

FRIEDRICH-ALEXANDER-UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
INSTITUT FÜR INFORMATIK (MATHEMATISCHE MASCHINEN UND DATENVERARBEITUNG)

Lehrstuhl für Informatik 10 (Systemsimulation)



**Behandlung von Potentialsingularitäten der EEG/MEG-basierten
Rekonstruktion dipolarer Stromquellen in
Finite-Elemente-Volumenleitermodellen des menschlichen Kopfes**

Christian Möller

Diplomarbeit

**Behandlung von Potentialsingularitäten der EEG/MEG-basierten
Rekonstruktion dipolarer Stromquellen in
Finite-Elemente-Volumenleitermodellen des menschlichen Kopfes**

Christian Möller

Diplomarbeit

Aufgabensteller: Prof. Dr. U. Rude
Betreuer: Dipl.-Inf. H. Köstler
Dr. C. Wolters
Bearbeitungszeitraum: 15.4.2005 – 17.10.2005

Erklärung:

Ich versichere, daß ich die Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe und daß die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Erlangen, den 12. Oktober 2005

.....

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Quellrekonstruktion im menschlichen Gehirn	5
2.1	Die Maxwell Gleichungen	5
2.2	Das Vorwärtsproblem	7
2.3	Das Inverse Problem	7
2.4	Konzepte zur Lösung des Inversen Problems	8
2.4.1	Lead Field Matrix	9
2.4.2	Prinzip der Reziprozität	10
2.5	Datengewinnung	10
2.6	Leitfähigkeit	11
2.7	Modellierung der Quelle	15
2.7.1	Potentialgenerierung im Gehirn	15
2.7.2	Dipole im menschlichen Gehirn	16
2.8	Das eigentliche Problem	17
3	Diskretisierung	19
3.1	FEM im Überblick	19
3.2	FEM an einem Beispiel	20
3.3	Colsamm – <i>Fast Expression Templates</i> zur Erstellung lokaler Steifigkeitsmatrizen	25
3.4	Quellrekonstruktion mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode	27
4	Dipolmodelle	30
4.1	Blurred Dipole Model	30
4.2	Mathematical Dipole Model	32

4.3	Subtraction Dipole Model	34
5	Die Validierplattform	42
5.1	Die analytische Lösung	42
5.2	FEM-Netze zur Darstellung	44
5.2.1	Tetraeder	45
5.2.2	Hexaeder	46
5.2.3	Node Shifted Hexaeder	46
5.3	Sonstige Vorbereitungen	48
5.4	Programmausführung	48
5.4.1	NeuroFEM	49
5.4.2	De Munck	49
5.5	Visualisierung	50
5.6	Fehlermessung	51
6	Ergebnisse	53
6.1	Tetraeder Netze	54
6.1.1	Randannäherung	54
6.1.2	Knotenannäherung	60
6.1.3	Tangential vs. Radial	62
6.2	Reguläre Hexaeder Netze	66
6.2.1	Randannäherung	66
6.2.2	Knotenannäherung	70
6.2.3	Tangential vs. Radial	71
6.3	Node Shifted Hexaeder Netze	73
6.4	Vergleich verschiedener FEM-Netze	75
6.5	134 vs. 81 Elektrodenpositionen	78
6.6	Anisotropie	81
7	Zusammenfassung und Ausblick	88

Abbildungsverzeichnis

2.1	Die gesamte Stromdichte \vec{J} , aufgeteilt in Rückflussstrom \vec{E} und Stromdichte in Quellregion \vec{j}_s	6
2.2	Aufteilung des Gehirns in motorische und sensorische Bereiche aus lateraler Sicht . .	8
2.3	Konstruktion einer Lead Field Basis in 2D. Zu sehen ist die Lead Field Abbildung der Quellen (nummeriert von 1 bis 12 in x- und y-Richtung) und der Elektroden (nummeriert von 1 bis 5) auf die Matrix \mathbf{L}	9
2.4	Segmentierung der inneren Schädelschicht unter Anwendung verschiedener Techniken (oben vs. unten) [36] (Seite 55)	11
2.5	Links: Kugelförmige Approximation der Kopfgeometrie. Rechts: Realistische Approximation durch Finite Elemente	12
2.6	Anisotropie des Schädels	12
2.7	Anisotropie des White Matter	13
2.8	Isotropie und Anisotropie (aus [38]).	14
2.9	Vergleich isotrope vs. anisotrope Stromflüsse	14
2.10	Aufbau eines Neurons am Beispiel einer Pyramidenzelle	16
2.11	Die ersten Schichten des Kopfes bis hin zum Kortex. Darstellung einer Stromquelle mit Rückflussstrom	16
2.12	Schematische Darstellung eines Dipols ([29], Seite 631)	17
3.1	Konforme Triangulierung eines 2D Gebietes	22
3.2	Partitionierung eines kugelförmigen Gebietes Ω in Tetraeder	22
3.3	Friedrichs-Keller-Partitionierung des Einheitsquadrates als Ω	23
3.4	Lineare Basisfunktionen in 1D mit Zoom auf ein einzelnes Element	23
3.5	Lineare Basisfunktionen in 2D in einer Friedrichs-Keller-Triangulierung	24
3.6	Die affine Abbildung des Einheitstetraeders (Referenzelement) T^0 mit den Knoten $a_1^0 = (0, 0, 0)$, $a_2^0 = (1, 0, 0)$, $a_3^0 = (0, 1, 0)$, $a_4^0 = (0, 0, 1)$ auf einen beliebigen Tetraeder T_i mit den Knoten a_1, \dots, a_4	25
4.1	Eine Liste über alle Knoten. An jedem Knoten hängt eine Liste mit den dazugehörigen Elementen (am Beispiel Tetraeder). Die Knoten 0, 1 und 2 haben nur Element Nr. 7 gemeinsam; somit bilden sie ein Oberflächendreieck.	38
4.2	Korrekturpotential (oben links), Singularitätenpotential (oben rechts) und Ergebnispotential (unten) eines Dipols, 49 mm in y-Richtung verschoben. Tangentiale Ausrichtung in einem 2-mm-Hexaedernetz	40
4.3	Korrekturpotential (oben links), Singularitätenpotential (oben rechts) und Ergebnispotential (unten) eines Dipols, 49 mm in y-Richtung verschoben. Radiale Ausrichtung in einem 2-mm-Hexaedernetz	41

5.1	Analytisches 3-Schalen-Kugel-Modell mit den Schichten Kopfhaut, Schädel, Gehirn. Beschrieben sind radiale und tangentiale Leitfähigkeit, Radien, Elektrodenpositionen, Dipolposition und -moment	44
5.2	3-Schalen-Kugel-Modell approximiert durch ein Tetraedernetz mit den Schichten Kopfhaut, Schädel, Gehirn	45
5.3	Tetraedernetz einer Kugel, in der Mitte durchgeschnitten (links) und vergrößert (rechts)	46
5.4	Prinzip des Nodeshifting in 2D	47
5.5	Verfeinerung durch kleinere Elemente (oben) oder durch Nodeshifting (unten) . . .	47
5.6	Elektrodenkonfiguration, bestehend aus 134 gleichmäßig verteilten Elektrodenpunkten	48
5.7	Die SCIRun Oberfläche. Sie zeigt eine Netz zur Visualisierung des berechneten Potentials an der Oberfläche des Leiters. Zu sehen sind die einzelnen Module und das Viewer-Fenster mit der Ausgabe	51
6.1	RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 10 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	54
6.2	RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 10 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	55
6.3	RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 5 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	56
6.4	RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 5 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	56
6.5	RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 3 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	57
6.6	RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 3 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	57
6.7	RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 2.5 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	58
6.8	RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 2.5 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	58
6.9	RDM in verschiedenen Finite-Elemente-Tetraedernetzen. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse. Betrachtung des Subtraction Dipole Models	59
6.10	RDM in verschiedenen Finite-Elemente-Tetraedernetzen. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse. Betrachtung des Blurred Dipole Models	60
6.11	RDM in verschiedenen Finite-Elemente-Tetraedernetzen. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse. Betrachtung des Mathematical Dipole Models	60
6.12	RDM im Vergleich zu den minimalen Abständen zum nächstgelegenen FEM-Knoten des Elementes. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse. Betrachtung des Blurred (oben) und des Mathematical (unten) Dipole Models	61

6.13	RDM der drei Dipol-Modelle Blurred (oben), Mathematical (mitte) und Subtraction (unten). Es wird jeweils ein radialer mit einem tangentialen Dipol mit verschiedenen Positionen entlang der y-Achse verglichen. Das zugrunde liegende FEM-Netz ist tet3mm	62
6.14	RDM der drei Dipol-Modelle Blurred (oben), Mathematical (mitte) und Subtraction (unten). Es wird jeweils ein radialer mit einem tangentialen Dipol mit verschiedenen Positionen entlang der y-Achse verglichen. Das zugrunde liegende FEM-Netz ist tet2.5mm	63
6.15	Der tangential zeigende Dipol wandert entlang der y-Achse nach oben in Richtung Schädelknochen. Links das Potential auf der Kugeloberfläche, in der Mitte RDM der Dipol-Modelle und Rechts ein Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel. Die x-Achse der Balkendiagramme zeigt wieder die prozentuale Entfernung zum Mittelpunkt	64
6.16	Der radial zeigende Dipol wandert entlang der y-Achse nach oben in Richtung Schädelknochen. Links das Potential auf der Kugeloberfläche, in der Mitte RDM und Rechts ein Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel. Die x-Achse der Balkendiagramme zeigt wieder die prozentuale Entfernung zum Mittelpunkt	65
6.17	RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 4 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	67
6.18	RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 4 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	67
6.19	RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	68
6.20	RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 2 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	68
6.21	RDM des Blurred Dipole Models in verschiedenen Finite-Elemente-Hexaedernetzen mit Seitenlängen von 8 mm, 4mm und 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	69
6.22	RDM des Mathematical Dipole Models in verschiedenen Finite-Elemente-Hexaedernetzen mit Seitenlängen von 8 mm, 4mm und 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	69
6.23	RDM des Subtraction Dipole Models in verschiedenen Finite-Elemente-Hexaedernetzen mit Seitenlängen von 8 mm, 4mm und 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	69
6.24	RDM des Mathematical Dipole Model und parallel die Abstände des Dipols zum nächstgelegenen Knoten des Elementes. Berechnet in einem Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 4 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	70
6.25	RDM des Blurred Dipole Model und parallel die Abstände des Dipols zum nächstgelegenen Knoten des Elementes. Berechnet in einem Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 4 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	70
6.26	RDM in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 4 mm. Verglichen werden jeweils radiale mit tangentialen Quellen innerhalb der einzelnen Modelle. Blurred (oben), Mathematical (mitte) und Subtraction (unten). Die Dipole haben verschiedene Positionen entlang der y-Achse	71
6.27	RDM in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 2 mm. Verglichen werden jeweils radiale mit tangentialen Quellen innerhalb der einzelnen Modelle. Blurred (oben), Mathematical (mitte) und Subtraction (unten). Die Dipole haben verschiedene Positionen entlang der y-Achse	72

6.28 RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 4 mm Node Shifted. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	73
6.29 RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 2 mm Node Shifted. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	74
6.30 RDM und MAG des Blurred Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz im Vergleich mit einem Node Shift Hexaeder Netz bei einer Seitenlänge von 4 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse .	75
6.31 RDM und MAG des Mathematical Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz im Vergleich mit einem Node Shift Hexaeder Netz bei einer Seitenlänge von 4 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse .	76
6.32 RDM und MAG des Blurred Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz im Vergleich mit einem Node Shift Hexaeder Netz bei einer Seitenlänge von 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse .	77
6.33 RDM und MAG des Mathematical Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz im Vergleich mit einem Node Shift Hexaeder Netz bei einer Seitenlänge von 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse .	77
6.34 Eine realistische Elektrodenkappe mit 81 Elektroden bis über die Ohren verteilt (links) und eine Konfiguration aus 134 gleichmäßig verteilten Elektroden (rechts) . .	78
6.35 RDM und MAG des Blurred Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	79
6.36 RDM und MAG des Mathematical Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	79
6.37 RDM und MAG des Subtraction Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse.	80
6.38 RDM und MAG des Blurred Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Der Vergleich des isotropen Modells mit dem der anisotropen Schädelschicht. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	81
6.39 RDM und MAG des mathematical Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Der Vergleich des isotropen Modells mit dem der anisotropen Schädelschicht. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	82
6.40 RDM und MAG des Subtraction Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Der Vergleich des isotropen Modells mit dem der anisotropen Schädelschicht. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse	82
6.41 RDM und MAG des Blurred (oben), des Mathematical (mitte) und des Subtraction (unten) Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Der Vergleich des Einflusses der anisotropen Schädelschicht auf einen tangential und radial ausgerichteten Dipols. Der Dipol nimmt verschiedene Positionen entlang der y-Achse ein	83

6.42	Potential an der Kugeloberfläche. Isotroper Schädel (unten) und anisotroper Schädel (oben). Ein Dipol in tangentialer Richtung, 50 mm in y-Richtung vom Mittelpunkt entfernt	84
6.43	Potential im Inneren der Kugel. Isotroper Schädel (unten) und anisotroper Schädel (oben). Ein Dipol in tangentialer Richtung, 50 mm in y-Richtung vom Mittelpunkt entfernt	85
6.44	Potential an der Kugeloberfläche. Isotroper Schädel (unten) und anisotroper Schädel (oben). Ein Dipol in tangentialer Richtung, 50 mm in y-Richtung vom Mittelpunkt entfernt	86
6.45	Potential im Inneren der Kugel. Isotroper Schädel (unten) und anisotroper Schädel (oben). Ein Dipol in tangentialer Richtung, 50 mm in y-Richtung vom Mittelpunkt entfernt	87

Tabellenverzeichnis

2.1	Definitionen der einzelnen isotropen Leitfähigkeiten für ein 3-Schalen-Modell.	15
2.2	Definitionen der einzelnen anisotropen Leitfähigkeiten für ein 3-Schalen-Modell mit anisotroper Schädelschicht.	15
6.1	Die für diese Arbeit erstellten FEM-Netze mit Angabe der Bezeichnung, Anzahl der Knoten, Elemente, Oberflächenknoten und Oberflächenelemente	53

Symbolverzeichnis

Allgemein:

∇	Gradient
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	partielle Ableitung der Funktion f nach x_i

Abschnitt 2.1:

\vec{H}	Magnetfeld
\vec{E}	Elektrisches Feld
\vec{D}	Verschiebungsstromdichte
\vec{B}	magnetische Induktion
\vec{J}	Stromdichte
ρ	Ladungsdichte
Φ	Potential
σ	Leitfähigkeit
\vec{j}_s	Stromdichte an der Quelle
Ω	Gebiet $\omega \in \mathbb{R}^n$

Abschnitt 2.4:

$\mathbf{L}, \mathbf{s}, \Phi_s$	Lead Field Matrix, Quellen $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$
Φ_A, Φ_B	Elektrisches Potential an den Punkten A und B

Abschnitt 2.7:

$\delta(x)$	Dirac'sche δ -Funktion
$\vec{j}_s^{Feyn}, \vec{j}_s^{Math}$	Feynman und Mathematischer Dipol

Abschnitt 3.2:

Δ	Laplace Operator
$-\Delta u = f$	Poisson-Gleichung
$\Omega, \bar{\Omega}, \partial\Omega$	Gebiet $\omega \in \mathbb{R}^n$, Abschluss von Ω , Rand von Ω
v	Testfunktion
V, V_h	Funktionsraum, Ansatzraum
φ_i	Basisfunktion
u_h	Diskrete Funktion u

τ_h	Partitionierung von Ω
T_0, T_i	Referenzelement, i-tes Element im Raum
$A_h u_h = b_h$	diskretisierte Poisson-Gleichung
ψ	affine Abbildung

Abschnitt 5.1:

$\Phi(\vec{x}_0, \vec{x}_e)$	Potential am Punkt \vec{x}_e durch Dipol an \vec{x}_0
\vec{Q}	Dipol Moment
Φ_{mon}	Potential eines Monopols
∇_0	Gradient bezüglich \vec{x}_0
P_n, P'_n	Legendre'sches Polynom n-ten Grades und erste Ableitung
\vec{x}_0, \hat{x}_0	Dipolposition, Einheitsvektor in Dipolrichtung
\vec{x}_e, \hat{x}_e	Elektrodenposition, Einheitsvektor in Richtung Elektrodenposition
r_0, r_e	radiale Koordinaten der Quelle und der Elektrode
$\epsilon(r), \eta(r)$	radiale und tangential Leitfähigkeit

Abschnitt 5.6:

RDM	Relative Difference Measure
MAG	Magnitude Factor
$\Phi_i^{num}, \Phi_i^{ana}$	Numerische und analytische Lösung an der i-ten Elektrode

Zusammenfassung

Die Lösung des Inversen Problems für die Rekonstruktion elektrischer Quellen im menschlichen Gehirn ist ein wesentlicher Bestandteil in der medizinischen Forschung. Das darin eingebettete Vorwärtsproblem zur Berechnung des elektrischen Potentials, das aus einer dipolaren Quelle hervorgeht, lässt sich mathematisch in einer Partiellen Differentialgleichung formulieren. Die Lösung der Gleichung erfordert Modelle zur Behandlung der in ihr enthaltenen Singularität.

Mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode wird die Singuläre Gleichung diskretisiert. Die Daten für die verwendeten FEM-Netze, die aus einfachen Kugelmodellen bis hin zu realistischen Volumenleitermodellen des menschlichen Kopfes bestehen, werden aus der medizinischen Bildverarbeitung durch Aufnahmen aus Computer Tomographie (CT) oder Magnetresonanz (MR) gewonnen. Die benötigten Daten zur Leitfähigkeit können mittlerweile indirekt aus der Diffusions-Tensor-Magnetresonanz Bildgebung (DT-MRI) abgeleitet werden.

Die folgende Diplomarbeit stellt drei Modelle vor, die die Singularität in der DGL zum Bioelektrischen Feldproblem behandeln, und so eine Reduzierung des numerischen Fehlers erreichen. Dabei werden verschiedene Ansätze, wie die räumliche und stärkemäßige Streuung der Singularität, der Anwendung eines Spezialfalls der Zenger-Korrektur sowie das Aufteilen der Singularität, verfolgt. Letzteres ist auch in der Lage, eine Quelleinleitung in anisotrope Medien zu ermöglichen.

Die drei implementierten Modelle werden in einem 3-Schalen-Kugelmodell hinsichtlich ihrer Güte untereinander und mit der analytisch berechneten Lösung für das Kugelmodell getestet. Die Validierplattform besteht aus FEM-Netzen mit unterschiedlichen Elementtypen und unterschiedlicher Schrittweite. Es wird das Verhalten der drei Modelle für jeweils tangential und radial ausgerichtete Quellen beobachtet. Auch wird die Auswirkung von Anisotropie in der Schädelschicht der Modelle betrachtet.

CW: In Zusammenfassung: Die Lösung des Inversen Problems für die Rekonstruktion von Stromquellen im menschlichen Gehirn anhand von an der Kopfoberfläche gemessenen Potentialverteilungen ist ein wesentlicher Bestandteil in der Elektroenzephalographie-Forschung.

Kapitel 1

Einleitung

Im Laufe der letzten Jahrzehnte hielt die Simulation immer mehr Einzug in die moderne Medizin. Bisherige Paradigmen in der medizinischen Betreuung vieler Krankheiten basierten bis vor kurzem meist ausschließlich auf Diagnosen des aktuellen Patientenzustands, Erfahrungswerten und persönlichen Präferenzen des behandelnden Arztes. Immer häufiger zeigt sich jedoch, dass eine solche Vorgehensweise nicht effizient genug ist, da diese statischen Diagnosen die Komplexität und Variabilität des menschlichen Organismus nur unzureichend beschreiben können. Des Weiteren beinhalten solche Methoden bei Krankheiten wie Epilepsie zum Teil einen invasiven Eingriff in den Organismus des Patienten.

Die medizinische Simulation ist in der Lage, zusätzlichen Erkenntnisse und Daten auf dynamischer Basis liefern zu können. Mehr noch: Ihre Methoden erlauben die Anwendung virtueller Therapien, ohne den Patienten zu belasten. Nach dem virtuellen Durchlaufen aller vorgeschlagenen Behandlungen stehen dem Arzt die Ergebnisse als Entscheidungshilfe für einen optimalen realen Behandlungsplan zur Verfügung. Dieses Werkzeug liefert einen wichtigen Beitrag zur nächsten Generation der Patientenbehandlung und Diagnostizierung.

Im Bereich der Epilepsie-Forschung wird die numerische Simulation bioelektromagnetischer Felder angewandt. Die Rekonstruktion elektrischer Quellen im menschlichen Gehirn aus den Daten eines Elektroenzephalogrammes (EEG) oder eines Magnetoenzephalogrammes (MEG) bildet hier einen Schwerpunkt der Forschung. Dies dient der Lokalisierung der Regionen im Gehirn, die für einen epileptischen Anfall verantwortlich sind. Hierbei wird durch Elektroden auf der Kopfoberfläche (EEG) das elektrische Potential oder durch Messeinheiten in einem geringen Abstand von der Kopfoberfläche (MEG) der magnetische Fluss von interiktaler Aktivität, d.h., zwischen den Anfällen vom erkrankten Gewebe erzeugter Felder gemessen. Durch eine solche Anwendung können Bereiche im menschlichen Gehirn lokalisiert werden, die die auslösenden Zentren von epileptischen Anfällen darstellen können. Dies wird erreicht, indem man am Höhepunkt der interiktalen Aktivität die Stromflüsse berechnet, die zu den gemessenen EEG- bzw. MEG-Daten führen.

Die für die Simulation benötigten Geometriemodelle werden aus Daten durch computertomographische oder kernspinresonanztomographische Messungen errechnet und beispielsweise in Finite-Elemente-Volumenleitermodelle überführt.

Die Modellierung neuronal aktiver Knoten im menschlichen Gehirn geschieht in der Simulation durch das Einsetzen elektrischer Dipole in ein Volumenleitermodell, das den menschlichen Kopf repräsentiert. Anschließend wird das durch den Dipol verursachte Potential an der Oberfläche des Modells berechnet.

