tet.cond'
27     }
28 }
29
30 driver = dp.MEEGDriver3d(config)
31
32 # write out the mesh in vtk format
33
34 driver.write({
35     'format' : 'vtk',
36     'filename' : 'mesh_test_tet_786k'
37 })
```

```
38
39 # load, write out and project the electrodes
40
41 electrodes = np.genfromtxt("mesh_for_alex/eeg200_uniform_rad92.txt",
42                           delimiter = None)
43 electrodes = [dp.FieldVector3D(t) for t in electrodes.tolist()]
44
45 driver.setElectrodes(electrodes, {
46     'type' : 'closest_subentity_center',
47     'codims' : 3
48 })
49
50 pvtk = dp.PointVTKWriter3d(electrodes, True)
51 pvtk.write('electrodes')
52
53 # compute the transfer matrix
54
55 configTM = {
56     'solver' : {
57         'reduction' : 1e-15
58     }
59 }
60
61 tm = driver.computeEEGTransferMatrix(configTM)
62 tm_eeg = np.array(tm[0])
63
64 # save the transfer matrix
65
66 filename = "transfer_matrix_cg_eeg.npy"
67 np.save(filename, tm_eeg)
```

---

## Solve with Transfer Matrix

```
1 import numpy as np
2 import simbiopy as sp
3 import duneuro.py as dp
4 import time
5
6
7 # build the driver
8 config = {
9     'type' : 'fitted',
10    'solver_type' : 'cg',
11    'element_type' : 'tetrahedron',
12    'solver' : {
13        'dg_smoother_type' : 'ssor',
14        'edge_norm_type' : 'houston',
15        'intorderadd' : '0',
16        'penalty' : '20',
17        'preconditioner_type' : 'amg',
18        'reduction' : '1e-15',
19        'scheme' : 'sipg',
20        'solver_type' : 'cg',
21        'weights' : 'true'
22    },
23    'volume_conductor' : {
24        'grid.filename' : 'mesh_for_alex/test_sphere_tet_786k.msh',
25        'tensors.filename' : 'test_sphere_tet.cond'
26    }
27 }
28 driver = dp.MEEGDriver3d(config)
29
30
31 electrodes = np.genfromtxt("mesh_for_alex/eeg200_uniform_rad92.txt",
32                           delimiter=None)
33 electrodes = [dp.FieldVector3D(t) for t in electrodes.tolist()]
34
35 driver.setElectrodes(electrodes, {
36     'type' : 'closest_subentity_center',
37     'codims' : 3
38 })
39
40 pvtk = dp.PointVTKWriter3d(electrodes, True)
41 pvtk.write('electrodes')
42
43
44
45
46 tm_eeg = np.load('transfer_matrix_cg_eeg.npy')
47
48
```

```
49 start = time.time()
50 dipoles = np.genfromtxt("mesh_for_alex/dipoles_ecc_1000x10_rad.txt",
51                        delimiter=None)
52
53 dipPos = list()
54 dipMom = list()
55 for i in range(len(dipoles)):
56     dipPos.append(dp.FieldVector3D(dipoles[i][:3].tolist()))
57     dipMom.append(dp.FieldVector3D(dipoles[i][3:].tolist()))
58
59 dipoles = [dp.Dipole3d(p,m) for p,m in zip(dipPos, dipMom)]
60
61 pvtk = dp.PointVTKWriter3d(dipPos, True)
62 pvtk.addVectorData('mom', dipMom)
63 pvtk.write('dipoles')
64
65
66
67
68 # configSolver for patch size (['vertex','vertex'...])
69 configSolver = {
70     'source_model' : {
71         'type' : 'subtraction',
72         'intorderadd_lb' : '3',
73         'intorderadd' : '5',
74     },
75     'solver.redu3ction' : 1e-15,
76     'post_process' : True,
77     'subtract_mean' : False
78 }
79
80
81 solution_eeg = list()
82 eeg = driver.applyEEGTransfer(tm_eeg, dipoles, configSolver)
83 solution_eeg = np.array(eeg[0])
84
85 # subtract mean for numerical solution
86 solution_eeg = np.array(solution_eeg).T
87 solution_eeg -= solution_eeg.mean(axis=0)
88
89 # save the solution
90 filename = "solution_rad_fullsub_eeg_newdriver.npy"
91 np.save(filename, solution_eeg)
92
93 end = time.time()
94
95 print('Time to compute the numerical solution: {}'.
96       .format(end-start))
97
```

---

```

98
99 # compute analytical solution
100
101 # read electrodes
102 electrodes = dp.read_field_vectors_3d('mesh_for_alex/eeg200_uniform_rad92.txt')
103
104 # read dipoles
105 dipoles = dp.read_dipoles_3d('mesh_for_alex/dipoles_ecc_1000x10_rad.txt')
106
107
108
109 radii = [92, 86, 80, 78]
110 center = [127, 127, 127]
111 conductivities = [0.00043, 0.00001, 0.00179, 0.00033]
112 tmpelectrodes = [np.array(x).tolist() for x in electrodes]
113 analytical = list()
114 for dip in dipoles:
115     current = sp.analytic_solution(radii, center, conductivities,
116                                 tmpelectrodes,
117                                 np.array(dip.position()).tolist(),
118                                 np.array(dip.moment()).tolist())
119     analytical.append(current)
120
121
122 # subtract mean for analytical
123 analytical = np.array(analytical).T
124 analytical -= analytical.mean(axis=0)
125
126
127
128 #compute RE, RDM and MAG
129 norm_u_num = np.linalg.norm(solution_eeg, axis = 0)
130 norm_u_ana = np.linalg.norm(analytical, axis = 0)
131 RDM = 50. * np.linalg.norm( ((1 / norm_u_num) * solution_eeg)
132                             - ((1 / norm_u_ana) * analytical) , axis = 0)
133 MAG = 100. * ( (norm_u_num / norm_u_ana) - 1)
134 re = 100. * np.linalg.norm(solution_eeg - analytical ,axis=0)
135 /np.linalg.norm(analytical ,axis=0)
136
137 # save RDM and MAG for plotting
138 filename = "RDM_rad_fullsub_newdriver.npy"
139 np.save(filename, RDM)
140
141 filename = "MAG_rad_fullsub_newdriver.npy"
142 np.save(filename, MAG)
143
144 filename = "RE_rad_fullsub_newdriver.npy"
145 np.save(filename, re)

```



## Anhang C.

### Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit mit dem Titel „**Ein lokalisierter Subtraktionsansatz für das EEG Vorwärts Problem**“ selbstständig von mir und ohne fremde Hilfe verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind. Mir ist bekannt, dass es sich bei einem Plagiat um eine Täuschung handelt, die gemäß der Prüfungsordnung sanktioniert werden kann.

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in einer Datenbank einverstanden.

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit oder Teile daraus nicht anderweitig als Prüfungsarbeit eingereicht habe.

---

(Datum, Unterschrift)