Ziel der Arbeit

Das Modell des Stromdipols wie auch das zugehörige elektrische Potential am Ort der Quelle birgt eine Singularität, welche eine spezielle numerische Behandlung bedarf. Den bei der diskreten Modellierung der Dipole auftretenden Problemen wird anhand verschiedener Ansätze begegnet. Diese Modelle werden in dieser Arbeit beschrieben und dann bezüglich ihrer Güte der numerischen Approximation untereinander und mit analytischen Lösungen verglichen. Dies wird für Mehr-Schalen-Kugelmodelle durchgeführt, für die es analytische Lösungen zur Berechnung des elektrischen Potentials bei Einleitung eines Dipol-Stromes gibt. Eines der Modelle bietet sogar die Möglichkeit, eine Quelle in anisotropen Medien einzuleiten. Implementiert und integriert werden die Modelle in einem Softwarepaket mit dem Namen **NeuroFEM** [22] [28], das neben verschiedenen Ansätzen zum Lösen des Vorwärtsproblems, u.a. der Methode der Finiten Elemente, auch eine inverse Toolbox für die effiziente Quellrekonstruktion bietet.

Als Hilfsmittel für das Aufstellen der lokalen und globalen Steifigkeitsmatrizen wird zusätzlich die C++ Bibliothek **Colsamm** von Herrn Jochen Härdtlein [17] eingebunden, die basierend auf Fast Expression Templates die Möglichkeit bietet, FEM-Ansätze schnell und effizient umzusetzen.

Aufbau der Arbeit

In **Kapitel 2** werden anhand der Eigenschaften von elektrischen Quellen die theoretischen Grundlagen für die Quellrekonstruktion gelegt. Durch die aus der Physik bekannten Gleichungen zur Beschreibung von elektrostatischen [Phänomenen — Eigenschaften] wird eine problembezogene Poisson-Gleichung formuliert, die auf ihrer rechten Seite die oben angesprochene Singularität enthält. Danach wird über die Beschreibung der Teilgebiete der Quellrekonstruktion auf die notwendigen Gesichtspunkte wie die Datenbeschaffung und das Betrachten des Kopfes als Leiter hingeleitet. Nach genauerer Untersuchung der Potentialgenerierung im menschlichen Gehirn wird der Übergang zum mathematisch-numerischen Teil angegangen und die eigentliche Problemstellung dieser Arbeit formuliert.

Nachdem die Grundlagen für das bioelektrische Problem gelegt sind, kann in **Kapitel 3** auf die Numerik eingegangen werden: Wie diskretisiert man die in Kapitel 1 erstellte Differentialgleichung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode. Nach einem kurzen Überblick über die Methode wird anhand eines einfachen Beispiels der Ansatz und der Ablauf verdeutlicht. Anschließend werden diese Diskretisierungsmethode direkt auf das bioelektrische Problem übertragen und so die DGL in einen diskreten Raum überführt. Des Weiteren wird näher auf die verwendete Bibliothek Colsamm eingegangen. Anhand einiger Code-Beispiele wird die Anwendung beschrieben.

An dieser Stelle sind die Voraussetzungen geschaffen, sich dem eigentlichen Problem, der Singularität, zu widmen. In **Kapitel 4** werden drei Modelle vorgestellt, die entweder in Form des *Blurred Dipole Model* oder des *mathematical dipole model* den Stromdipol als möglichst exakt approximierende Monopol-Verteilung ins System einbringt und somit den Grad der Singularität erniedrigt oder im *Subtraction Model* die Singularität vor numerischer Behandlung extrahiert. Dabei gilt das Blurred Dipole Model für diese Arbeit als gegeben und ist bereits in Form einer Fortran Routine im Programmpaket NeuroFEM integriert. Es wird deutlich, dass durch die unterschiedliche Herangehensweise der Modelle auch eine sehr unterschiedliche Reaktion auf veränderte Umgebungen wie der Beschaffenheit des FE-Netzes und der Position, Ausrichtung oder Stärke des Dipols, zu erwarten ist.

Im Anschluss an Kapitel 4 werden die beschriebenen Modelle, die im Rahmen dieser Arbeit

in das gegebene Programmpaket implementiert wurden, hinsichtlich ihrer Güte der numerischen Approximation und ihres Verhaltens auf veränderte Konfigurationen untersucht. Hierzu wird in **Kapitel 5** eine Plattform aufgebaut, mit deren Hilfe eine umfangreiche Testserie gestartet werden kann. Solche Testreihen sind nur aussagekräftig genug, wenn es eine Möglichkeit gibt, die numerische Approximation mit einer analytisch berechneten Lösung zu vergleichen. Dies ist möglich, indem man mit vereinfachten Modellen wie beispielsweise Kugelmodellen, die aus einer homogenen Schale oder aus mehreren Schalen unterschiedlicher Leitfähigkeit bestehen, arbeitet. Diese Schalen bilden dann ein vereinfachtes Modell der Schichten (z.B. Kopfhaut, Schädel, Gehirn) des menschlichen Kopfes. Es wird beschrieben, wie in solchen Modellen eine analytische Lösung entwickelt werden kann. Anschließend wird auf die noch ausstehenden Parameter eingegangen, die zur Potentialberechnung bzw. zur Ausführung eines Testlaufs mit dem Programmpaket NeuroFEM notwendig sind. Dies sind beispielsweise FEM-Netze oder Parameterdateien.

Mit der erstellten Plattform ist es möglich, die beschriebenen Dipol-Modelle zu testen. In **Kapitel 6** wird eine Reihe von Versuchen vorgestellt, die Stärken und Schwächen der implementierten Modelle aufzuzeigen. Dadurch ist man in der Lage, eine weitere Verbesserung der Implementierung oder des Ansatzes durchzuführen. Die Fragen, die sich hinsichtlich der Tests stellen, sind beispielsweise: „Wie verhält sich das getestete Modell, wenn sich die Quelle in der Nähe des Randes der Schicht befindet?“, „Was geschieht mit dem numerischen Fehler, wenn der Dipol in der Nähe eines Diskretisierungsknotens gesetzt ist?“, oder „Welche Unterschiede ergeben sich, wenn die Quelle einmal tangential und einmal radial zur betrachteten Schicht gelegt wird?“ .

Abschließend wird dann in **Kapitel 7** eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf zukünftige Aufgaben und Arbeiten gegeben.

Kapitel 2

Quellrekonstruktion im menschlichen Gehirn

Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik wurde in [23] gezeigt, dass im betrachteten niederfrequenten Bereich kapazitive, induktive und Ausbreitungseffekte vernachlässigt werden können, sodass die Rekonstruktion elektrischer Quellen im menschlichen Gehirn auf der Anwendung elektrostatischer Eigenschaften basiert.

Die Elektrostatik befasst sich mit ruhenden elektrischen Ladungen, Ladungsverteilungen und den elektrischen Feldern geladener Körper. Bei der Quellrekonstruktion wird das Potential, das durch eine Stromquelle erzeugt wird, mittels eines EEGs an der Kopfoberfläche und/oder die magnetischen Flüsse mittels eines MEGs in geringem Abstand von der Kopfoberfläche gemessen. Durch diese Informationen werden Rückschlüsse auf den Ort der Quellladung gezogen. Im Folgenden werden die für die Arbeit benötigten Grundlagen gelegt und so zur Problemstellung hingeführt.

2.1 Die Maxwell Gleichungen

Tiefere Einsichten sowie Definitionen und Herleitungen zu elektrischen Feldern finden sich in [36] und [31]. Grundlage der Arbeit mit elektrischen Feldern und Potentialen sind die in den Jahren 1861 bis 1864 entwickelten Gleichungen von James Clerk **MAXWELL**. Sie beschreiben elektromagnetische Felder und ihre zeitliche Abhängigkeit:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Die Gleichungen bestehen aus dem verallgemeinerten Durchflussgesetz, nach dem die Wirbel eines Magnetfeldes (\vec{H}) von der elektrischen Stromdichte \vec{J} und von der Verschiebungsstromdichte \vec{D} abhängen. Als nächstes gilt das Induktionsgesetz, in dem jede Änderung der magnetischen Induktion \vec{B} zu einem elektrischen Gegenfeld (\vec{E}) führt. Die elektrische Flussdichte, elektrische Verschiebungsdichte oder elektrische Erregung \vec{D} ist ein Feld, dessen Quelle die Ladung mit ihrer Ladungsdichte ρ darstellt. Und zuletzt wird festgestellt, dass die magnetische Induktion \vec{B} quelfrei ist.

Wie oben beschrieben genügt im betrachteten niederfrequenten Bereich (unterhalb 1 kHz) und aufgrund der Tatsache, dass sich biologisches Material wie ein Elektrolyt verhält, die Approximation über die Quasistatik, in dem die MAXWELL'schen Gleichungen wie folgt vereinfacht werden können [30]:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

Zusätzlich zur oben gelegten Grundlage werden nun noch zwei Erweiterungen eingeführt:

1. Im quasistatischen Fall kann man ein Potential Φ einführen, durch das sich das elektrische Feld \vec{E} ausdrücken lässt:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad (2.5)$$

2. Im Bioelektromagnetismus teilt man die Gesamtstromdichte auf in das elektrische Rückflussfeld (Sekundärstrom) \vec{E} und die Stromdichte in der nahen Umgebung der Stromquelle (Primärstrom) \vec{j}_s selbst (siehe Abbildung 2.1):

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} + \vec{j}_s \quad (2.6)$$

Hier stellt σ die Leitfähigkeit des Systems dar. Diese wird durch einen 3x3-Tensor gebildet und wird später näher erläutert.

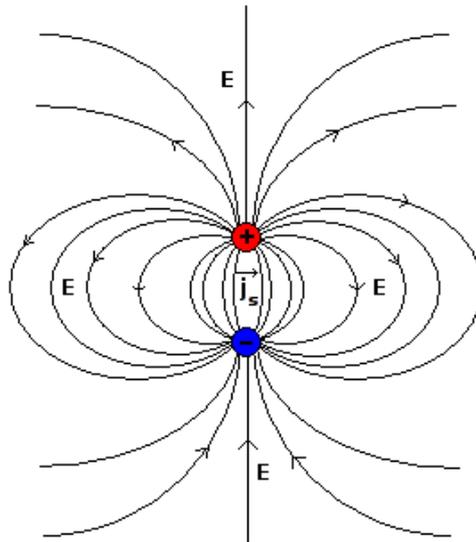


Abbildung 2.1: Die gesamte Stromdichte \vec{J} , aufgeteilt in Rückflussstrom \vec{E} und Stromdichte in Quellregion \vec{j}_s

Aus den bis jetzt eingeführten Größen und Gleichungen lässt sich durch die folgenden Umformungen eine partielle Differentialgleichung ableiten. Die Anwendung der Divergenz auf Gleichung (2.1) hat

zur Folge:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \vec{H} &= \nabla \cdot \vec{J} \\ \Leftrightarrow \vec{0} &= \nabla \cdot \vec{J} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Auf der linken Seite von Gleichung (2.7) geht ein, dass die Hintereinanderausführung von Divergenz und Rotation $\vec{0}$ ergibt. Des Weiteren kann man aus Gleichung (2.6) in Verbindung mit Gleichung (2.5) und der Beziehung (2.7) durch weitere Umformungen folgende grundlegende Gleichung erhalten:

- Die Kombination von Gleichung (2.6) und (2.5) ergibt:

$$\vec{J} = \sigma(-\nabla\Phi) + \vec{j}_s \quad (2.8)$$

- Anwendung der Divergenz führt zu:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\nabla \cdot (\sigma\nabla\Phi) + \nabla \cdot \vec{j}_s \quad (2.9)$$

- Die Anwendung der Beziehung (2.7) und die Subtraktion des Potentialterms ergibt die Gleichung:

$$\nabla \cdot (\sigma\nabla\Phi) = \nabla \cdot \vec{j}_s \quad (2.10)$$

Aufgrund der 0-Leitfähigkeit der den Kopf umgebenden Luft können zusätzlich zur hergeleiteten Gleichung (2.10) noch Neumann Randbedingungen angenommen werden, die das Verhalten des Stromflusses am Rand des Gebietes (der Kopfhaut) beschreiben[CW. So—, so] kann man das Problem der Quellrekonstruktion durch folgende elliptische DGL mit Neumann Randbedingungen darstellen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma\nabla\Phi) &= \nabla \cdot \vec{j}_s \quad \text{in } \Omega \\ \sigma \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}} &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.11)$$

Hier definiert $\Omega \in \mathbb{R}^3$ das Gebiet der Berechnung und $\partial\Omega$ wird als Rand des Gebietes angesehen.

2.2 Das Vorwärtsproblem

Ziel des Vorwärtsproblems ist das Berechnen eines elektrischen Potentials Φ ausgehend von einer gegebenen primären Stromquelle in einem Leiter. Speziell in diesem Fall bildet der menschliche Kopf den Leiter. Grundlage hierfür ist Gleichung (2.11). Hier ist die rechte Seite, die Quelle, bereits gegeben und es muss das dazugehörige Potential Φ berechnet werden. Das Vorwärtsproblem ist im so genannten Inversen Problem eingebettet und dient als Kernfunktion zur Quellrekonstruktion.

In der Hirnforschung werden Stromquellen im menschlichem Gehirn durch so genannte Dipole dargestellt. Eine genaue Erläuterung der Eigenschaften folgt.

2.3 Das Inverse Problem

Ziel der Quellrekonstruktion ist es, ausgehend von einem gemessenen Potential Φ an der Kopfoberfläche diejenige Quellkonfiguration im Inneren des Kopfes zu berechnen, die die gemessene Verteilung hervorruft. Das bedeutet, dass für die inverse Berechnung eine Potentialverteilung an bestimmten Punkten (beispielsweise an den Elektrodenpunkten einer EEG-Messung) gegeben ist. Ausgehend von diesen Werten wird dann mit geeigneten Mitteln die Primärstromverteilung im menschlichen $-\nabla \vec{j}_s$ - Hirn berechnet. An dieser Stelle ergibt sich eine Schwierigkeit. Die Lösung des Inversen Problems ist nicht eindeutig. Das heißt, es gibt mehr als eine Quellkonfiguration, die

ein gegebenes Potential an der Kopfoberfläche zur Folge hat. Somit muss für die Rekonstruktion der Quelle das Vorwärtsproblem mehrmals für verschiedene Quellkonfigurationen gelöst werden. Das heißt, es werden nacheinander Quellen an verschiedenen Positionen im Leiter platziert und dazu eine Vorwärtsrechnung durchgeführt. Die Lösungen werden dann mit dem Ausgangspotential verglichen und die Quellkonfiguration der exaktesten Lösung wird als Ergebnis herangezogen. Eine Möglichkeit, die Suche nach der richtigen Quellposition zu vereinfachen, ist das Einbringen eines gewissen a-priori-Wissens. So kann die Bestimmung der Quellen für das Vorwärtsproblem eingeschränkt werden. Beispielsweise kann durch die Art des epileptischen Anfalls eine grobe Einordnung für Quellorte vorgenommen werden. Durch eine funktionale Aufteilung des Kortex in primär motorische, primär sensorische sowie motorische und sensorische Regionen höherer Ordnung und in die assoziativen (d.h. unspezifischen) Regionen (Abbildung 2.2) ist eine grobe Abschätzung der Topographie, in der die Quelle liegt, möglich. Durch die bekannte Lage und Ausrichtung der apikalen Dendriten in der inneren Pyramidenschicht (parallel zueinander und senkrecht zur Kortexoberfläche) kann auch die Ausrichtung der Quelle eingeschränkt werden.

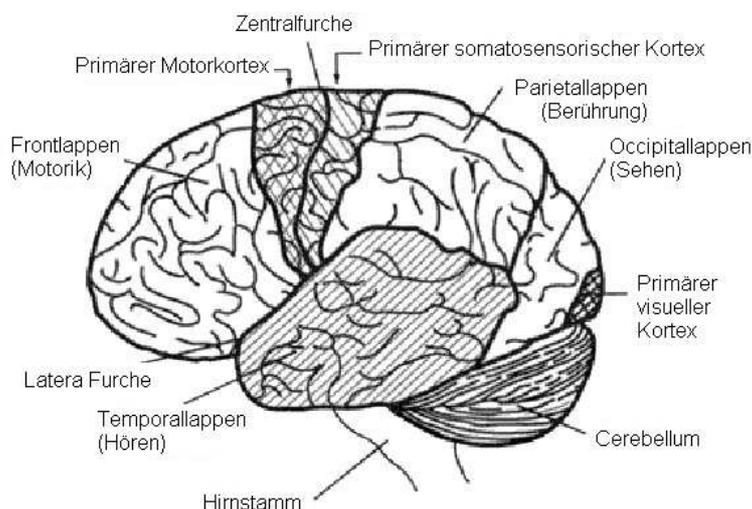


Abbildung 2.2: Aufteilung des Gehirns in motorische und sensorische Bereiche aus lateraler Sicht

2.4 Konzepte zur Lösung des Inversen Problems

Die Tatsache, dass das Inverse Problem keine eindeutige Lösung besitzt und daher nicht direkt lösbar ist, führt zu der Frage nach effizienten Methoden zur Ergebnisfindung. Wie oben beschrieben ist eine mehrmalige Lösung des Vorwärtsproblems notwendig, um die richtige Quellkonfiguration zu finden. In der folgenden Sektion werden zwei Ansätze vorgestellt, die von großer Bedeutung im Bereich der Bioelektrik sind: zum einen der Ansatz der **Lead Field Matrix** und zum anderen das damit eng verbundene **Prinzip der Reziprozität**. Hierbei wird lediglich ein Überblick gegeben, da der Schwerpunkt dieser Arbeit nicht auf der Lösung des Inversen Problems liegt, sondern den Fokus mehr auf das Vorwärtsproblem setzt. Detailliertere Ausführungen lassen sich in [33], [20], [37] oder [36] nachlesen.

2.4.1 Lead Field Matrix

Aufgrund der Linearität von Gleichung (2.11) kann die Abbildung der elektrischen Quellen im Inneren des Schädels auf das gemessene Potential an den Elektrodenpunkten auf der Kopfoberfläche durch einen linearen Operator $\mathbf{L}: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^m$ dargestellt werden. Hier bezeichnet m die Anzahl der Messelektroden und r definiert die Anzahl der Dipolkonfigurationen, für die das Potential berechnet wird. Ausgehend von dieser bestimmten gegebenen Konfiguration von elektrischen Quellen $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ aus einer Menge von Quellen, die Potentialfelder $\Phi_s \in \mathbb{R}^m$ erzeugen, kann man formulieren:

$$\Phi_s = \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}$$

Dabei definiert \mathbf{L} die sogenannte **Lead Field Matrix** und kann, wie oben erwähnt, als Abbildung einer Dipolkonfiguration auf Potentialmessungen an diskreten (Elektroden-)Punkten an der Kopfoberfläche interpretiert werden. Im Falle der Quellrekonstruktion kann nun für den Ansatz der Lead Field Matrix folgende Problemstellung formuliert werden: Berechne für eine gegebene Menge von Messungen Φ_s und bei bekanntem \mathbf{L} die zugehörigen Quellen \mathbf{s} , die die Potentiale der Messungen hervorrufen. Die Lösung dieses Konzepts wird in zwei Schritte unterteilt: Zuerst wird die Matrix \mathbf{L} aufgestellt, und als zweites muss diese invertiert werden. Das Aufstellen der Lead Field Matrix im Falle von einfachen Geometrien wie Kugelmodellen ist leicht zu bewerkstelligen. Wesentlich komplizierter ist dies bei der Verwendung von realistischen Kopfgeometrien, die auf realen Patientendaten beruhen. In Abbildung 2.3 ist der Zusammenhang zwischen Elektrodenpunkten und Dipolpositionen bei der Aufstellung der Matrix \mathbf{L} zu sehen. Jede Quelle, aufgeteilt in zwei (2D) oder drei (3D) orthogonale Einzelquellen, gehört zu einer Spalte der Matrix und jede Elektrode korrespondiert mit einer Zeile. Jede Zelle beschreibt ein gemessenes Potential an einer Elektrode, ausgehend von einer bestimmten Quelle.

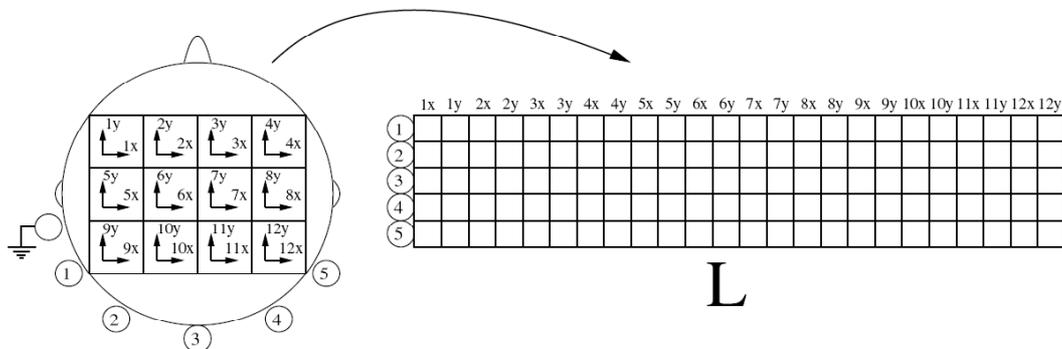


Abbildung 2.3: Konstruktion einer Lead Field Basis in 2D. Zu sehen ist die Lead Field Abbildung der Quellen (nummeriert von 1 bis 12 in x- und y-Richtung) und der Elektroden (nummeriert von 1 bis 5) auf die Matrix \mathbf{L}

Bei der Konstruktion der Matrix \mathbf{L} wird eine maximale Auflösung an Quellen für das bearbeitete Modell angestrebt. Das bedeutet in einem Finite-Elemente-Modell eine beliebig orientierte Quelle pro Element. Des Weiteren will man den Vorteil nutzen, dass in einem FEM-Netz das Potential einer Quelle nicht nur an den Elektrodenknoten berechnet wird, sondern an allen Knoten des diskretisierten Leiters. Diese beiden Ziele kann man erreichen, indem man das **Reziprozitätsprinzip** anwendet.

2.4.2 Prinzip der Reziprozität

Im Allgemeinen will man für einen gegebenen Dipol herausfinden, wie groß die Differenz der Potentiale an zwei Punkten A und B, die auf der Oberfläche des Gebietes liegen, ist. Das Prinzip der Reziprozität besagt, dass es bei einem gegebenen Dipol oder einer anderen äquivalenten Quelle schon ausreichend ist, die aktuelle Stromdichte am Ort des Dipols zu kennen, die aus einem Einheitsstrom durch die Punkte A und B hervorgeht. Das heißt, ein Dipol \vec{p} im betrachteten Leiter produziert an der Oberfläche des Gebietes ein Potential Φ_A und Φ_B an den Elektroden A und B. Man kann dies durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$\frac{(\vec{E} \cdot \vec{p})}{I} = \Phi_A - \Phi_B$$

So ist es nicht mehr nötig, in jedem Element eine elektrische Quelle zu platzieren und dann eine Vorwärtslösung zu berechnen. Vielmehr wird das Problem andersherum angegangen: Es wird eine elektrische Quelle und Senke an einem Paar von Elektroden gesetzt und für das jeweilige Paar das elektrische Feld an jedem Knoten im Leiter berechnet. Dann kann man das Prinzip der Reziprozität nutzen, um die Differenz der Potentiale an den Elektroden, entstanden aus irgendeiner Quelle in einem Element des Leiters, zu berechnen. Der genauere Ablauf für N Elektroden wird folgendermaßen beschrieben:

1. Wähle eine Elektrode als Erdungselektrode
2. Platziere für jede andere der $(N - 1)$ Elektroden (der Reihe nach) eine Stromquelle senkrecht zur Oberfläche an der betreffenden Elektrode und eine Stromsenke an der Erdungselektrode
3. Löse das Vorwärtsproblem für diese Konfiguration. Es entsteht ein Potential in jedem Element des Gebietes
4. Durch die Berechnung des Gradienten des resultierenden Potentialfeldes (das an jedem Knoten im Gebiet einen Wert hat) resultiert das elektrische Feld für jedes Element korrespondierend zur aktuellen Quelle-Senke-Konfiguration
5. Die x -, y - und z -Komponenten des elektrischen Feldes bilden die Einträge in der Lead Field Matrix \mathbf{L}

Durch die Verbindung der beiden beschriebenen Konzepte kann eine effiziente Lösung des Inversen Problems berechnet werden. Grundlage dieser Berechnungen sind einfache Kugelmodelle oder realistische Kopfmodelle, die in einer für die Finite-Elemente-Methode notwendigen Form zur Verfügung gestellt werden.

2.5 Datengewinnung

Die oben erläuterten Verfahren zur Berechnung von dipolaren Quellen innerhalb des menschlichen Gehirns setzen eine Reihe von Daten voraus, ohne die eine Lösung des Problems nicht möglich ist. Zum einen muss der Aufbau des Leiters, also des Kopfes, bekannt sein. Der Kopf ist kein homogener Leiter mit nur einer Leitfähigkeit. Er besteht aus verschiedenen Kompartments, wie beispielsweise Kopfhaut, Schädel, Liquor, grauer und weisser Substanz. Hier lassen sich noch weitaus feinere Unterteilungen vornehmen, die das ganze System immer komplizierter machen. Allein der Schädelknochen könnte in drei Schichten unterteilt werden, äussere Kompakta, Spongiosa und innere Kompakta. Zum anderen müssen Daten über die Geometrie des Kopfes vorliegen. Diese Geometriedaten und Informationen über die Abgrenzung der einzelnen Schichten werden über Techniken der medizinischen

Bildverarbeitung aus Messungen mit **Magnet-Resonanz-Tomographie** (MRT) oder **Kernspin-Tomographie** (CT) gewonnen. Ein Beispiel einer MRT-Aufnahme ist in Abbildung 2.4 zu sehen. Nachdem die Geometriedaten gemessen wurden, findet eine Segmentierung statt (Abbildung 2.4), um bestimmte Regionen bzw. Elemente (beispielsweise jeden Voxel) einer Schicht zuzuweisen. Anschließend kann jeder Region/Schicht eine Leitfähigkeit zugeordnet werden.

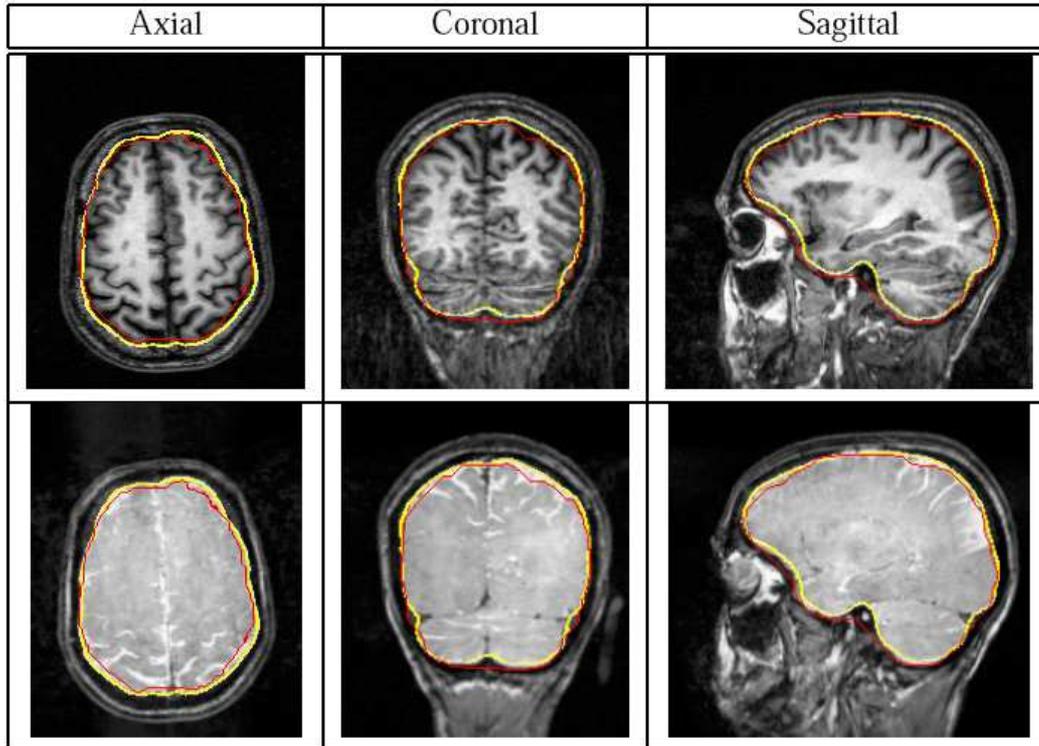


Abbildung 2.4: Segmentierung der inneren Schädelschicht unter Anwendung verschiedener Techniken (oben vs. unten) [36] (Seite 55)

Grundlage für Validierung und Experimente bilden jedoch meist vereinfachte Modelle wie beispielsweise Mehr-Schalen-Kugelmodelle. In ihnen kann eine numerische Approximation überprüft werden, da für solche Modelle Möglichkeiten bestehen, die gesuchte Lösung analytisch zu berechnen oder anzunähern. In dieser Arbeit wird an einem Drei-Schalen-Kugelmodell getestet, das die Kompartments Kopfhaut, Schädel und Gehirn repräsentiert. Die einzelnen Schichten sind konzentrisch um den Mittelpunkt angeordnet. Abbildung (2.5) zeigt, wie einzelne Modelle den menschlichen Kopf darstellen.

2.6 Leitfähigkeit

In Gleichung (2.6) wird zum ersten Mal auf die Leitfähigkeit im System eingegangen. Sie stellt ein wichtiges Kriterium in der Quellrekonstruktion dar. Der menschliche Kopf ist wie schon erwähnt keinesfalls ein homogener Leiter. Verschiedene Schichten besitzen verschiedene Leitfähigkeitsparameter. Auch ist die Leitfähigkeit (wenn dir das zu viel Leitfaehigist, dann kannst Du manchmal auch vom Widerstand einer Schicht sprechen, was ja $1/\text{Leitfaehig}$ ist) einer Zelle nicht immer in allen Richtungen gleichmäßig bzw. isotrop. So ist der Schädel beispielsweise in tangentialer Richtung leitfähiger als in radialer Richtung (siehe Abbildung (2.6)). Diese Anisotropie resultiert aus seinem

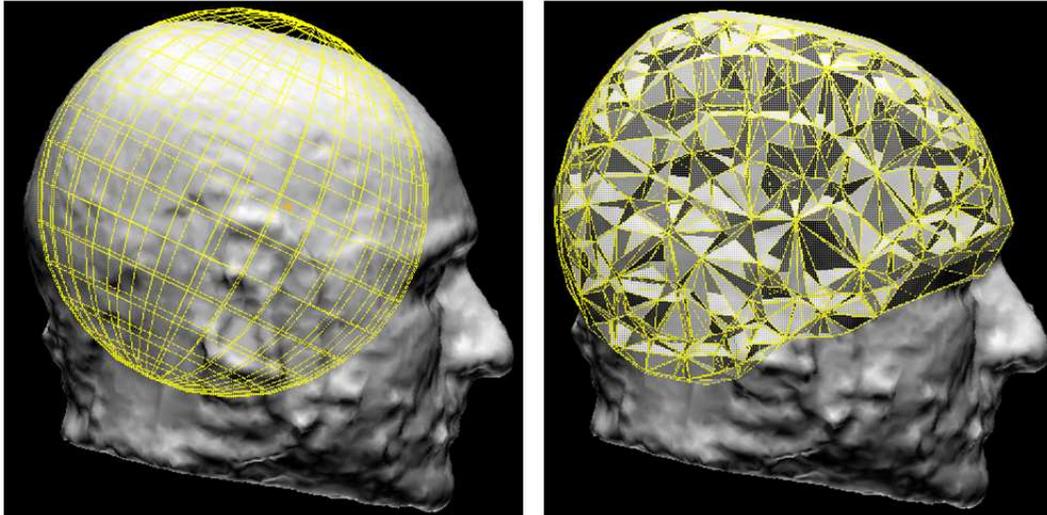


Abbildung 2.5: Links: Kugelförmige Approximation der Kopfgeometrie. Rechts: Realistische Approximation durch Finite Elemente

schichtweisen Aufbau. Zwischen den inneren und äusseren Kompakta verläuft ein schwammartiges, stark Knochenmark-enthaltendes System aus feinen Knochenbälkchen, die sogenannten Spongiosa. Da die Kompakta im Vergleich zu den Spongiosa einen grossen Widerstand bilden, besitzt der Schädel ein Leitfähigkeitsverhältnis von bis zu 1:10 (radial zu tangential) zur Schädeloberfläche.

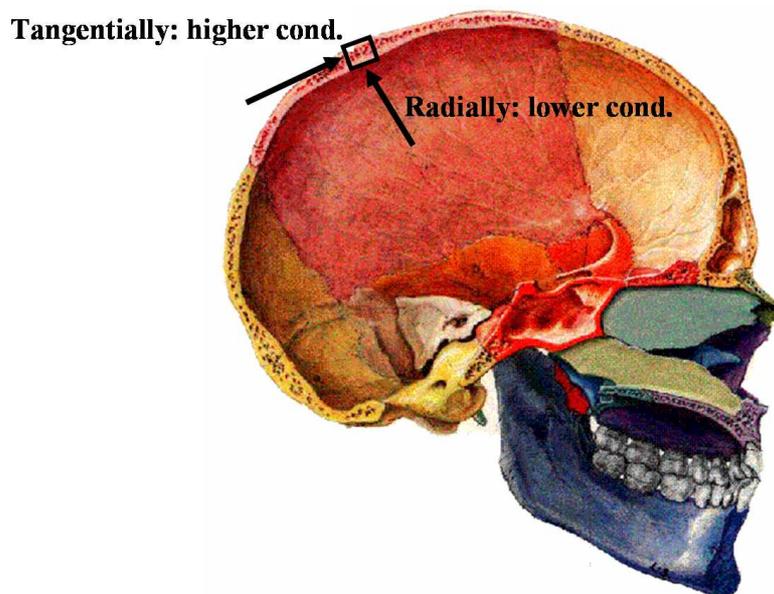


Abbildung 2.6: Anisotropie des Schädels

Die Variable σ stellt einen Tensor (3×3) dar, der die Leitfähigkeit in jeder Richtung definiert:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Man unterscheidet zwischen isotroper und anisotroper Leitfähigkeit. Erstere ist durch gleiche Werte in allen Richtungen gekennzeichnet. Ein Beispiel zeigt den Standard-Tensor, der die Leitfähigkeit der Kopfhaut und des Gehirns wiedergibt:

$$\sigma_{Kopfhaut/Gehirn} = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.33 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.33 \end{pmatrix}$$

Liegt eine isotrope Leitfähigkeit vor, so wird oft anstatt des Tensors auch ein skalarer Wert definiert, mit dem dann gerechnet wird. In dieser Arbeit wurde nach anfänglichen erfolgreichen Versuchen mit skalaren Leitfähigkeiten auch bei der isotropen Leitfähigkeit auf eine Verwendung von 3x3-Tensoren umgestellt. In diesem Zusammenhang beschreibt Anisotropie unterschiedliche Leitfähigkeit in unterschiedliche Richtungen. So kann man den Schädel als einen stark anisotropen Bereich definieren (siehe Abbildung (2.6)). Ein weiteres Beispiel bildet die weisse Hirnsubstanz, welche in Abbildung (2.7) gezeigt wird. Es wird deutlich, dass die weisse Substanz transversal über geringere Leitfähigkeit verfügt als longitudinal. Hier ist das Verhältnis ca. 1:9. Siehe hierzu auch [21].

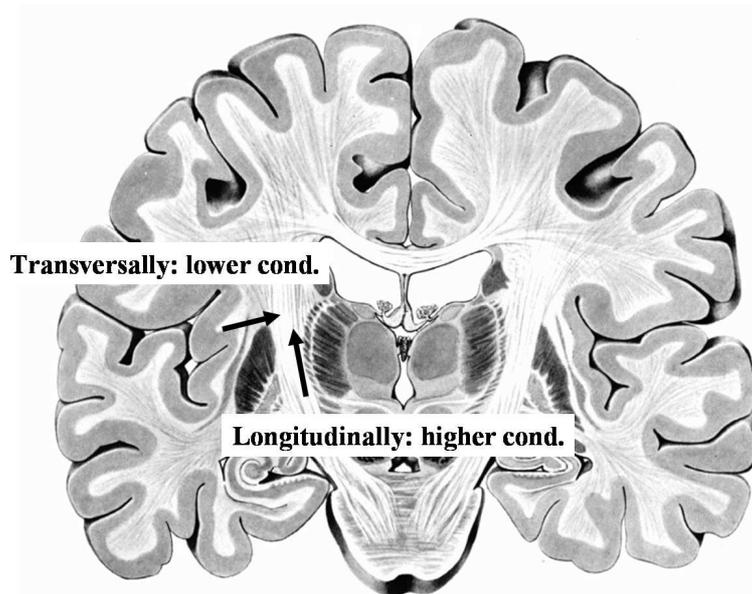


Abbildung 2.7: Anisotropie des White Matter

Abbildung (2.8) zeigt eine Visualisierung der Leitfähigkeiten in einem axialen Schnitt durch den Kopf. Veranschaulicht werden die Tensoren durch Ellipsoide, welche im isotropen Fall kugelförmige Form aufweisen. Eine geometrische Interpretation der Tensormatrix kann in [21] (Seite 8) nachgelesen werden. Abbildung (2.8) stellt die isotrope Kopfhaut und graue Hirnmasse (hellblaue kugelförmige Ellipsoide), Anisotropie des Schädels und der weißen Hirnmasse (dunkelblaue lang gestreckte Ellipsoide) und das isotrope Hirnwasser (rote kugelförmige Ellipsoide) dar.

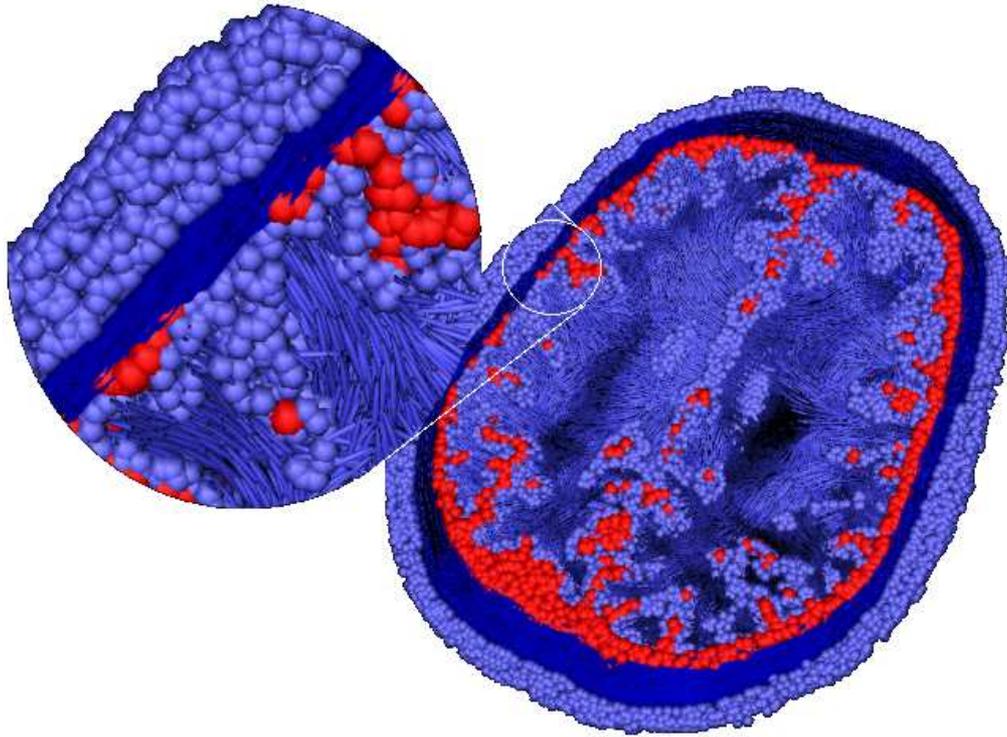


Abbildung 2.8: Isotropie und Anisotropie (aus [38]).

Grundlegende Validierungsplattformen vereinfachen den Kopf zu einem isotropen Leiter. Jedoch ist es unerlässlich, dass Anisotropie bei der Rekonstruktion der Quellen mit in die Berechnungen einfließt, da diese Eigenschaft große Auswirkungen auf den Stromfluss durch den Kopf hat [38]. Abbildung (2.9) zeigt, wie unterschiedlich sich Potentiale verhalten, wenn einmal Isotropie angenommen wird (links) oder der anisotrope Schädel mit einbezogen wird (rechts). Man sieht deutlich an den dunkel gekennzeichneten Linien, dass die Anisotropie des Schädels großen Einfluss auf das Potential hat, indem es den Stromfluss nach außen einschränkt.

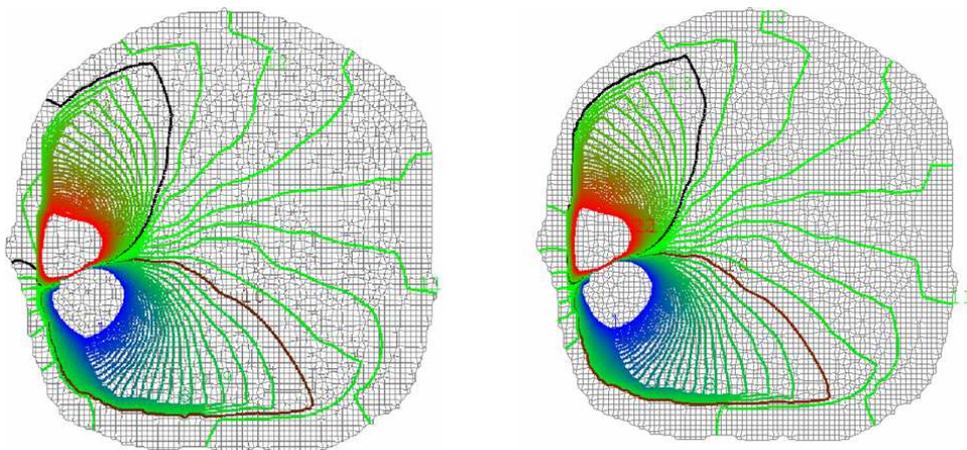


Abbildung 2.9: Vergleich isotrope vs. anisotrope Stromflüsse

Für das in dieser Arbeit verwendete Drei-Schalen-Modell wurden die in Tabelle 2.1 definierten

Kompartments	Kopfhaut	Schädel	Gehirn
Leitfähigkeit [$1/\Omega\text{m}$]	0,33	0,0042	0,33

Tabelle 2.1: Definitionen der einzelnen isotropen Leitfähigkeiten für ein 3-Schalen-Modell.

Kompartments	Kopfhaut	Schädel	Gehirn
Leitfähigkeit (Tangential) [$1/\Omega\text{m}$]	0,33	0,01176	0,33
Leitfähigkeit (Radial) [$1/\Omega\text{m}$]	0,33	0,0042	0,33

Tabelle 2.2: Definitionen der einzelnen anisotropen Leitfähigkeiten für ein 3-Schalen-Modell mit anisotroper Schädelschicht.

Werte für den isotropen Fall und die Werte in Tabelle 2.2 für die Versuche mit anisotropem Schädel auf die Labels der einzelnen Kompartments umgesetzt. Nachdem ein geeignetes Modell entworfen ist, kann die Modellierung der Quelle im Kopf beginnen.

2.7 Modellierung der Quelle

Nun stellt sich die Frage, wie man das elektrische Verhalten im menschlichen Kopf mathematisch beschreiben kann. Wie stellen sich elektrische Quellen dar?

2.7.1 Potentialgenerierung im Gehirn

Neuronen (Nervenzellen) stellen die elementarsten Einheiten des Gehirns dar. Sie sind die informationsverarbeitenden Bausteine, die aufgrund ihres Aufbaus (Zellform, Art der Zellmembran) die Möglichkeit besitzen, chemische wie elektrische Signale zu empfangen, zu modulieren und weiterzugeben. Die Signalverarbeitung geschieht in den Zellkörpern, der Empfang und die Weitergabe an den so genannten Synapsen. Der grundlegende Aufbau eines Neurons gliedert sich in Zellkörper, Dendriten und die Nervenfasern oder auch Axon (Abbildung 2.10). Messungen an den so genannten Pyramidenzellen (Neuronen beispielsweise im Kortex) zeigen in Ruhe ein negatives intrazelluläres Potential, relativ zu dem die Zellen umgebenden Extrazellulärraum (zwischen -55 und -90 mV), was als **Ruhemembranpotential** bezeichnet wird. Trifft ein Reiz in Form eines erregenden Impulses an einem oberflächennahen Dendriten auf, so kommt es durch die Umverteilung der Ladungsträger in diesem Bereich zu einem Nettoeintritt an positiven Ladungen in das Dendriteninnere. Intrazellulär kommt es durch innerdendritische Stromflüsse zu einem Ladungsausgleich, sodass der entstehenden Stromsenke (Einstrom positiver Ladungsträger in das Zellinnere) eine in der Tiefe liegende Stromquelle (Ausstrom positiver Ladungen in den Extrazellulärraum) gegenübersteht. Schematisch kann man dies in Abbildung (2.11) erkennen.

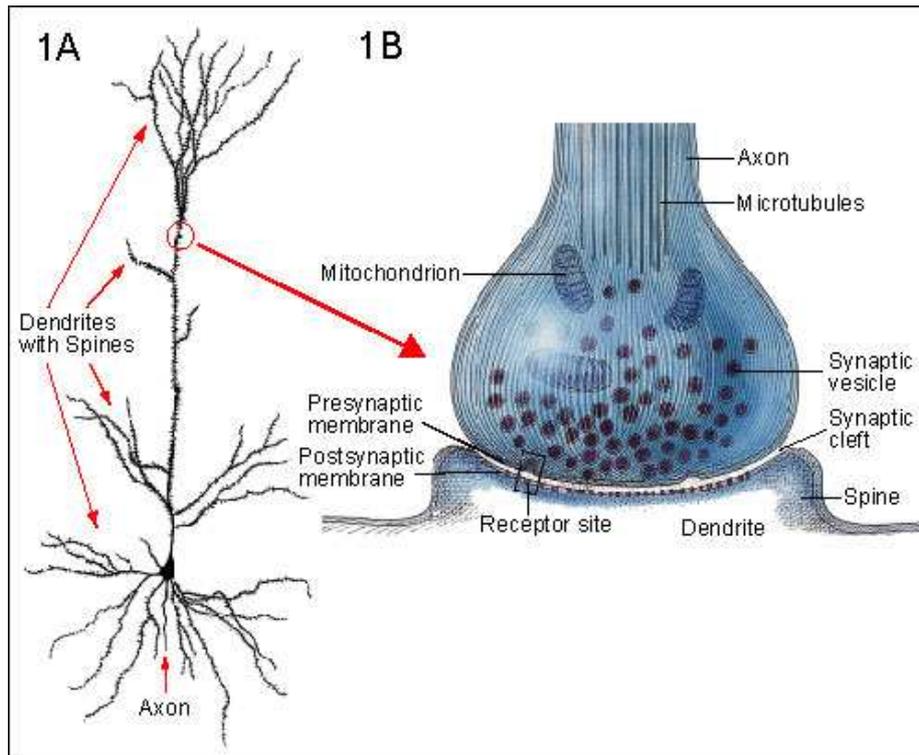


Abbildung 2.10: Aufbau eines Neurons am Beispiel einer Pyramidenzelle

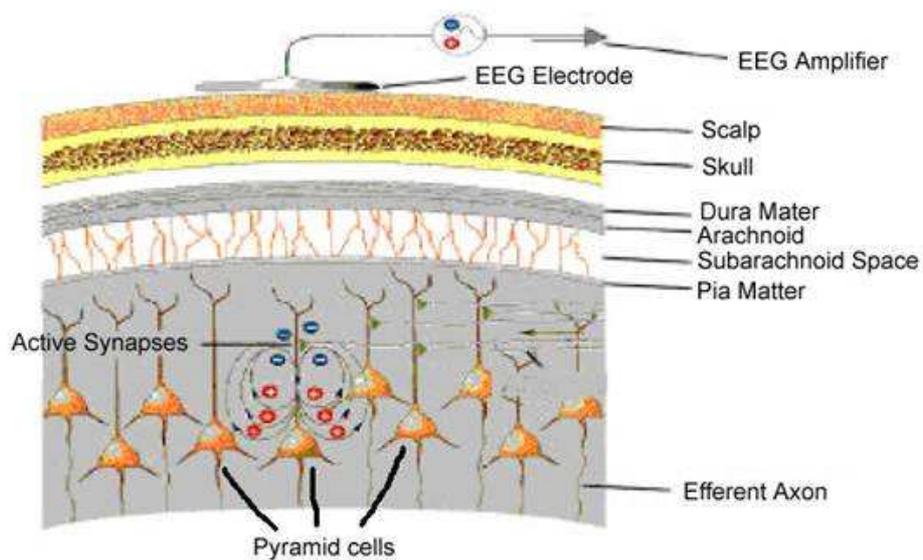


Abbildung 2.11: Die ersten Schichten des Kopfes bis hin zum Kortex. Darstellung einer Stromquelle mit Rückflussstrom

2.7.2 Dipole im menschlichen Gehirn

Mathematisch betrachtet kann diese Konstellation aus Quelle und Senke als ein so genannter **Dipol** dargestellt werden. Ein elektrischer Dipol ist ein System aus zwei gleich großen Ladungen q entge-

gegenseetzten Vorzeichens und in kleinem Abstand l voneinander. Es wird durch sein Dipolmoment \vec{M} gekennzeichnet, das als Vektor von der negativen Ladung zur Positiven zeigt [29] (Abb. 2.12). Um einen Dipol in einer Gleichung zu formulieren, ist die Einführung der DIRAC'schen Funktion erforderlich. Die Gleichungen (2.12) und (2.13) zeigen ihre Definition sowie ihr Integral.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & : x \neq 0 \\ \infty & : x = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\int_{\Omega} \delta(x) dx = \begin{cases} 1 & : x \in \Omega \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.13)$$

Im mathematischen Sinne kann man δ nicht als Funktion bezeichnen. Vielmehr ist sie eine so genannte **Distribution** ([19]). Distributionen erweitern den Funktionsbegriff, indem sie Funktionen f als Funktionale auf geeigneten Funktionenräumen auffassen. Gleichung (2.14) modelliert mit Hilfe der δ -Distribution den so genannten **Feynman Dipol**. Hier bezeichnet $\vec{x}_{so} \in \mathbb{R}^3$ den Ort der Quellladung und $\vec{x}_{si} \in \mathbb{R}^3$ den der Senke. $Q \in \mathbb{R}$ definiert das Dipolmoment [31].

$$\vec{j}_s^{Feyn}(\vec{x}) = Q(\delta(\vec{x} - \vec{x}_{so}) - \delta(\vec{x} - \vec{x}_{si})) \quad (2.14)$$

Neben der Definition des Feynman Dipols wird sehr häufig auch der **Mathematische Dipol** herangezogen (\vec{x}_0 beschreibt hier die Position des Dipols). Er geht aus dem Feynman Dipol hervor, wenn man den Abstand zwischen Quelle und Senke gegen 0 gehen lässt. Hier beschreibt $M \in \mathbb{R}^3$ das Dipolmoment, abhängig von Abstand und Stärke der Pole:

$$\vec{j}_s^{Math}(\vec{x}) = \vec{M}\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (2.15)$$

Abbildung (2.1) zeigt die Potentiallinien eines so definierten Dipols, während Abbildung (2.12) die den Aufbau eines Dipols noch einmal verdeutlicht.

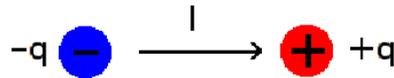


Abbildung 2.12: Schematische Darstellung eines Dipols ([29], Seite 631)

Eine elektrische Quelle im menschlichen Gehirn besteht wie oben schon dargestellt aus zwei Punktladungen, die einen gewissen Abstand haben. Das heißt, die Formulierung des Feynman Dipol gibt eine genauere Beschreibung der biologischen Zusammensetzung. So kann man eine Verbindung zwischen der biologischen Seite der Quellrekonstruktion und der mathematischen Formulierung knüpfen.

2.8 Das eigentliche Problem

Durch das Einbringen der δ -Funktion in Verbindung mit dem ∇ -Operator auf der rechten Seite von Gleichung (2.11) ergeben sich bei der Diskretisierung des Systems enorme Schwierigkeiten ([24, 35, 30, 19, 36]). Der Dipol stellt eine so genannte **Singularität** dar [35]. Singularitäten sind Unstetigkeiten, Sprünge oder Unendlichkeitsstellen. Diese bedürfen einer speziellen numerischen Behandlung. Der numerische Fehler setzt sich aus dem so genannten Diskretisierungsfehler, der daraus

entsteht, dass man eine DGL nur an bestimmten Punkten (definiert durch ein Gitter) betrachtet, und dem algebraischen Fehler, der bei einer iterativen Lösung von Gleichungssystemen auftritt, zusammen. Singularitäten lassen sich nur durch eine gesonderte Behandlung mit geringem Fehler annähern. Dies ist nicht nur in der direkten Umgebung der Singularität der Fall, sondern auf dem gesamten Gebiet Ω . In Kapitel 4 werden Verfahren vorgestellt, um die auftretende Singularität des Dipols zu approximieren oder durch geeignete Mittel ganz aus der Differentialgleichung zu eliminieren. Zuvor wird noch der Übergang vom kontinuierlichen in den diskreten Raum beschrieben.

Kapitel 3

Diskretisierung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Lösung des Vorwärtsproblems numerisch bestmöglich zu approximieren. Aufgrund der komplexen Geometrie des menschlichen Kopfes muss ein Verfahren angewandt werden, das solche Formen sehr gut darstellen und annähern kann. Es gibt verschiedene Methoden, um partielle Differentialgleichungen zu diskretisieren. Beispielsweise ist die Methode der **Finiten Differenzen** ein sehr effektives Mittel zur Diskretisierung von Problemen auf regulären Gittern. Jedoch ist sie nur mit hohem Aufwand für komplexe Geometrien geeignet. Eine weitere Methode ist die der **Finiten Volumen**. Sie wird herangezogen, wenn es um Probleme geht, denen ein Erhaltungssatz zugrunde liegt, beispielsweise in der Strömungsdynamik (Euler-, Navier-Stokes-Gleichungen, usw.). Eine Methode, die in der Elektrodynamik und auch bei der Quellrekonstruktion erfolgreich angewandt wird, ist die so genannte **Randelement Methode** (BEM, von englisch Boundary Element Method), in der die zu lösende Differentialgleichung in eine Randintegralgleichung umgewandelt wird. Dieses Verfahren verliert jedoch an Attraktivität, da bei der Randelement Methode keine hinreichende Berücksichtigung von Leitfähigkeitsinhomogenitäten und Anisotropien möglich ist.

In der vorliegenden Arbeit wird der Ansatz der **Finiten Elemente** (FEM) angewandt. Diese Methode eignet sich sehr gut für komplexe Geometrien, da durch eine flexible Wahl der Elemente krummlinige Ränder sehr realitätsnah dargestellt werden können. Das folgende Kapitel zeigt die Grundzüge der Methode, sowie die Schritte, die bis zum Aufstellen des zu lösenden Gleichungssystems durchlaufen werden und wendet diese Theorie dann auf die in Kapitel 2 hergeleitete Gleichung (2.11) an. Für den in dieser Arbeit implementierten Teil der Finite-Elemente-Anwendung wurde eine C++-Bibliothek **Colsamm** von Herrn Dipl.-Math. Jochen Härdtlein [14] eingebunden, die mit Hilfe von Fast Expression Templates eine schnelle Möglichkeit der Erstellung von Steifigkeitsmatrizen in allen Dimensionen bietet.

3.1 FEM im Überblick

Die Finite-Elemente-Methode wurde ursprünglich in der Mechanik für die Lösung von Festkörper-Problemen in den 1950er-Jahren entwickelt. Später brachte eine stetige Verallgemeinerung des Ansatzes einen Einsatz in vielen physikalischen Problemstellungen wie beispielsweise Wärmeleitung, Temperaturverteilung, Hydraulik oder in der Elektromagnetik, und – für die Quellrekonstruktion wichtig – in der Elektrostatik.

Das Prinzip der Diskretisierung durch FEM funktioniert allgemein so, dass das Problem nicht mehr auf dem gesamten komplexen Gebiet betrachtet wird, sondern das Gebiet wird in einfache Teilgebiete zerlegt. Diese Teilgebiete werden als *Elemente* bezeichnet. Nach dieser Zerlegung wird in jedem Element ein für die zu lösende DGL problemgerechter Ansatz gewählt, eine so genannte

Ansatz- bzw. Basisfunktion. Sie stellt eine Basis zur Approximation der gesuchten Funktion dar. Hierzu eignen sich rationale Funktionen.

3.2 FEM an einem Beispiel

Im weiteren Verlauf wird das Prinzip der Finite-Elemente-Methode am Beispiel einer Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen erläutert. Für tiefere Einblicke in die Methode sei auf die Arbeiten [3], [11] oder [10] verwiesen. Es soll also exemplarisch folgende Partielle Differentialgleichung mit einer homogenen Dirichlet Randbedingung in 2D gelöst werden:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.1}$$

Das heißt, es wird eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ gesucht, die Gleichung (3.1) löst. Hierbei gilt $\Omega = \bar{\Omega} \setminus \partial\Omega$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Für die Diskretisierung dieser DGL wird das Gebiet $\Omega = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, also das Einheitsquadrat, herangezogen. Nun ist es so, dass Gleichung (3.1) in der so genannten **starken Form** vorliegt. Der Ansatz der Finiten Elemente erfordert jedoch eine Formulierung in der **schwachen Form**, das heißt, die zu lösende Gleichung wird in eine Variationsaufgabe umformuliert. Dabei werden folgende Stationen durchlaufen:

1. Gleichung (3.1) wird mit einer hinreichend glatten **Testfunktion** v , die auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwindet (siehe Definition 3.1), multipliziert:

$$-\Delta u \cdot v = f \cdot v$$

2. Anschließend wird über das Gebiet Ω integriert:

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega$$

3. Eine partielle Integration in Verbindung mit der GAUSS'schen Integralformel ([4], Seite 636) ergibt die gesuchte Variationsgleichung:

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v \, d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega$$

Hierbei fällt das Randintegral heraus, da v am Rand 0 ergibt (unter den einzelnen Termen stehen die im Folgenden verwendeten Bezeichner):

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega}_{b(v)} \tag{3.2}$$

Definition 3.1 (Testfunktion) .

Als eine **Testfunktion** v wird eine hinreichend glatte Funktion $v \in V$ bezeichnet, für die der Funktionenraum V definiert ist durch

$$V := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

v ist einmal stetig differenzierbar im Sinne der schwachen Ableitung.

Die Arbeit von Frau Bergler [3] zeigt ausführlich, dass die Lösung der starken Formulierung äquivalent zu der der schwachen ist. Bisher wurden die gesuchte Funktion u und die Testfunktion v als kontinuierliche Funktionen in einem unendlichen Vektorraum V betrachtet. In der schwachen Formulierung stellt sich das Problem:

Gesucht ist $u \in V$ mit $a(u, v) = b(v)$ für alle $v \in V$

Zur Diskretisierung wird nun die Funktion u als eine Linearkombination von Basisfunktionen φ_i dargestellt:

$$u \approx u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i \quad (3.3)$$

So wird das System in einen endlich-dimensionalen Teilraum V_h (**Ansatzraum**), in dem die Funktion u_h definiert ist, überführt. N bezeichnet die Anzahl der Knoten des diskretisierten Gebietes. $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ stellen eine lineare Basis des Ansatzraumes V_h an jedem Knoten dar.

Die Fragestellung lautet nun:

Gesucht ist $u_h \in V_h$ mit $a(u_h, v) = b(v)$ für alle $v \in V_h$

Dieser Ansatz wird **Galerkin-Verfahren** genannt. Die Finite-Elemente-Diskretisierung wird interpretiert als das Galerkin-Verfahren für einen Ansatzraum V_h mit speziellen Eigenschaften. Hierzu wird das Gebiet Ω in endlich viele polygonale Teilgebiete, die **Finiten Elemente**, aufgeteilt. In 2D besteht eine solche Partitionierung meist aus Dreiecken, Vierecken, krummlinigen Dreiecken bzw. Vierecken. In 3D werden meist Tetraeder oder Hexaeder verwendet. Abbildung (3.1) zeigt eine einfache Triangulierung eines zweidimensionalen Gebietes. Bild (3.2) zeigt die Aufteilung einer Kugel in 3D unter Verwendung von Tetraedern. Die Eckpunkte der Elemente werden als **Knoten** bezeichnet. Nicht jede beliebige Anordnung von Elementen ist bei einer Zerlegung von Ω erlaubt. Gewisse Anforderungen sind zu erfüllen. Im Folgenden bezeichnet τ_h eine Partitionierung von Ω in abgeschlossene Elemente T_1, T_2, \dots, T_m . h bezeichnet die Feinheit der Triangulierung und wird durch die längste Kante in τ_h definiert. Es müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

- Das gesamte Gebiet ist durch τ_h erfasst:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^m T_i$$

- Für $T_i, T_j \in \tau_h$ mit $i \neq j$ ist die Schnittmenge $T_i \cap T_j$ (2D und 3D) entweder **leer**, beinhaltet nur **einen Knoten** oder besteht aus nur **einer Kante**. In 3D kommt noch die Möglichkeit **einer** gemeinsamen **Fläche** hinzu.

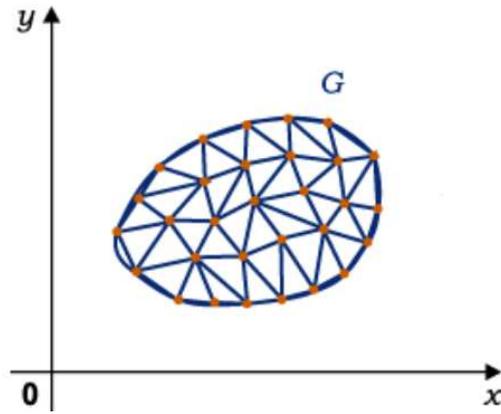


Abbildung 3.1: Konforme Triangulierung eines 2D Gebietes

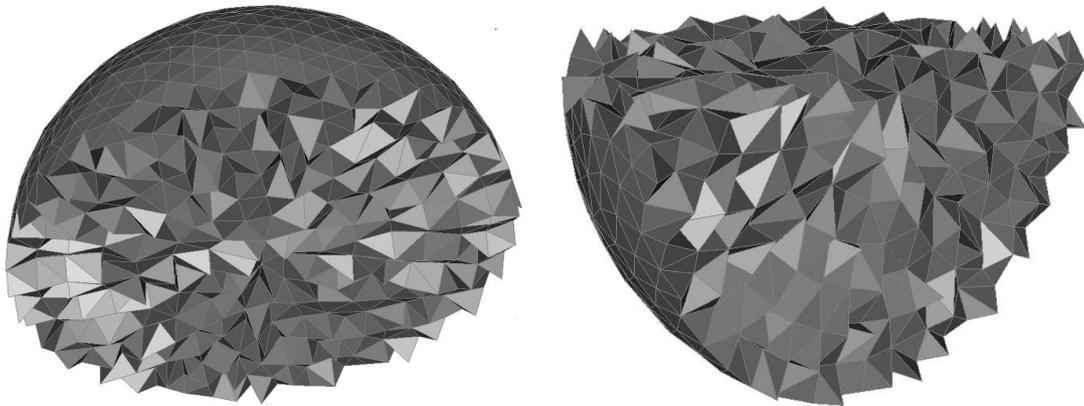


Abbildung 3.2: Partitionierung eines kugelförmigen Gebietes Ω in Tetraeder

Für die hier betrachtete Poisson-Gleichung in 2D wird eine Triangulierung wie in Abbildung (3.3) gewählt. In vielen Fällen reicht ein Ansatz aus linearen Basisfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ an den Knoten a_1, \dots, a_n eines Elementes (hier eines Dreiecks) aus. Ihre Wahl erfolgt in der Regel so, dass sie folgende Eigenschaft erfüllen:

$$\varphi_i(a_j) = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases} \quad (3.4)$$

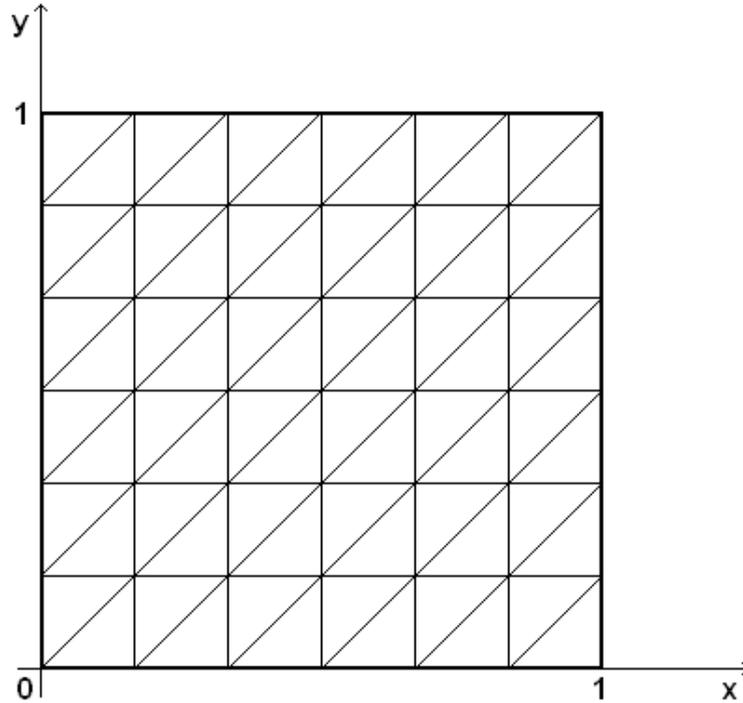


Abbildung 3.3: Friedrichs-Keller-Partitionierung des Einheitsquadrates als Ω

Abbildung (3.4) zeigt die Aufteilung des eindimensionalen Raumes in Finite Elemente und ihre linearen Basisfunktionen, die oben genannte Forderung erfüllen. Das Gleiche zeigt Abbildung (3.5) in 2D in einer Friedrichs-Keller-Triangulierung. Man sieht, dass ein Knoten an mehrere Elemente angebunden ist. Das heißt, eine Basisfunktion φ_i besitzt mehrere Elemente als **Träger** (hier: zwei Elemente in 1D und sechs Elemente in 2D). Ein **Träger** ist hier definiert als die Anzahl der Elemente bzw. als das Gebiet, in denen eine Basisfunktion φ_i eines Knotens i ungleich 0 ist:

$$\text{supp}(\varphi_i) = \overline{\{\vec{x} \in \Omega \mid \varphi_i(\vec{x}) \neq 0\}} \quad (3.5)$$

Nicht nur lineare Basisfunktionen kommen in der Finite-Elemente-Methode zum Einsatz. Auch bilineare, trilineare oder beliebige Funktionen, die das Kriterium (3.4) erfüllen, können angewandt werden.

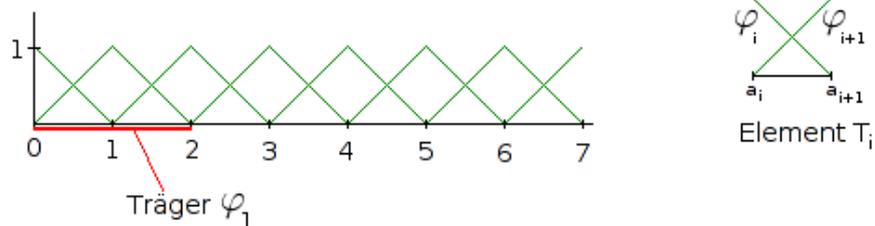


Abbildung 3.4: Lineare Basisfunktionen in 1D mit Zoom auf ein einzelnes Element

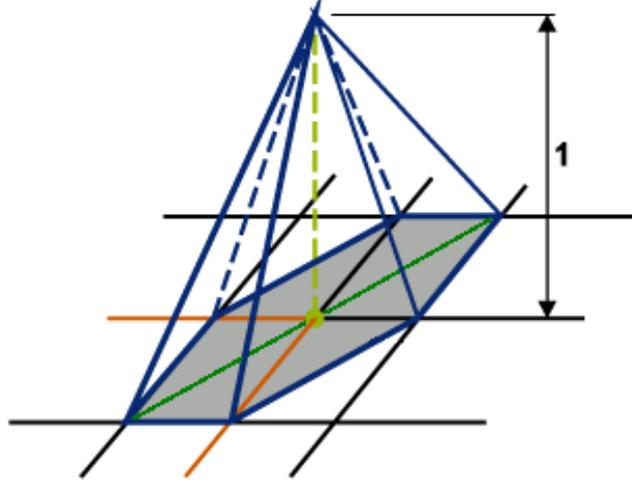


Abbildung 3.5: Lineare Basisfunktionen in 2D in einer Friedrichs-Keller-Triangulierung

An dieser Stelle sind nun alle Voraussetzungen geschaffen, um die Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite des Systems aufzustellen. Verbindet man die Teile der in Gleichung (3.2) aufgestellten schwachen Formulierung des Problems mit der diskreten Darstellung von u (Gleichung (3.3)) und setzt die Basisvektoren $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$, so erhält man nach einiger Umformung:

$$-\sum_{i=1}^N u_i \cdot \int_{\Omega_h} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \, d\Omega_h = \int_{\Omega_h} f \cdot \varphi_j \, d\Omega_h \quad j = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

$u_j = u_h(a_j)$ stellt den gesuchten Näherungswert von u am Knoten j dar. Aus der Darstellung in Gleichung (3.6) erhält man die linke Seite eines zu lösenden Gleichungssystems

$$A_h u_h = b_h \quad (3.7)$$

in der die Beiträge der Steifigkeitsmatrix A folgendermaßen besetzt werden:

$$A_h^{[i,j]} = - \left(\int_{\Omega_h} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i \, d\Omega \right)_{i,j=1}^N \quad (3.8)$$

und ebenso die Einträge der rechten Seite:

$$b_h^{[j]} = \left(\int_{\Omega_h} f \cdot \varphi_j \, d\Omega \right)_{j=1}^N \quad (3.9)$$

In der Implementierung geht man wie folgt vor: Man durchläuft eine Schleife über alle Elemente, integriert an den Knoten und stellt so pro Element eine **lokale Steifigkeitsmatrix** auf. Die so erhaltenen **Elementbeiträge** für die globale Matrix A werden dann an die entsprechende Stelle von A addiert. Das Aufstellen der rechten Seite erfolgt analog.

Um die erforderlichen Integrale über die Elemente zu berechnen, bedient man sich einer affinen Abbildung $\psi : T^0 \rightarrow T_i$, die das Einheitselement, das so genannte **Referenzelement** T^0 , auf das betrachtete Finite Element T_i im Raum abbildet. Gleichung (3.10) und Abbildung 3.6 zeigt das Beispiel einer solchen Abbildung für einen Tetraeder mit den Eckpunkten a_1, \dots, a_4 :

$$\psi(\vec{y}) = a_1 + y_1(a_2 - a_1) + y_2(a_3 - a_1) + y_3(a_4 - a_1) \quad (3.10)$$

Durch diese affine Abbildung kann die Berechnung des Integrals über ein Element auf das Referenzelement beschränkt werden. Das Ergebnis wird dann mittels ψ auf das betrachtete Element transformiert.

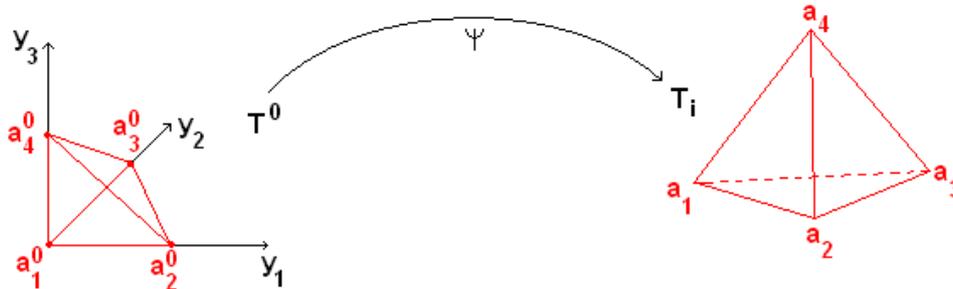


Abbildung 3.6: Die affine Abbildung des Einheitstetraeders (Referenzelement) T^0 mit den Knoten $a_1^0 = (0, 0, 0)$, $a_2^0 = (1, 0, 0)$, $a_3^0 = (0, 1, 0)$, $a_4^0 = (0, 0, 1)$ auf einen beliebigen Tetraeder T_i mit den Knoten a_1, \dots, a_4

Ist das Gleichungssystem aufgestellt, kommen geeignete Löser wie AMG¹ oder CG² zum Einsatz, um u genügend genau zu lösen.

3.3 Colsamm – *Fast Expression Templates* zur Erstellung lokaler Steifigkeitsmatrizen

Zum Aufstellen der Steifigkeitsmatrizen in dieser Arbeit wurde eine C++-Bibliothek verwendet, die auf Basis von Fast Expression Templates den lokalen Diskretisierungstern eines Elementes berechnet. Dieser kann dann auf die eigene globale Gitterstruktur umgesetzt werden. Das folgende Unterkapitel beschreibt kurz die Funktionsweise der **Colsamm**³-Bibliothek und zeigt ihre Anwendung an einem Beispiel. Detaillierte Informationen finden sich in [17] oder auf [14].

Nahezu alle Parameter in Colsamm sind Template Parameter, um problemspezifische Teile schon zur Compilezeit auswerten zu können. Durch Überladen von Standardoperatoren (+, -, *, ...) lassen sich mathematische Formen anwenderfreundlich formulieren, was durch Fast Expression Templates [18] in seiner Effizienz gesteigert wird. Die Bibliothek wird aus Kompatibilitäts- und Flexibilitätsgründen nicht auf das gesamte Gitter des Gebietes angewandt. Vielmehr arbeitet sie elementweise, so kann der Benutzer flexibel seine eigenen Gridstrukturen einbringen. Auch verschiedene Elementtypen innerhalb eines Gitters können eingebunden werden. Colsamm deckt die Standardelemente in 1D, 2D und 3D mit linearen Basisfunktionen ab, ist aber leicht erweiterbar. So ist der Benutzer in der Lage, eigene Elementdefinitionen einzubinden. Dies wird auch durch die bereits integrierten Funktionen zur Berechnung von Determinanten und dimensionsabhängigen Substitutionformeln erleichtert. Hierbei ist ein Element durch folgende Eigenschaften definiert:

1. Die Form des Referenzelementes mit Angabe von Dimension und Eckpunkten,
2. die Formeln für die Transformation vom Referenzelement zu dem Element im Raum und

¹Algebraic Multi Grid

²Conjugate Gradient

³Computation Of Local Stiffness And Mass Matrices

3. der Satz von Ansatz- und Testfunktionen, die im Referenzelement definiert sind.

Das folgende Listing zeigt ein Beispiel für ein Dreieckelement, das für diese Arbeit verwendet wurde:

```

0:  template <Int_Mod t_>
1:  struct _Triangle3D_ : public _Domain_<
2:      _Triangle3D_<t_,T>,          // Elementtyp
3:      B_FN<3>,                    // # Basisfunktionen
4:      3,                          // # Eckpunkten
5:      D3,                          // Dimension
6:      Gauss<t_,triangle>,         // Gauss Quadratur
7:      double,                      // Real oder Komplex
8:      boundary>
9:  {
10:   inline void Basisfunctions (){
11:       Set(1.-X(1) -Y(1) );
12:       Set(  X(1)   );
13:       Set(  Y(1)   );
14:   }
15:   TRANSFORMATION(P_(0)+(P_(1)-P_(0))*X_)+(P_(2)-P_(0))*Y_());
16: };

```

Der Benutzer ist so in der Lage, sich mit dieser Syntax eigene Elemente zu definieren.

Colsamm unterstützt die gebräuchlichen Differentialoperationen, die häufig in einer schwachen Formulierung einer Differentialgleichung auftreten. Des Weiteren erfolgt eine Unterscheidung zwischen Testfunktionen ($w(\cdot)$) und Basisfunktionen ($v(\cdot)$). Die Berechnung der partiellen Ableitungen ($d_{dx}(\cdot)$, $d_{dy}(\cdot)$ und $d_{dz}(\cdot)$) ist, genauso wie die Berechnung des Gradienten ($grad(\cdot)$) einer Funktion, integriert. Auch Kombinationen aus diesen Funktionen sind möglich. So können durch diese Bibliothek ganze mathematische Ausdrücke berechnet werden.

Das folgende Beispiel soll die praktische Anwendung für die Konstruktion der globalen Steifigkeitsmatrix aus Gleichung (3.8) beschreiben. Das Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ist in Dreieckelemente partitioniert:

```

0:  #include "Colsamm.h"
1:
2:
3:  Triangle<Gauss2> my_element;
4:
5:  double *vertices;
6:  double *TestPoint = get_TestPoint();
7:
8:  for(int n = 0; n < number_elements; n++) {
9:      // Hole Knotenkoordinaten (x1,y1,z1,x2,y2,z2, ..., x4,y4,z4)
10:     vertices = element[n].get_vertices_as_array();
11:
12:     // Erstelle ein Colsamm-Element mit den Koordinaten
13:     my_element(vertices);
14:
15:     if( my_element.Point_Test(TestPoint) )
16:         cout << "TestPoint is located inside the Elment << endl;

```

```

17:
18:     // integriere "über Gradient der Test- und basisfunktion
19:     local_A = my_element.int_all(grad(v()) * grad(w()));
20:
21:     // Addiere die Elementbeiträge der lokalen Matrix local_A zu den
22:     // Stellen der globalen Steifigkeitsmatrix global_A
23:     for(int i = 0; i < size_of_ansatz_functions; i++) {
24:         for(int j; j < size_of_testing_functions; j++){
25:             global_A[global_i][global_j] += local_A[i][j];
26:         }
27:     }
28: }

```

Das Beispiel verdeutlicht zwei für diese Arbeit wichtige Funktionen. Neben dem schon beschriebenen Aufstellen der lokalen Steifigkeitsmatrix ist die Bibliothek auch in der Lage, für einen gegebenen Punkt zu testen, ob sich dieser innerhalb des aktuellen Elements befindet (Zeile 15). Für den Aufbau der Matrix wird zuerst ein Dreieckelement deklariert (Zeile 3). Dann werden für jedes Element im Gebiet die Koordinaten des betrachteten Elements geholt (Zeile 10). Mit diesen wird das Colsamm-Element initialisiert (Zeile 13) und anschließend wird in Zeile 19 nach Gleichung (3.8) integriert. Als Ergebnis wird in diesem Fall ein 3x3 'std::vector< std::vector <double> >' zurückgeliefert, der die lokale Steifigkeitsmatrix für das aktuelle Element beinhaltet. Diese Beiträge werden dann an die entsprechenden Stellen der globalen Matrix A, die sich aus den lokalen Indizes ableiten lassen, addiert.

Nachdem nun die Grundlagen der Finiten Elemente und auch die Anwendung der Colsamm Bibliothek beschrieben wurden, kann das für diese Arbeit relevante Problem betrachtet werden.

3.4 Quellrekonstruktion mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode

Im Rückgriff auf das elektrostatische Problem der Quellrekonstruktion wird jetzt der FEM-Ansatz auf die in Kapitel 2 hergeleitete DGL (2.11) angewandt:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) &= \nabla \cdot \vec{j}_s \quad \text{in } \Omega \\ \langle \sigma \nabla \Phi, \vec{n} \rangle &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

1. Die Ausgangsgleichung wird mit einer Testfunktion v multipliziert und danach über das Gebiet Ω integriert:

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) \, d\Omega = \int_{\Omega} v \nabla \cdot \vec{j}_s \, d\Omega \quad (3.11)$$

2. Nach Anwendung partieller Integration kann die linke Seite geschrieben werden als:

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} v \langle \sigma \nabla \Phi, \vec{n} \rangle \, d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} \nabla v (\sigma \nabla \Phi) \, d\Omega \quad (3.12)$$

Da

die Leitfähigkeit der den Kopf umgebenden Luft 0 ist, ist g für die betrachtete Anwendung ebenfalls gleich 0:

$$\langle \sigma \nabla \Phi, \vec{n} \rangle = g = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Und somit wird auch das Randintegral aus Gleichung (3.12) gleich 0 und verschwindet:

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla v (\sigma \nabla \Phi) \, d\Omega \quad (3.13)$$

Aus den bisher angewandten Schritten erhält man also die **Schwache Formulierung** der Ausgangsgleichung (2.11):

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot (\sigma \nabla \Phi) \, d\Omega = \int_{\Omega} v \nabla \cdot \vec{j}_s \, d\Omega \quad (3.14)$$

Wie in Sektion 3.2 findet an dieser Stelle der Übergang zum Diskreten statt. Die bisher als kontinuierlich betrachteten Funktionen Φ und v werden ab jetzt durch eine Linearkombination aus Basisfunktionen φ_i dargestellt und so in den endlich dimensionalen Unterraum V_h überführt:

$$\Phi \approx \Phi_h = \sum_{i=1}^N \Phi_i \varphi_i \quad , \quad v \approx v_h = \sum_{i=1}^N \varphi_i \quad (3.15)$$

Auch hier steht $N = \dim(V_h)$ für die Anzahl der Knoten des Gebietes Ω , Φ_h und v_h stellen die approximierten diskreten Funktionen Φ und v dar. Der Index i bezeichnet den Knoten, an dem die Basisfunktion φ_i den Wert 1 annimmt und an allen anderen Knoten den Wert 0. Diese Diskretisierung wird nun in die Schwache Formulierung (3.14) eingebunden:

$$\int_{\Omega_h} \left(\nabla \left(\sum_{i=1}^N \varphi_i \right) \right) \cdot \left(\sigma \nabla \left(\sum_{j=1}^N \Phi_j \varphi_j \right) \right) \, d\Omega_h = \int_{\Omega_h} \left(\sum_{i=1}^N \varphi_i \right) \nabla \cdot \vec{j}_s \, d\Omega_h \quad (3.16)$$

Diese Gleichung kann man in eine vereinfachte Form bringen, indem man die Summe über j und den gesuchten Lösungsvektor Φ nach außen vor das Integral zieht und das Ganze N mal berechnet (also N Gleichungen einführt):

$$\sum_{j=1}^N \left(\underbrace{\int_{\Omega_h} \nabla \varphi_i \cdot (\sigma \nabla \varphi_j) \, d\Omega_h}_{a_h^{[ij]}} \right) \cdot \Phi_j = \underbrace{\int_{\Omega_h} (\varphi_i) \nabla \cdot \vec{j}_s \, d\Omega_h}_{b_h^{[j]}} \quad \text{für } i = 1, \dots, N \quad (3.17)$$

So entsteht ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$A_h \Phi_h = b_h \quad (3.18)$$

Auch hier wird das Gebiet Ω wieder in Finite Elemente unterteilt. Im Fall dieser Arbeit werden Tetraeder und Hexaeder als Elemente mit linearen Basisfunktionen verwendet. Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix A_h erfolgt elementweise. Das heißt, man berechnet für jedes Element k die Einträge der **lokalen Steifigkeitsmatrix** $a_k^{[ij]}$, die dann die Elementbeiträge der globalen Matrix A_h liefert:

$$a_k^{[ij]} = \int_{\Omega_k} \nabla \varphi_i \cdot (\sigma^k \nabla \varphi_j) \, dx dy dz \quad (3.19)$$

Dies wird wieder durch die affine Abbildung ψ wie oben beschrieben durchgeführt, indem man das Element aus dem Raum auf das Einheits-/Referenzelement abbildet. Der Tensor σ^k stellt die Leitfähigkeit im aktuell betrachteten Element dar. Durch die Definition der Basisfunktionen (Gl. (3.4)) besitzen sie nur einen so genannten **limited support** (kompakter Träger), was eine dünn besetzte Steifigkeitsmatrix zur Folge hat, die an vielen Einträgen den Wert 0 annimmt.

Ebenso wie die Einträge in A_h werden auch die Einträge der rechten Seite elementweise berechnet. Aus globaler Sicht werden die Einträge des Gleichungssystems wie folgt erstellt:

$$A_h^{[ij]} = \int_{\Omega_h} \nabla \varphi_i \cdot (\sigma \nabla \varphi_j) d\Omega_h \quad (3.20)$$

$$b_h^{[j]} = \int_{\Omega_h} (\varphi_j) \nabla \cdot \vec{j}_s d\Omega_h \quad (3.21)$$

Jedoch stößt man an diesem Punkt aufgrund der Singularität, die sich im Quellterm der rechten Seite befindet, auf das Problem:

Wie behandelt man eine Singularität numerisch?

Kapitel 4

Dipolmodelle

In den Kapiteln 2 und 3 wurde bereits die Problematik der singulären Differentialgleichung (2.11) beschrieben. Bis zu dieser Stelle wurden auch die Grundlagen für das Bioelektrische Feldproblem sowie die zur Diskretisierung der linken Seite notwendigen Schritte erläutert, sodass nun auf die Behandlung der Singularität eingegangen werden soll. Es gibt verschiedene Ansätze um mit der Singularität umzugehen. Beispielsweise kann eine **lokale Gitterverfeinerung**, wie in [30] untersucht, zu einer exakteren Modellierung der Singularität führen. Jedoch besteht dabei der Nachteil, dass die dadurch auftretende unregelmäßigere Gitterstruktur eine komplizierte Datenstruktur zur Folge hat.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Anwendung der **Zenger-Korrektur**. Sie verwendet B-Splines, um die Singularität zu approximieren. Wie in [19] für eine Diskretisierung über die Methode der Finiten Differenzen auf regulären Gittern an einem Poisson-Problem gezeigt, kann damit ein geringer Diskretisierungsfehler in einer bestimmten Entfernung von der Singularität erreicht werden, was allerdings für den Nahbereich um die Quelle nicht zutreffen muss.

Im folgenden Kapitel werden drei Verfahren vorgestellt, die das Approximieren der rechten Seite mit genügend kleinem Fehler zum Ziel haben:

- Das **Blurred Dipole Model**, das sich an die Mechanik anlehnt, ist für diese Arbeit gegeben, ist im Programmpaket schon implementiert und wird nur kurz erläutert. Es soll lediglich ebenfalls an den analytischen Lösungen in Mehrschalen-Kugelmodellen validiert und mit den neuen Dipolmodellen verglichen werden.
- Im **Mathematical Dipole Model** wird die Definition der DIRAC'schen Distribution genauer untersucht. Sie stellt einen Spezialfall der Zenger-Korrektur aus [19] dar. Dieses Modell wird als komplett neue Implementierung in das NeuroFEM Projekt aufgenommen.
- Als letztes und am weitesten entwickeltes Modell wird das **Subtraction Dipole Model** beschrieben. Es beinhaltet die Möglichkeit, kontrolliert und mathematisch fundiert Quellen direkt in anisotrope Medien einzuleiten, beispielsweise in den Kortex. Zudem existiert für dieses Dipolmodell eine fundierte Finite-Elemente-Konvergenztheorie, durch die gesichert ist, dass auch im Bereich der Singularität eine hohe Genauigkeit erzielt werden kann. Im NeuroFEM Paket wurde diese Methode im Rahmen der Arbeit neu implementiert und erweitert.

4.1 Blurred Dipole Model

Das **Blurred Dipole Model** verfolgt nicht den Ansatz, die Singularität zu eliminieren, sondern eher das Prinzip, die starke Singularität sowohl räumlich als auch stärkemäßig unter Beibehaltung

des geforderten Dipolmoments zu verteilen.

Hier wird ausgenutzt, dass die Genauigkeit der numerischen Lösung relativ zur exakten Lösung (auch als **differentielle Konvergenz** bezeichnet) von der Stärke der Singularität abhängt [24].

Bei diesem Modell wird die gesetzte dipolare Quelle in eine Reihe von Quellen und Senken aufgeteilt (formuliert in einem Vektor aus K Strom-Monopolen $\underline{j}_l \in \mathbb{R}^K$). Jeder Eintrag $\underline{j}_l^{[k]}$ stellt eine monopole Quelle oder Senke dar. Diese einzelnen Strommonopole werden dann um die Position des betrachteten Dipols an den K benachbarten FEM-Knoten $k \in \{1 \dots, K\}$ platziert. Dadurch lässt sich das zu berechnende Potential als eine glattere Funktion darstellen, denn die Summe der Potentiale aus den Quellen und Senken ergibt das gesuchte Φ . So wird eine räumliche Streuung der Singularität erreicht, welche ein durchaus realitätsnahes Modell für die physiologischen Prozesse im Kortex darstellt [5, 36].

In [5, 36] wird gezeigt, wie sich das Moment eines Dipols $\vec{M}_s \in \mathbb{R}^3$ an der Position \vec{x}_s in eine Gleichung fassen lässt:

$$\vec{M}_s = \int_{\Omega} (\vec{x} - \vec{x}_s) \vec{j}_s(\vec{x}) d\Omega \quad (4.1)$$

Ersetzt man den Dipol durch eine Reihe von Quellen und Senken an den diskreten Stellen in seiner Nachbarschaft, so kann man Gleichung (4.1) folgendermaßen transformieren:

$$\vec{M}_s = \sum_{k=1}^K \Delta \vec{x}_{ks} \underline{j}_k^{[k]} \quad (4.2)$$

Der Ausdruck $\Delta \vec{x}_{ks}$ stellt den Vektor von Knoten k zu Knoten s dar.

Diese Methodik stammt aus dem Bereich der Mechanik, in der die Prinzipien der Hebelgesetze angewandt werden: Ein langer Hebel benötigt einen geringen Kraftaufwand für ein bestimmtes Moment, ein kurzer Hebel benötigt im Gegensatz dazu einen wesentlich höheren Kraftaufwand, um das gleiche Moment zu erzeugen.

Unter Nutzung obiger Gleichung und durch Lösen eines über die Tikhonov-Methode regularisierten Systems werden die Quellen und Senken berechnet, welche das gegebene Dipolmoment mit möglichst geringer Monopolamplitude ideal erfüllen, sodass sich für die Berechnung der rechten Seite aus Gleichung (3.18) ergibt:

$$b_h^{[i]} = \begin{cases} \underline{j}_l^{[k]} & \text{falls } \exists k \in \{1, \dots, K\} : i = \text{GLOB}(k) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.3)$$

für eine dipolare Quelle an der Position \vec{x}_s . Die Funktion **GLOB** ist eine Abbildung, die den globalen Index i in Bezug auf den lokalen Index k ermittelt. Das heißt, es gibt einen Eintrag $b_h^{[i]}$, wenn i ein benachbarter Knoten um den Dipol ist, an den eine monopole Quelle oder Senke gelegt ist.

Die Vorteile dieser Methode liegen einerseits in der dünn besetzten rechten Seite der Gleichung. Da nur eine feste Anzahl von Knoten bearbeitet wird, sind nur wenige Einträge ungleich 0.

Wie in [5, 36] und in Kapitel 6 beschrieben kann zudem bzgl. der Approximation des blurred dipole an einen mathematischen Stromdipol eine hohe Genauigkeit für die simulierte Potentialverteilung in genügender Entfernung von der Quelle erreicht werden.

Die Nachteile liegen zunächst in der fehlenden FE-Konvergenztheorie bei Verwendung des blurred dipoles sowie in der Unsicherheit bzgl. des Einleitens einer solchen Quelle in anisotropen Medien. Bei größeren Netzen besteht zudem die Gefahr, dass Monopole in anatomisch unsinnige Bereiche gesetzt werden. Des weiteren ist mit Modellierungsproblemen zu rechnen, falls sich bei Verwendung von Tiefenelektroden in der Epilepsie-Diagnose die Messpositionen in der Nähe der Quelle befinden.

4.2 Mathematical Dipole Model

Auch hier wird von der in Kapitel 3 evaluierten Gleichung (3.21) ausgegangen. Für das mathematical dipole model wird auf der rechten Seite zunächst partielle Integration angewandt:

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot \vec{j}_s \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} v \left(\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial \vec{n}} \right) d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot \vec{j}_s \, d\Omega \quad (4.4)$$

Man geht davon aus, dass es keine Quelle an der Oberfläche des Leiters gibt (Kopfhaut), das heißt für das Randintegral:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial \vec{n}} &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \\ \Rightarrow \int_{\partial\Omega} v \left(\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial \vec{n}} \right) d(\partial\Omega) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Und somit wird die rechte Seite zu:

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot \vec{j}_s \, d\Omega = - \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot \vec{j}_s \, d\Omega \quad (4.6)$$

Der Dipol wird in diesem Fall als Mathematischer Dipol (Gl. (2.15)) definiert. Wird dieser in Gleichung (4.6) eingesetzt, können folgende Schritte durchlaufen werden:

Setze

$$\vec{j}_s^{Math}(\vec{x}) = \vec{M} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

in

$$b_h^{[i]} = \int_{\Omega_h} \nabla \varphi_i(\vec{x}) \cdot \vec{j}_s(\vec{x}) \, d\Omega_h \quad \text{für } i = 1, \dots, N$$

ein:

$$b_h^{[i]} = \int_{\Omega_h} \nabla \varphi_i(\vec{x}) \cdot \vec{M} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \, d\Omega_h \quad \text{für } i = 1, \dots, N \quad (4.7)$$

$$= \vec{M} \cdot \int_{\Omega_h} \nabla \varphi_i(\vec{x}) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \, d\Omega_h \quad \text{für } i = 1, \dots, N \quad (4.8)$$

$$= \vec{M} \cdot \nabla \varphi_i(\vec{x}_0) \quad \text{für } i = 1, \dots, N \quad (4.9)$$

Der Übergang von Gleichung (4.8) zu Gleichung (4.9) kann durch die Definition des Integrals über die δ -Funktion in [4] auf Seite 716 durchgeführt werden.

$$\int f(\vec{x}) \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) \quad (4.10)$$

Das heißt, um die rechte Seite mit diesem Modell berechnen zu können, muss an erster Stelle das Element gefunden werden, das den Dipol beinhaltet. Zur Vermeidung eines hohen Rechenaufwandes wird dies in zwei Schritten bewerkstelligt.

1. Um nicht in jedem Element explizit nach dem Dipol suchen zu müssen, wird die Suche auf Elemente eingeschränkt, die eine maximale Distanz zum Dipol unterschreiten. Diese werden einfach gefunden, indem der Abstand eines Knotens in einem Element zur Dipolposition berechnet wird.
2. Für die Elemente, die sich in einem gewissen Umkreis um den Dipol befinden, kommt wieder die C++-Bibliothek **Colsamm** zum Einsatz. Wie in Sektion 3.3 schon beschrieben, kann man mit ihrer Hilfe testen, ob ein gegebener Punkt innerhalb eines Elementes liegt. Dies wird für jedes Element getestet, das sich in der engeren Auswahl befindet.

Colsamm arbeitet diesbezüglich mit den sogenannten **Baryzentrischen Koordinaten**. Diese werden oft in der Computergrafik angewandt. Sie transformieren ein Simplex, bestehend aus den Eckpunkten $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, in einen eigenen, nicht-orthogonalen Raum, in dem beispielsweise \vec{x}_1 den Ursprung darstellt. Als Beispiel wird an dieser Stelle ein Dreieck in 2D betrachtet, das aus den Eckpunkten \vec{x}_1, \vec{x}_2 und \vec{x}_3 besteht. Stellt man nun \vec{x}_1 als den Ursprung des Koordinatensystems dar, so bilden die Vektoren $(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$ und $(\vec{x}_3 - \vec{x}_1)$ die Basisvektoren. Das heißt, jeder Punkt \vec{p} im Raum kann durch eine Linearkombination aus \vec{x}_1, \vec{x}_2 und \vec{x}_3 dargestellt werden:

$$\vec{p} = \alpha \vec{x}_1 + \beta (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + \gamma (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)$$

Hier bilden α, β und γ die so genannten **Baryzentrischen Koordinaten** des Punktes \vec{p} . Als eine besondere Eigenschaft gilt: Wenn sich die Baryzentrischen Koordinaten eines Punktes zu 1 aufsummieren, liegt dieser Punkt innerhalb des Dreiecks, und allgemein des Simplex [27].

Ist das Quellelement gefunden, so wird mittels der Colsamm-Bibliothek Gleichung (4.9) gelöst. Dies wird durch den folgenden vereinfachten Code-Abschnitt beschrieben:

```

0: #include "Colsamm.h"
1:
2:
3: Tetrahedron<Gauss2> my_element;
4:
5: double *vertices;
6: double *DipolePos = get_Dipole();
7: double *DipoleMoment = get_Moment();
8:
9: double *d_dx, d_dy, d_dz;
10:
11: for(int n = 0; n < number_elements; n++) {
12:     // Hole Knotenkoordinaten (x1,y1,z1,x2,y2,z2, ..., x4,y4,z4)
13:     vertices = element[n].get_vertices_as_array();
14:
15:     // Erstelle ein Colsamm-Element mit den Koordinaten
16:     my_element(vertices);
17:
18:     // Teste, ob Dipol im aktuellen Element liegt
19:     if( my_element.Point_Test(DipolePos) ) {
20:         cout << "Dipole is located inside the Elment << endl;
21:
22:         my_element.Point_(DipolePos);
23:         d_dx = my_element.value(d_dx(v()));
24:         d_dy = my_element.value(d_dy(v()));
25:         d_dz = my_element.value(d_dz(v()));
26:
27:         // Addiere die Elementbeitr"age zu den
28:         // Stellen der globalen rechten Seite global_b
29:         for(int i = 0; i < number_of_nodes_per_element; i++) {
30:             global_b[global_i] += ( (DipoleMoment[0] * d_dx[i])
31:                                     +(DipoleMoment[1] * d_dy[i])
32:                                     +(DipoleMoment[2] * d_dz[i]) );

```

```

33:         }
34:     }
35: }

```

Wie auch im Beispiel in Sektion 3.3 wird ein Element erstellt und initialisiert. Nun werden nach dem Test, ob der Dipol innerhalb des Elements liegt, die Gradientenkomponenten für Gleichung (4.9) berechnet (Zeilen 23 - 25). In diesem Beispiel bestehen die Vektoren d_dx , d_dy und d_dz aus 4 Komponenten, entsprechen der Anzahl der Knoten in einem Tetraeder. Der so berechnete Gradient in jedem Knoten wird in einem Skalarprodukt mit dem Dipolmoment multipliziert und das Ergebnis dann als Elementbeitrag auf die entsprechende Stelle der globalen rechten Seite addiert (Zeilen 29 - 33).

Durch diese Methode erhält man eine sehr dünn besetzte rechte Seite, was dazu führt, dass unter Verwendung des Lead Field Basen Ansatzes [37] eine extrem schnelle Lösung des EEG/MEG Vorwärtsproblems erreicht wird. Durch einige wenige Änderungen kann diese Methode auch auf den Feynman-Dipol (Gl. (2.14)) umgeschrieben werden. Des Weiteren wird dieser Ansatz in [19] mit der Methode der Finiten Differenzen auf regulären Gittern implementiert und getestet wie auch eine Fehlertheorie hergeleitet. Eine ausgereifte Theorie über das Einleiten der Quelle bei Verwendung von Finiten Elementen auf nicht-regulären Gittern in isotropen und anisotropen Medien existiert noch nicht, was einen Nachteil dieses Modells darstellt.

Wie in [21] und in Kapitel 6 gezeigt wird, ist die numerische Approximationsgüte dieses Modells für den isotropen Fall allerdings in vielen Fällen durchaus befriedigend, falls die Messsensoren nicht zu nahe an der Quelle platziert sind. Im anisotropen Fall wurden in [21] allerdings inakzeptabel grosse Fehler festgestellt.

4.3 Subtraction Dipole Model

Das dritte Dipol-Modell wendet die **Subtraktions-Methode** an, die in der Literatur in verschiedenen Arten der Implementierung zu finden ist [2, 32, 30, 25, 36].

Bei dieser Methode wird das gesuchte Potential Φ in zwei additive Teile aufgeteilt:

$$\Phi = \Phi^\infty + \Phi^{corr} \quad (4.11)$$

Hierbei bildet Φ^∞ das so genannte **Singularitätenpotential** und Φ^{corr} wird als **Korrekturpotential** bezeichnet. Φ^∞ stellt das Potential des gegebenen Dipols in einem unbegrenzten homogenen Leiter mit konstantem anisotropem Leitfähigkeitstensor σ^∞ , der Leitfähigkeit an der Quellposition, dar. Φ^{corr} bezeichnet das so genannte Korrekturpotential, das, wie der Name schon sagt, Φ^∞ aus dem unendlichen homogenen Raum in das betrachtete Volumen korrigiert, sodass die Summe der beiden das gesuchte Potential im approximierten kopfförmigen Leiter ergibt.

Ebenso wie Φ wird die Leitfähigkeit σ wie in Gleichung (4.12) gesplittet:

$$\sigma = \sigma^\infty + \sigma^{corr} \quad (4.12)$$

Hier stellt σ^∞ , wie schon erwähnt, die Leitfähigkeit an der Quellposition dar.

Diese Aufteilungen können nun schrittweise in die Ausgangsgleichung (2.11) eingebracht werden:

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) &= & \nabla \cdot \vec{j}_p \\
\Leftrightarrow & \nabla \cdot (\sigma \nabla (\Phi^{corr} + \Phi^\infty)) &= & \nabla \cdot \vec{j}_p \\
\Leftrightarrow & \nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{corr}) + \nabla \cdot ((\sigma^\infty + \sigma^{corr}) \nabla \Phi^\infty) &= & \nabla \cdot \vec{j}_p \\
\Leftrightarrow & \nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{corr}) + \nabla \cdot (\sigma^\infty \nabla \Phi^\infty) + \nabla \cdot (\sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty) &= & \nabla \cdot \vec{j}_p
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Zunächst widmen wir uns der Lösung von Φ^∞ . Hierzu betrachtet man den rot markierten Teil der Gleichung (4.13) und isoliert ihn

$$\nabla \cdot (\sigma^\infty \nabla \Phi^\infty) = \nabla \cdot \vec{j}_p \tag{4.14}$$

Wir widmen uns zunächst dem Fall, dass die Leitfähigkeit in einem Bereich um die Quelle konstant und isotrop ist, d.h., σ^∞ ein skalarer Wert ist. Nach erfolgter Diskretisierung in Finite Elemente wird später z.B. davon ausgegangen, dass die Quelle in einem Element mit konstanter isotroper Leitfähigkeit liegt und nicht direkt an einem Leitfähigkeitssprung. Da der Leitfähigkeitswert σ^∞ also der konstante isotrope Wert an der Quelle ist, kann man ihn auf die rechte Seite bringen und die Beziehung [4]

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \Delta \Phi \tag{4.15}$$

anwenden, was in folgende Poisson-Gleichung für Φ^∞ resultiert:

$$\Delta \Phi^\infty = \frac{1}{\sigma^\infty} \nabla \cdot \vec{j}_p \tag{4.16}$$

Im unendlich ausgedehnten Medium existiert für konstantes isotropes Φ^∞ folgende allgemeine analytische Lösung [36]:

$$\Phi^\infty(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\sigma^\infty} \int_{\Omega} \frac{\nabla \cdot \vec{j}^p(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' \tag{4.17}$$

Aus der allgemeinen Gleichung (4.17) lassen sich nun die – je nach verwendeter Dipol-Definition (Feynman oder Mathematischer Dipol) – endgültigen Lösungen für Φ^∞ ableiten:

1. Feynman Dipol:

$$\Phi_{Feyn}^\infty(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\sigma^\infty} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_{so}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_{si}|} \right) \tag{4.18}$$

2. Mathematischer Dipol:

$$\Phi_{Math}^\infty(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\sigma^\infty} \frac{\langle \vec{M}, (\vec{x} - \vec{x}_0) \rangle}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} \tag{4.19}$$

In dieser Arbeit wurde für dieses Modell ausschließlich der Mathematische Dipol eingesetzt. Eine Erweiterung auf den Feynman Dipol lässt sich jedoch mit geringem Aufwand durchführen. Des Weiteren wird für eine spätere Erweiterung zum Einbringen von Quellen in anisotropen Medien die Leitfähigkeit nicht mehr als Skalarwert ($\sigma \in \mathbb{R}$) verwendet, vielmehr wird in der Implementierung in beiden Fällen – isotrop und anisotrop – mit Tensoren ($\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$) gerechnet. Aus diesem Grund ist es nötig, Gleichung (4.19) unter Verwendung von Tensoren umzuformen. Es ergibt sich im unendlich ausgedehnten Medium unter Annahme eines konstanten anisotropen Φ^∞ um die Quelle herum folgende Gleichung:

$$\Phi^\infty(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \sigma^\infty}} \frac{\langle \vec{M}, \sigma^{\infty-1}(\vec{x} - \vec{x}_0) \rangle}{(\langle \sigma^{\infty-1}(\vec{x} - \vec{x}_0), (\vec{x} - \vec{x}_0) \rangle)^{3/2}} \tag{4.20}$$

Durch das Aufteilen des gesuchten Potentials hat man erreicht, dass die Singularität nur noch in dem Teil vorhanden ist, der analytisch lösbar ist und für den diese Lösung auch bekannt ist.

Nun muss allerdings Φ^{corr} die realitätsferne Annahme aufheben, dass es sich um einen unendlich ausgedehnten Leiter mit konstanter Leitfähigkeit handelt. Φ^{corr} muss also dafür Sorge tragen, dass im Gebiet überall dort Korrekturströme angesetzt werden, wo der realistische Volumenleiter diese Annahme nicht erfüllt. Der Vorteil ist, dass das Gleichungssystem für Φ^{corr} , wie im Folgenden gezeigt wird, keine Singularität mehr enthalten wird.

Bringt man die bis jetzt gewonnenen Erkenntnisse in die umformulierte Gleichung (4.13) ein (wieder rot gekennzeichnet), so kann man diese weiter umformen:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \nabla(\sigma \nabla \Phi^{corr}) + \nabla(\sigma^\infty \nabla \Phi^\infty) + \nabla(\sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty) = \nabla \vec{j}_p \\
&\Leftrightarrow \nabla(\sigma \nabla \Phi^{corr}) + \nabla(\sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty) = 0 \\
&\Leftrightarrow \nabla(\sigma \nabla \Phi^{corr}) = -\nabla(\sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Wendet man die Aufteilung von Φ auch auf die Randbedingung der Gleichung (2.11) an, so erhält man zusammen mit der eben abgeleiteten Gleichung für Φ^{corr} eine neue Poisson-Gleichung mit inhomogenen Neumann Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{corr}) &= -\nabla \cdot (\sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty) \quad \text{in } \Omega \\
\langle \sigma \nabla \Phi^{corr}, \vec{n} \rangle &= -\langle \sigma \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle \quad \text{auf } \partial\Omega
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Um diese Gleichung numerisch anzunähern, wird wieder der Ansatz der Finiten Elemente aus Kapitel 3 angewandt:

- Einfügen der Testfunktion v :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{corr}) v \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty) v \, d\Omega$$

- Partielle Integration liefert:

$$\Leftrightarrow - \int_{\Omega} \nabla v \sigma \nabla \Phi^{corr} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \langle \sigma \nabla \Phi^{corr}, \vec{n} \rangle v \, d(\partial\Omega) = \int_{\Omega} \nabla v \sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \langle \sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle v \, d(\partial\Omega)$$

- Durch die Neumann Randbedingung aus Gleichung (4.22) kann der blaue Term ersetzt werden

$$\langle \sigma \nabla \Phi^{corr}, \vec{n} \rangle = - \langle \sigma \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle$$

$$\Leftrightarrow - \int_{\Omega} \nabla v \sigma \nabla \Phi^{corr} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \langle \sigma \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle v \, d(\partial\Omega) = \int_{\Omega} \nabla v \sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \langle \sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle v \, d(\partial\Omega)$$

- und durch weiteres Umformen die Φ^{corr} - und Φ^∞ -Terme jeweils auf eine Seite der Gleichung gebracht werden:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow - \int_{\Omega} \nabla v \sigma \nabla \Phi^{corr} d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla v \sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty d\Omega \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \langle \sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle v d(\partial\Omega) + \int_{\partial\Omega} \langle \sigma \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle v d(\partial\Omega) \\ \Leftrightarrow - \int_{\Omega} \nabla v \sigma \nabla \Phi^{corr} d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla v \sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty d\Omega + \int_{\partial\Omega} \langle (-\sigma^{corr} + \sigma) \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle v d(\partial\Omega) \\ \Leftrightarrow - \int_{\Omega} \nabla v \sigma \nabla \Phi^{corr} d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla v \sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty d\Omega + \int_{\partial\Omega} \langle \sigma^\infty \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle v d(\partial\Omega) \end{aligned}$$

- Aus programmiertechnischen Gründen wird nun noch die gesamte Gleichung mit -1 multipliziert. Das Ergebnis bildet die **Schwache Formulierung** des Subtraction Models

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla v \sigma \nabla \Phi^{corr} d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla v \sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty d\Omega - \int_{\partial\Omega} \langle \sigma^\infty \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle v d(\partial\Omega) \quad (4.23)$$

- Führt man nun wie in Kapitel 3 den Übergang in den Teilraum V_h mit den Linearkombinationen zunächst für v durch

$$v \approx v_h = \sum_{i=1}^N \varphi_i \quad ,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_{\Omega_h} \nabla \varphi_i \sigma \nabla \Phi^{corr} d\Omega_h &= - \int_{\Omega_h} \nabla \varphi_i \sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty d\Omega_h \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_h} \langle \sigma^\infty \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle \varphi_i d(\partial\Omega_h) \end{aligned} \quad (4.24)$$

für alle $i = 1, \dots, N$

Im nächsten Schritt führt man den Übergang in den Teilraum V_h auch für Φ^∞ und Φ^{corr} durch:

$$\Phi^\infty \approx \Phi_h^\infty = \sum_{j=1}^N \Phi_j^\infty \varphi_j \quad , \quad \Phi^{corr} \approx \Phi_h^{corr} = \sum_{j=1}^N \Phi_j^{corr} \varphi_j,$$

Es sei darauf hingewiesen, dass im Bereich der Quelle die Näherung von Φ^∞ durch Φ_h^∞ sehr schlecht sein wird. Da allerdings die Korrekturleitfähigkeit σ^{corr} im Bereich der Quelle gleich 0 ist, wird sich dieser Fehler im Volumenintegral auf der rechten Seite in Gleichung (4.23) somit nicht auswirken, sodass die Projektion von Φ^∞ in den Raum der linearen Finiten Elemente aus diesem Grunde hier ausreichend sein sollte. Je näher allerdings die Quelle an einen Leitfähigkeitssprung gerät, desto fehlerträchtiger wird die Berechnung dieses Volumenintegrals über

Φ_h^∞ . Nach Einsetzen erhält man:

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^N \underbrace{\left(\int_{\Omega_h} \nabla \varphi_i \sigma \nabla \varphi_j d\Omega_h \right)}_{K_h^{[ij]}} \cdot \Phi_j^{corr} = - \sum_{j=1}^N \underbrace{\left(\int_{\Omega_h} \nabla \varphi_i \sigma^{corr} \nabla \varphi_j d\Omega_h \right)}_{\tilde{K}_h^{[ij]}} \cdot \Phi_j^\infty - \sum_{j=1}^N \underbrace{\left(\int_{\partial\Omega_h} \langle \sigma^\infty \nabla \varphi_j, \vec{n} \rangle \varphi_i d(\partial\Omega_h) \right)}_{S_h^{[ij]}} \cdot \Phi_j^\infty$$

für alle $i = 1, \dots, N$

(4.25)

- Hieraus entsteht ein Gleichungssystem der Form:

$$K_h \Phi_h^{corr} = \tilde{K}_h \Phi_h^\infty + S_h \Phi_h^\infty \quad (4.26)$$

Es gilt nun, dieses Gleichungssystem im Programm aufzustellen. Um die einzelnen Matrizen K_h , \tilde{K}_h und S berechnen zu können, werden mehrere Schritte durchlaufen. K_h und \tilde{K}_h können problemlos elementweise, wie in Kapitel 3 beschrieben, aufgestellt werden. In dieser Arbeit werden diese Matrizen mit Hilfe einer bereits implementierten Fortran Routine berechnet.

Für S hingegen muss zuerst die Oberfläche $\partial\Omega$ bestimmt werden. Hierzu wurde folgende Eigenschaft eines Oberflächenelements ausgenutzt: Eine Fläche eines Elements liegt genau dann an der Oberfläche, wenn kein anderes Element diese Fläche besitzt. Im Programm wurde dies umgesetzt, indem man für jeden Knoten eine Liste mit den Elementen erstellt hat, in denen dieser Knoten enthalten ist. Will man herausfinden, ob die Fläche eines Elements eine gesuchte Oberfläche ist, bildet man die Schnittmenge aus den Elementlisten der beteiligten Knoten. Besteht diese Schnittmenge nur aus einem Element, so ist eine Oberfläche gefunden. Eine schematische Darstellung dieser Oberflächenextrahierung ist in Abbildung 4.1 zu sehen.

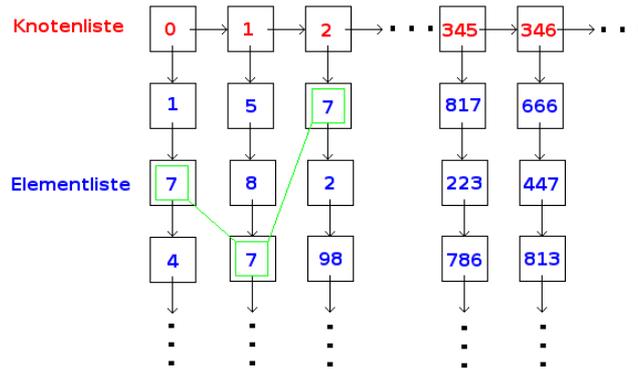


Abbildung 4.1: Eine Liste über alle Knoten. An jedem Knoten hängt eine Liste mit den dazugehörigen Elementen (am Beispiel Tetraeder). Die Knoten 0, 1 und 2 haben nur Element Nr. 7 gemeinsam; somit bilden sie ein Oberflächendreieck.

Ist die Fläche eines Elements eine Oberfläche des Gebiets Ω , so wird dieses Finite Element mit Hilfe der affinen Abbildung (siehe Kapitel 3) auf das Referenz-Element abgebildet. Dies wird wieder

durch die C++-Bibliothek Colsamm vereinfacht. Mit ihrer Hilfe wird dann die Gleichung für S lokal gelöst und somit die Elementbeiträge für die globale Matrix S bestimmt.

Eine einfache Möglichkeit zur Berechnung des Oberflächenintegrals über eine Funktion von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R} ist über folgende Definition gegeben ([13], Seite 507, Definition 208.16): Ist T eine Fläche mit dem Parameterbereich K und f ein stetiges Skalarfeld auf $T(K)$, so nennt man

$$\int_T f dT := \int_K f(T(u, v)) \left| \frac{\partial T}{\partial u} \times \frac{\partial T}{\partial v} \right| d(u, v) \quad (4.27)$$

das Oberflächenintegral von f über T .

In dieser Arbeit wurde zur Vereinfachung die Matrix S nicht wie im letzten Teil der Gleichung (4.25) berechnet, sondern die lineare Approximierung der Normalenableitung von Φ^∞ wurde in eine konstante Approximierung über jedes Dreieck T vereinfacht:

$$- \int_T \langle \sigma^\infty \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle \varphi_i dT \approx - \langle \sigma^\infty \nabla \Phi^\infty, \vec{n} \rangle_{sp} \int_T \varphi_i dT \quad \text{für alle } i = 1, \dots, N$$

Da man die analytische Formel kennt, kann die Normalenableitung für Φ^∞ berechnet werden.

Hierbei bedeutet **sp**, dass die Normalenableitung jeweils im Schwerpunkt des betrachteten Oberflächenelements berechnet wird. Durch diese konstante Approximierung ändert sich auch das Gleichungssystem von Gleichung (4.26) zu

$$K_h \Phi_h^{corr} = \tilde{K}_h \Phi_h^\infty + Q_h \quad (4.28)$$

da hier Φ^∞ nicht mit in den diskretisierten Raum überführt wird.

Das Auswerten des Vektors $Q_h \in R^N$ erfolgt somit in drei Teilen für jedes Element:

1. Berechne für eine gefundene Oberfläche die Normalenableitung von Φ^∞ analytisch
2. BUSTER
3. Berechne die lokalen Einträge für ein Erstelle die lokale Steifigkeitsmatrix für S_h
4. Addiere das Produkt aus Elementbeitrag und Normalenableitung auf die entsprechende Stelle der globalen Matrix S_h

Sind die Matrizen aufgestellt (\tilde{K}_h und S_h können zusammengefasst werden), so kommen geeignete Löser wie AMG oder CG zum Einsatz, um dieses Gleichungssystem zu lösen.

Am Ende der oben beschriebenen Schritte liegen nun die beiden diskretisierten Teile für Φ in Form von Φ^∞ und Φ^{corr} vor. Das Addieren der beiden Teile ergibt die vollständige Lösung des Ausgangsproblems (Gleichung (2.11)).

Der Vorteil dieses Modells besteht darin, dass die Singularität in vollständig eliminiert wird und durch die bekannten Formeln des Singularitätenpotentials für den Feynman Dipol (Gleichung (2.14)) als auch für den Mathematischen Dipol (2.15) ist das System stets auf den gewünschten Ansatz erweiterbar. Der wohl größte Vorteil dieser Methode ist die Möglichkeit der Quelleinspeisung in anisotropem Gewebe. Durch die analytische Lösung des Singularitätenpotentials, die auch für tensorwertige (also auch anisotrope) Leitfähigkeiten bekannt ist, ist das Modell in der Lage, Quellen in anisotropen Medien zu berechnen. Einen Nachteil des Ansatzes bildet die stark besetzte rechte Seite der DGL zur Berechnung von Φ^{corr} . Aus der großen Anzahl von Einträgen ungleich 0 resultiert ein hoher Aufwand bei der Lösung des Gleichungssystems.

Die Abbildungen 4.2 und 4.3 zeigen die Zusammensetzung aus Korrektur- und Singularitätenpotential an einem Beispiel. Es ist jeweils ein Dipol in tangentialer und radialer Ausrichtung visualisiert.

In dem für diese Arbeit zur Verfügung gestellten Programmpaket NeuroFEM sind die drei oben beschriebenen Ansätze zu Behandlung der singulären Differentialgleichung (2.11) implementiert. In den nächsten Kapiteln sollen sie anhand verschiedener Kriterien getestet und validiert werden.

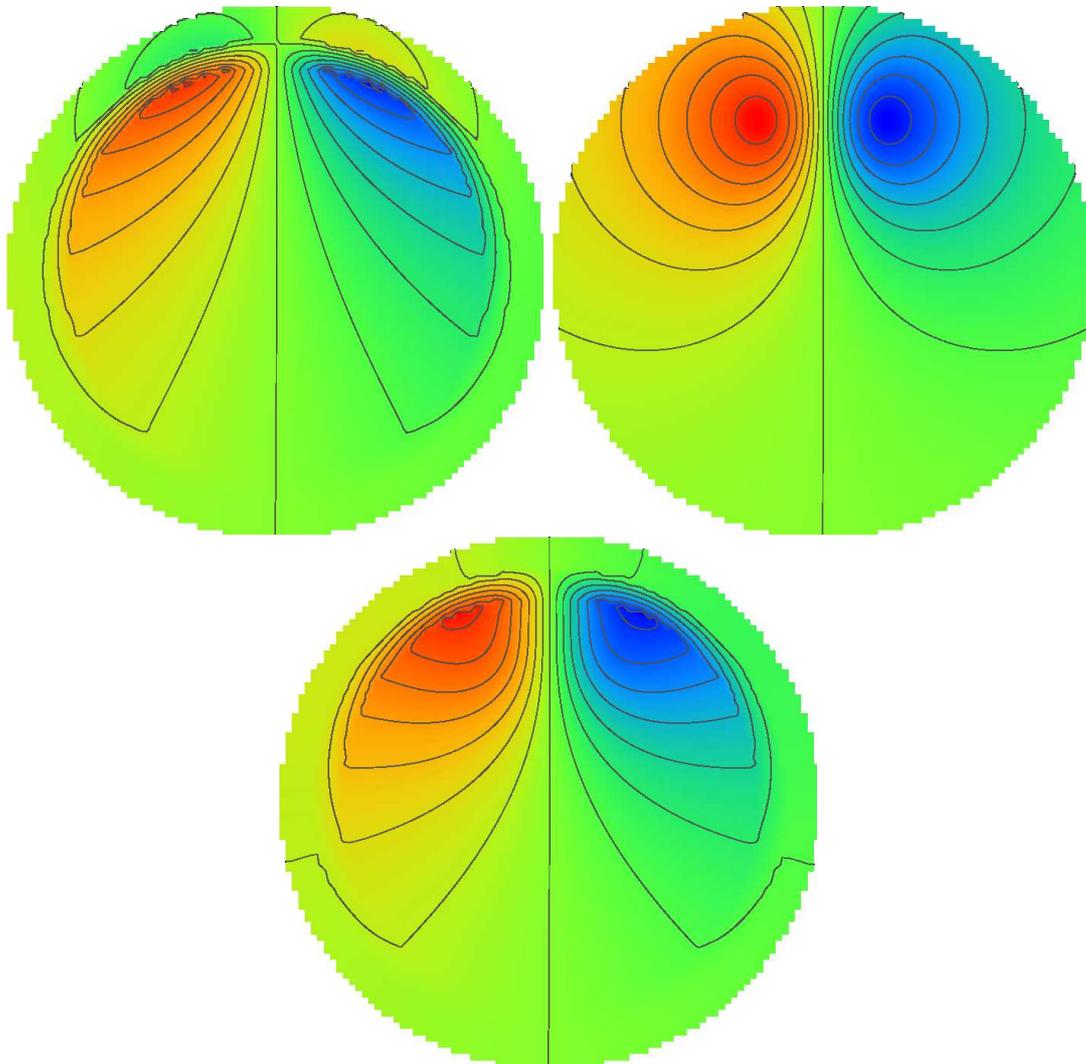


Abbildung 4.2: Korrekturpotential (oben links), Singularitätenpotential (oben rechts) und Ergebnispotential (unten) eines Dipols, 49 mm in y-Richtung verschoben. Tangentiale Ausrichtung in einem 2-mm-Hexaedernetz

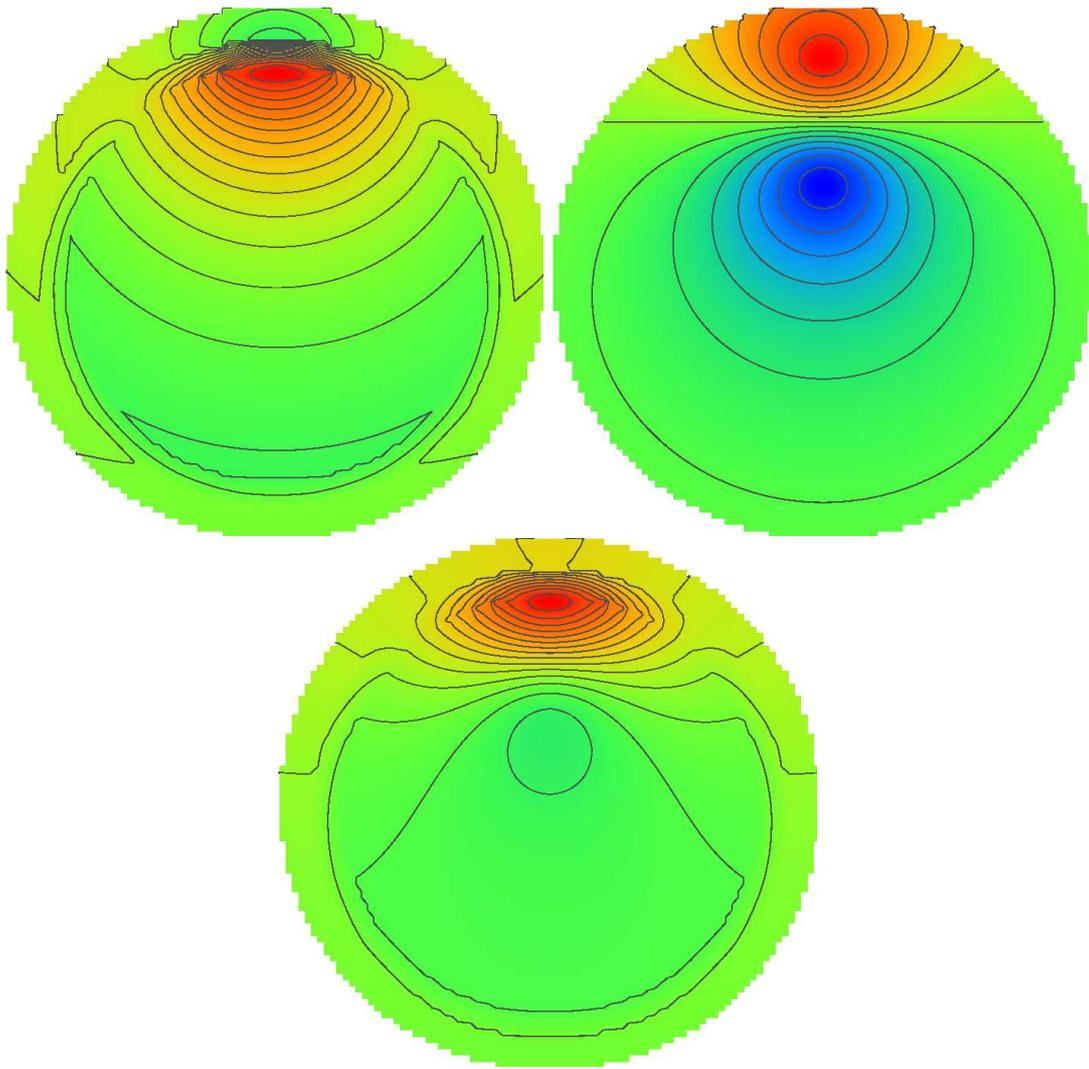


Abbildung 4.3: Korrekturpotential (oben links), Singularitätenpotential (oben rechts) und Ergebnispotential (unten) eines Dipols, 49 mm in y-Richtung verschoben. Radiale Ausrichtung in einem 2-mm-Hexaedernetz

Kapitel 5

Die Validierplattform

Die im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Methoden zur Behandlung der Singularität in Gleichung (2.11) basieren auf sehr unterschiedlichen Ansätzen. Dies hat zur Folge, dass bei verschiedenen Problemkonfigurationen auch unterschiedliche Reaktionen zu erwarten sind. Es stellt sich die Frage, wie sich der numerische Fehler wann, wo und unter welchen Gegebenheiten verändert, bzw. welche Faktoren die Genauigkeit und die Güte der durch die drei Methoden berechneten Quellen beeinflussen.

Im folgenden Kapitel wird eine Validierplattform aufgebaut, mit deren Hilfe sich verschiedene Szenarien darstellen lassen und ein Gütevergleich der drei Modelle durchgeführt werden kann.

5.1 Die analytische Lösung

Grundlage für jeden Vergleich ist die Möglichkeit, eine analytische Lösung für eine gegebene Konfiguration zu berechnen. Für diese Arbeit wurde eine Methode herangezogen, die in den Artikeln von J. C. de Munck ([8] und [7]) genau hergeleitet und erklärt wird. Es ist möglich, eine harmonische Reihenentwicklung zu formulieren, durch die die Potentialverteilung (Lösung für Gleichung (2.11)) berechnet werden kann, die von einer dipolaren Quelle ausgeht. Die beschriebene Quelle befindet sich hierbei in einem Mehrschalen-Kugelmodell mit stückweise konstanten Leitfähigkeiten. Diese werden schichtweise in radialer und tangentialer Richtung definiert und können sowohl isotrop als auch anisotrop sein (Abbildung 5.1). Ebenso können unterschiedlich komplexe Modelle eingeführt werden: die homogene Kugel, eine 3-Schicht-Kugel oder auch eine 4-Schicht-Kugel.

Im folgenden Unterkapitel wird ein kurzer Einblick in die Formulierung der analytischen Lösung gegeben. Für genauere Ausführungen sei auf [8] und [7] verwiesen. Um die im Folgenden beschriebenen Formeln besser in die Literaturquellen einordnen zu können, werden (bis auf das gesuchte Potential Φ) die Notationen aus den Artikeln verwendet.

Per Definition kann man das Potential in einem Punkt \vec{x}_e (EEG-Elektrode) eines an der Stelle \vec{x}_0 liegenden Dipols durch den Gradienten des Monopol-Potentials ausdrücken:

$$\Phi(\vec{x}_0, \vec{x}_e) = \vec{Q} \cdot \nabla_0 \Phi_{mon}(\vec{x}_0, \vec{x}_e) \quad (5.1)$$

\vec{Q} bezeichnet den Dipolvektor (Moment) und ∇_0 bedeutet, dass der Gradient in Bezug auf \vec{x}_0 , den Quellpunkt, berechnet wird. Im weiteren Verlauf wird angenommen, dass der Leiter kugelförmig und symmetrisch ist und die Leitfähigkeit durch die Einzelkomponenten radiale und tangentiale Leitfähigkeit definiert wird. Diese sind ausschließlich abhängig vom Radius r des Leiters. Durch die Einführung des kugelförmigen Leiters kann das Potential des Monopols als eine Funktion über die

radialen Koordinaten der Quelle r_0 und Elektrode r_e sowie über den Winkel zwischen Quelle und Elektrode ω_{0e} beschrieben werden:

$$4\pi\Phi_{mon}(\vec{x}_0, \vec{x}_e) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)R_n(r_0, r_e)P_n(\cos \omega_{0e}) \quad (5.2)$$

Hier bezeichnen $P_n(\cdot)$ die so genannten **Legendre'schen Polynome** (oder Kugelfunktion) ([4], Seite 507) und die Koeffizienten $R_n(\cdot, \cdot)$ sind die Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \epsilon(r) \frac{\partial}{\partial r} R_n(r_0, r) \right) - n(n+1)\eta(r)R_n(r_0, r) = \delta(r_0 - r) \quad (5.3)$$

In Gleichung (5.3) stellen $\epsilon(r)$ und $\eta(r)$ die radiale bzw. tangentialen Leitfähigkeit des Volumen dar. Für die Lösung der DGL (5.3) sei wieder auf die Artikel von De Munck ([8] und [7]) verwiesen. Es sei nur kurz erwähnt, dass sich die inhomogene Gleichung (5.3) als ein Produkt aus linear unabhängigen homogenen Gleichungen schreiben lässt und unter Einbeziehung der **Wronski-Determinante** ([4], Seite 496) gelöst wird.

Um zu verhindern, dass Transformationen von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten nötig werden, werden für die weitere Darstellung die Beziehungen

$$\nabla_0 r_0 = \frac{\vec{x}_0}{r_0} \equiv \hat{x}_0 \quad (5.4)$$

und

$$\nabla_0 \cos \omega_{0e} = \nabla_0 \frac{\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_e}{r_0 r_e} = \frac{1}{r_0} (\hat{x}_e - \cos \omega_{0e} \hat{x}_0) \quad (5.5)$$

eingeführt. Hier bezeichnet \hat{x}_e den Einheitsvektor in Elektrodenrichtung. Setzt man die Beziehungen (5.4) und (5.5) in die Gleichungen (5.1) bzw. (5.2) ein, so kann man diese umformen zu:

$$4\pi\Phi = \vec{Q} \cdot \{ \hat{x}_0 (S_1 - \cos \omega_{0e} S_0) + \hat{x}_e S_0 \} \quad (5.6)$$

mit

$$S_0 = \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)R_n(r_0, r_e)P'_n(\cos \omega_{0e}) \quad (5.7)$$

und

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)R'_n(r_0, r_e)P_n(\cos \omega_{0e}) \quad (5.8)$$

Dabei bezeichnet P'_n die Ableitung des Legendre-Polynoms und kann rekursiv durch

$$\begin{aligned} P'_n(\cos \omega) &\equiv \frac{d}{d \cos \omega} P_n(\cos \omega) \\ &= nP_{n-1}(\cos \omega) + \cos \omega P'_{n-1}(\cos \omega) \end{aligned} \quad (5.9)$$

berechnet werden. $R'_n(r_0, r_e)$ definiert die Ableitung von $R_n(r_0, r_e)$ nach r_0 .

Anschaulich kann man die Reihen S_0 und S_1 als Einheitsdipole ansehen, die radial oder tangential ausgerichtet sind. Durch Gleichung (5.6) wurde eine harmonische Reihe entwickelt, die für $n \rightarrow \infty$ gegen das Potential, das von einer dipolaren Quelle hervorgerufen wird, konvergiert. Um diese Reihen für die Vergleichstests der im Kapitel 4 vorgestellten Modelle nutzen zu können, wurden sie in einem Programm implementiert, das für eine übergebene Elektrodenkonfiguration das Potential an den Elektrodenpositionen berechnet und zurückgibt. Da bei einer Programmierung einer Summe der Schleifenindex n der nicht gegen ∞ gehen kann, wurde hier ein maximaler Wert $n_{max} = 300$, ausgehend von den Ergebnissen von De Munck, gesetzt, was ein sehr genaues

Ergebnis der analytischen Berechnung ermöglichte. So konnte unabhängig von den Modellkonfigurationen (Mehrschicht-Modell, Einschicht-Modell) ein Vergleich der Dipol-Modelle durchgeführt werden. Abbildung 5.1 zeigt eine schematische Abbildung eines 3-Schalen-Kugelmodells mit radialer und tangentialer Leitfähigkeit, Radien und allen wichtigen Größen zur Berechnung der analytischen Lösung.

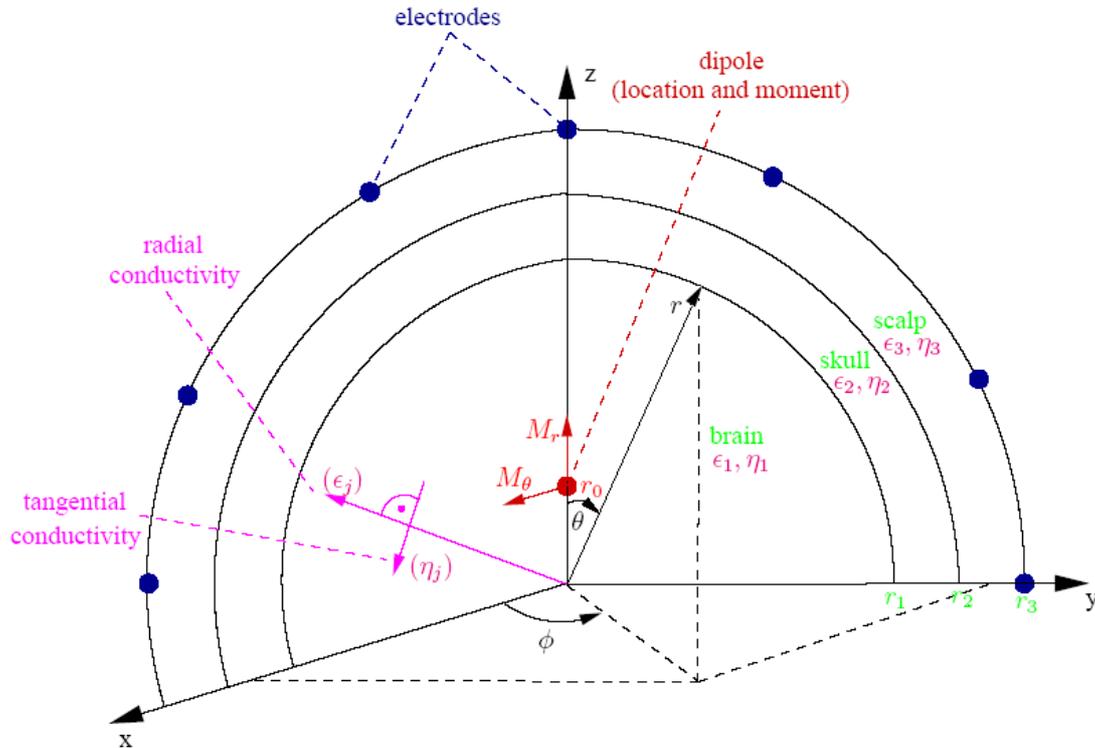


Abbildung 5.1: Analytisches 3-Schalen-Kugel-Modell mit den Schichten Kopfhaut, Schädel, Gehirn. Beschrieben sind radiale und tangentiale Leitfähigkeit, Radien, Elektrodenpositionen, Dipolposition und -moment

5.2 FEM-Netze zur Darstellung

Hat man nun eine Methode implementiert, um die analytische Lösung für eine Potentialverteilung in einem Kugelmodell zu berechnen, so ist der nächste Schritt die Generierung von FEM-Netzen, die ein solches Modell darstellen können. Diese sollen nicht nur die Geometrie des Leiters möglichst genau approximieren, sondern sie müssen auch Informationen über elektrische Eigenschaften (Leitfähigkeit) beinhalten. Im Falle dieser Arbeit wurden Netze verschiedener Schrittweiten und mit verschiedenen Elementtypen mit Hilfe der Programme **Curry** [16] und **VGrid** [15] erzeugt. Die Testläufe in Kapitel 6 wurden an Kugelmodellen mit drei Schalen (Kopfhaut, Schädel, Gehirn) durchgeführt. Diese bildeten ein optimales Vergleichsmedium und gaben gleichzeitig die Möglichkeit, auch den Einfluss der Schädelanisotropie mituntersuchen zu können. Eine Darstellung eines solchen 3-Schalen-Kugel-Modells ist in Abbildung 5.2 zu sehen.

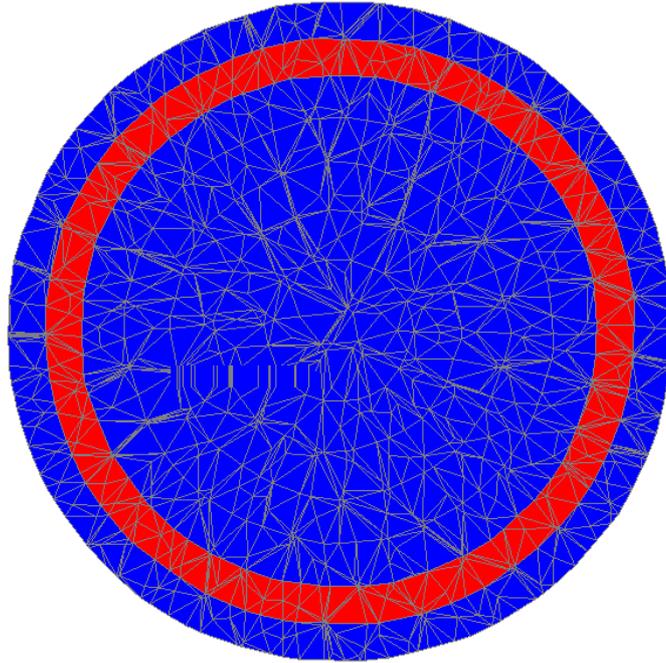


Abbildung 5.2: 3-Schalen-Kugel-Modell approximiert durch ein Tetraedernetz mit den Schichten Kopfhaut, Schädel, Gehirn

5.2.1 Tetraeder

Eine sehr genaue Annäherung des kugelförmigen Leiters ist mit Hilfe eines Tetraedernetzes möglich. Um eine optimale Anordnung der Tetraeder zu bekommen, bedient man sich hier des Verfahrens der **Delaunay Tetrahedrization**, welches garantiert, dass keine zu spitzen oder zu stumpfen Tetraeder innerhalb des Volumens entstehen. Dies geschieht während der Erstellung des Netzes durch Prüfen des so genannten **Kugelkriteriums** [9]. Es besagt, dass ein Delaunay-Netzwerk in drei Dimensionen aus sich nicht überlappenden Tetraedern besteht, wobei innerhalb der Kugel, die durch die vier Eckpunkte definiert ist, kein weiterer Punkt liegt. Weiterhin muss bei der Generierung eines 3-Schalen-Netzes darauf geachtet werden, dass ein Element nicht über eine Schichtgrenze hinaus verläuft. Um dies zu verhindern, werden als erstes die Punkte auf den Schichtgrenzen festgelegt und danach die Tetrahedrization durchgeführt. Nach Bestimmung der Elementnummern wird jedem Element eine Leitfähigkeit, abhängig von der Schicht, in der es liegt, zugeordnet. Ein Beispiel eines sehr feinen Tetraedernetzes ist in Abbildung 5.3 zu sehen.

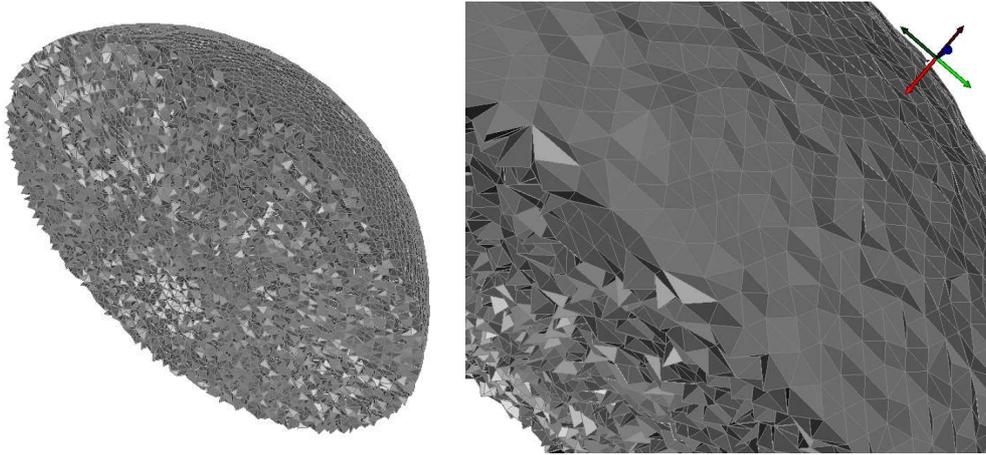


Abbildung 5.3: Tetraedernetz einer Kugel, in der Mitte durchgeschnitten (links) und vergrößert (rechts)

Einen Nachteil bildet die hohe Anzahl an Elementen relativ zu der der Knoten gesehen, die einen hohen Rechenaufwand mit sich bringen (siehe hierzu Tabelle 6.1, die eine Auflistung der in dieser Arbeit verwendeten Gitter zeigt).

5.2.2 Hexaeder

Eine zweite Möglichkeit bilden Hexaedernetze. Bei ihnen wird der Vorteil ausgenutzt, dass Aufnahmen von MRT-Bildern schon eine Diskretisierung in Voxel-Elemente enthalten [12]. So kann man diese Daten direkt in Hexaeder- oder Würfel-Elemente transformieren. Verschiedene Netzweiten sind möglich, indem man mehrere Voxel zu einem Element zusammenfasst. Der Nachteil dieser Netze besteht darin, dass krummlinige Oberflächen nur mit sehr kleinen Hexaedern approximiert werden können. Das Innere eines Volumens jedoch (wenn es keine Löcher besitzt) kann mit wenig Aufwand ausgefüllt werden.

5.2.3 Node Shifted Hexaeder

Eine Erweiterung des Ansatzes durch Hexaeder bilden die so genannten **Node Shifted Hexaeder**. Mit Hilfe des Nodeshiftings ist es möglich, auch mit groben Hexaedern eine krummlinige Oberfläche anzunähern. Das Konzept sieht vor, Eckpunkte der Würfel so zu verschieben, dass eine glattere Oberfläche entsteht (Abbildung 5.4). Näheres zum Verfahren des Nodeshifting findet sich in [36] oder in [6].

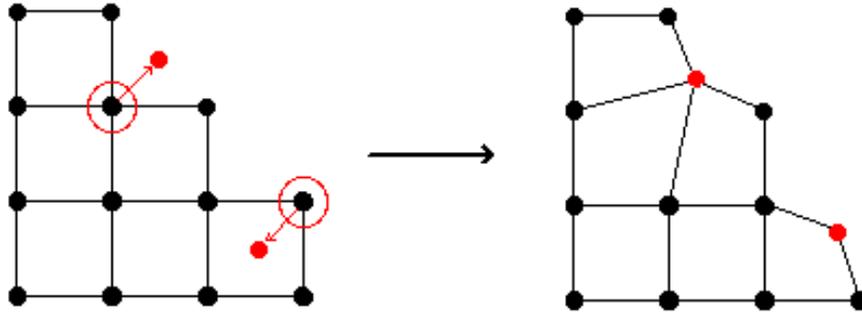


Abbildung 5.4: Prinzip des Nodeshifting in 2D

In Abbildung 5.5 ist zu sehen wie eine krummlinige Oberfläche durch immer kleinere reguläre Tetraeder verfeinert werden kann (oben), sowie die Möglichkeit des Nodeshiftings bei gleicher Gitterweite (unten).

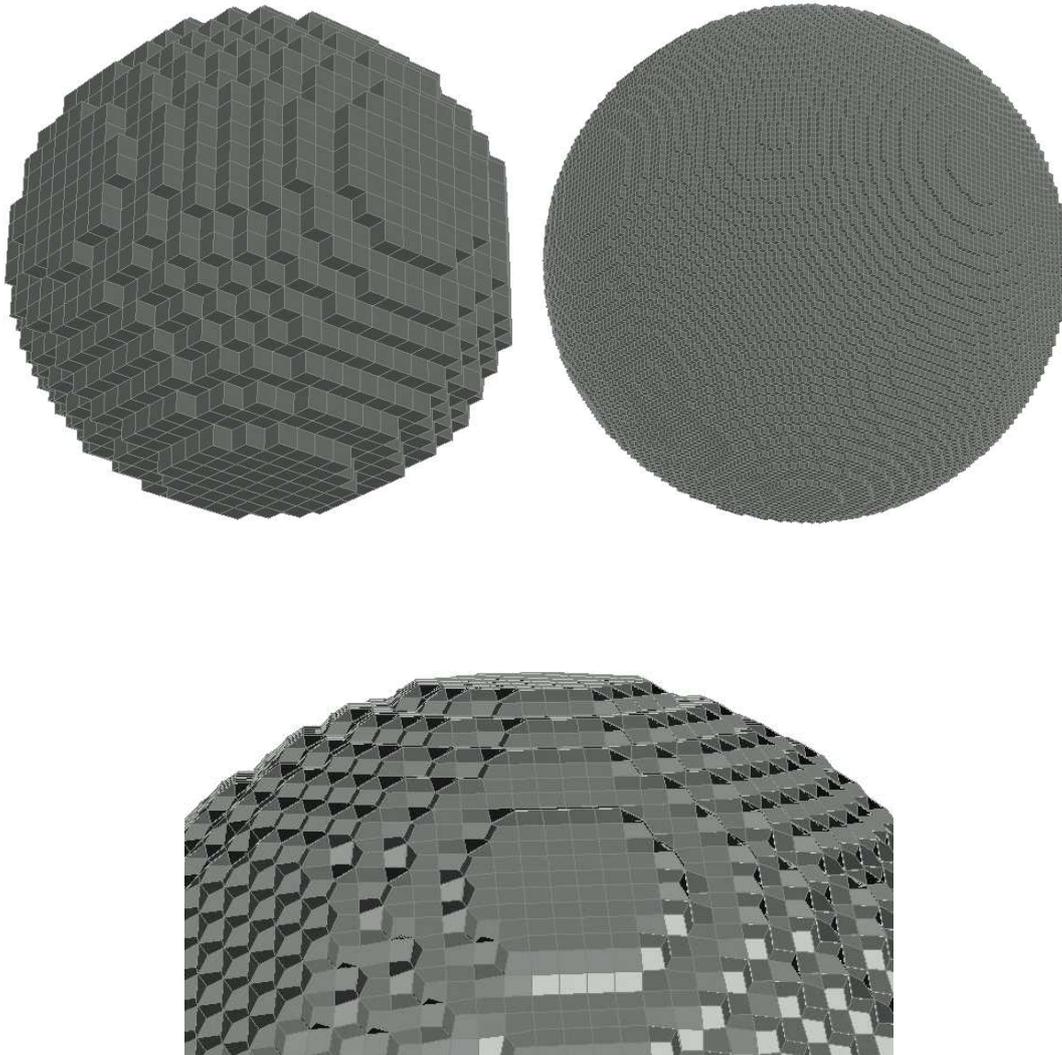


Abbildung 5.5: Verfeinerung durch kleinere Elemente (oben) oder durch Nodeshifting (unten)

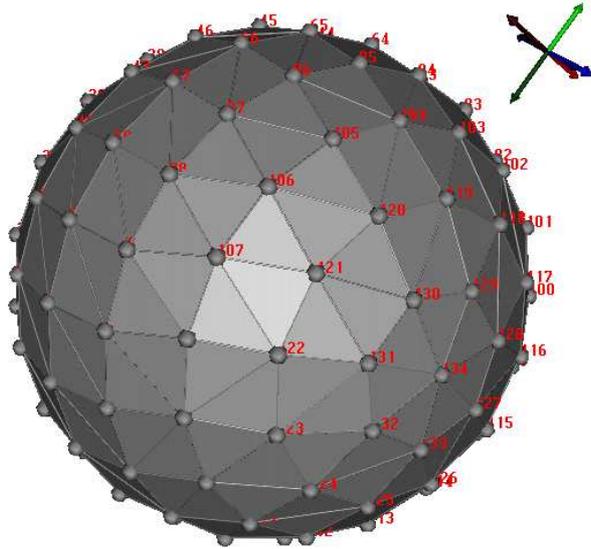


Abbildung 5.6: Elektrodenkonfiguration, bestehend aus 134 gleichmäßig verteilten Elektrodenpunkten

5.3 Sonstige Vorbereitungen

Neben dem FEM-Netz sind für die Vorwärtsrechnungen noch andere Parameter zu erstellen. Beispielsweise wird dem Programm eine Dipoldatei als Parameter übergeben, die die Position, Orientierung und Stärke der Quelle beschreibt. Ein Beispiel für eine solche Datei findet sich im Anhang.

Weiterhin benötigt das Programm die Positionen der EEG-Elektroden, die ebenfalls in einer Datei übergeben werden. In dieser Datei sind die Anzahl der Elektroden, ihre Koordinaten sowie die Labels als Bezeichner eingetragen. Um nicht nur auf eine Elektrodenkappe, die oberhalb der Ohren Elektroden aufweist, beschränkt zu sein, wurde von Herrn Dr. Carsten Wolters ein Programm entwickelt, das eine gleichmäßig verteilte Elektrodenkonfiguration mit einer frei wählbaren Anzahl von Elektrodenpunkten über eine Kugeloberfläche vornehmen kann. So wurde für diese Arbeit eine Konfiguration aus 134 Elektroden über das verwendete Schalenmodell gelegt. An diesen Punkten wird im anschließenden Kapitel das Potential berechnet und mit der analytischen Lösung verglichen. Eine Darstellung dieser Elektroden mit Benennung findet sich in Abbildung 5.6. Abschließend benötigt man noch eine Parameterdatei, die Einstellungen wie beispielsweise den zu verwendenden Löser, die verwendete Methode zur Behandlung der Singularität, Ein- und Ausgabeformate und andere für das Programm wichtige Parameter beinhaltet.

5.4 Programmausführung

Nachdem alle Vorbereitungen getroffen wurden, um mit dem Finite-Elemente-Ansatz zu rechnen, kann man an die Ausführung einer Vorwärtsrechnung mit dem für diese Arbeit verwendeten Programmpaket NeuroFEM herangehen.

5.4.1 NeuroFEM

NeuroFEM ist ein komplexes Programmpaket, das mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode oder auch der Randelement-Methode eine schnelle Berechnung des Inversen Problems im Bereich der EEG/MEG-Quellrekonstruktion [22] ermöglicht. Die Software wird am *Max Planck Institute for Human Cognitive and Brain Sciences* in Leipzig und am *Institut für Biomagnetismus der Universität von Münster* entwickelt. Die Basis des Pakets besteht aus einer Reihe von Fortran Routinen, die für den Aufbau der Rechenumgebung zuständig sind. Sie initialisieren Datenstrukturen, stellen Matrixoperationen (Bsp: DAXPY) zur Verfügung und implementieren die verwendeten Löser für die linearen Gleichungssysteme, die während eines Durchlaufs aufgestellt werden. Auf dieser Basis aufsetzend bilden C++-Routinen den Kern zur Berechnung der in Kapitel 4 vorgestellten Dipol-Modelle, der Lead-Field-Ansätze für das Inverse Problem und für die Ausgabe der berechneten Daten in verschiedene Dateiformate.

NeuroFEM erwartet bei einem Aufruf eine Reihe von Parametern:

- Die Art der inversen Berechnung (hier: *sourcesimulation*)
- Eine Datei, in der das FEM-Gitter mit Knoten und Elementen definiert ist. NeuroFEM unterstützt verschiedene Formate wie ASA oder Vista. Je nach verwendetem Format wird daraus auch der Parameter zum Einlesen der Leitfähigkeiten abgeleitet.
- Eine Datei, in der die Elektrodenpositionen zu finden sind.
- Eine Parameterdatei, in der Parameter wie zu berechnendes Dipolmodell, verwendeter Löser, numerische Schranken für Residuen oder Aus- und Eingabeformate definiert sind.
- Eine Datei, die den gesetzten Dipol beschreibt. Position, Moment und Richtung werden so bekannt.
- Die Art der verwendeten Diskretisierung (FEM oder BEM).
- Ein Suffix für Ausgabedateien. Durch diesen String werden die Dateinamen der Ausgabedateien definiert.
- Art der Messdaten für das Inverse Problem (EEG oder MEG)

5.4.2 De Munck

Wie oben schon erwähnt, wird bei der Berechnung der analytischen Lösung auf die Methode des Herrn De Munck zurückgegriffen ([8], [7]). Zu diesem Zweck wurde von ihm ein Programm zur Verfügung gestellt, das leicht abgeändert für die Testreihe im nächsten Kapitel zum Einsatz kommt. Es erwartet als Eingabeparameter eine Konfigurationsdatei, die Aufschluss über das zu berechnende Modell, Radien der Schichten, tangentiale und radiale Leitfähigkeit in jeder Schicht und die Bezeichnung jeder Schicht gibt. Ein Beispiel für eine solche Parameterdatei findet sich im Anhang. Des Weiteren benötigt das Programm eine Datei, in der die Knotenpositionen der Elektroden aufgeführt sind. Eine Erweiterung der Software besteht darin, dass die analytische Lösung nicht nur an Elektrodenpositionen berechnet werden kann, sondern an jedem Knoten in der übergebenen Kugel. Das ist für die Validierung der Subtraktionsmethode sehr wichtig. Es wird dadurch möglich, Informationen über das erwartete Korrekturpotential zu bekommen, indem man das Singularitätenpotential von der analytischen Lösung abzieht. Dies resultiert im erwarteten Φ^{corr} .

Um eine variierende Dipolposition automatisiert berechnen zu können, wurde das Programm zudem erweitert. Neben Parameterdatei und Knotendatei erwartet es zusätzlich eine Datei, die

Informationen über den aktuell verwendeten Dipol gibt. Hierzu gehören Position, Richtung und Moment des Dipols.

Mit diesen Daten ist das Programm in der Lage, die benötigte analytische Lösung zu berechnen. Beispieldateien und ein -aufruf finden sich im Anhang.

5.5 Visualisierung

Ein sehr mächtiges Hilfsmittel in der Numerik bildet die Möglichkeit, Ergebnisse zu visualisieren. Speziell zur Visualisierung medizinischer Daten wurde für diese Arbeit das Tool **SCIRun** herangezogen [26]. SCIRun ist ein umfassendes Tool, das durch einen modularen Aufbau hohe Flexibilität aufweist. Zusätzliche Pakete wie beispielsweise BioPSE erlauben über das Visualisieren hinaus das Lösen von bioelektrischen Feldsimulationen. Aus diesem Grund wird derzeit an einer Integration des NeuroFEM Programmpaketes in SCIRun/BioPSE gearbeitet [1].

Die grafische Oberfläche dient zur Erstellung so genannter Netze, die aus Modulen zusammengesetzt sind. Diese Module implementieren Basisfunktionen wie beispielsweise einen FileReader, einen MatrixReader, ein ShowField und einen Viewer. Diese werden durch Ein- und Ausgabeports miteinander verbunden. Abbildung 5.7 zeigt ein Beispiel eines solchen Netzes mit Ausgabefenster. In dieser Arbeit wurde SCIRun lediglich zur Visualisierung verwendet, da numerische Löser und alles andere zur Berechnung Benötigte im NeuroFEM Programmpaket zur Verfügung stand.

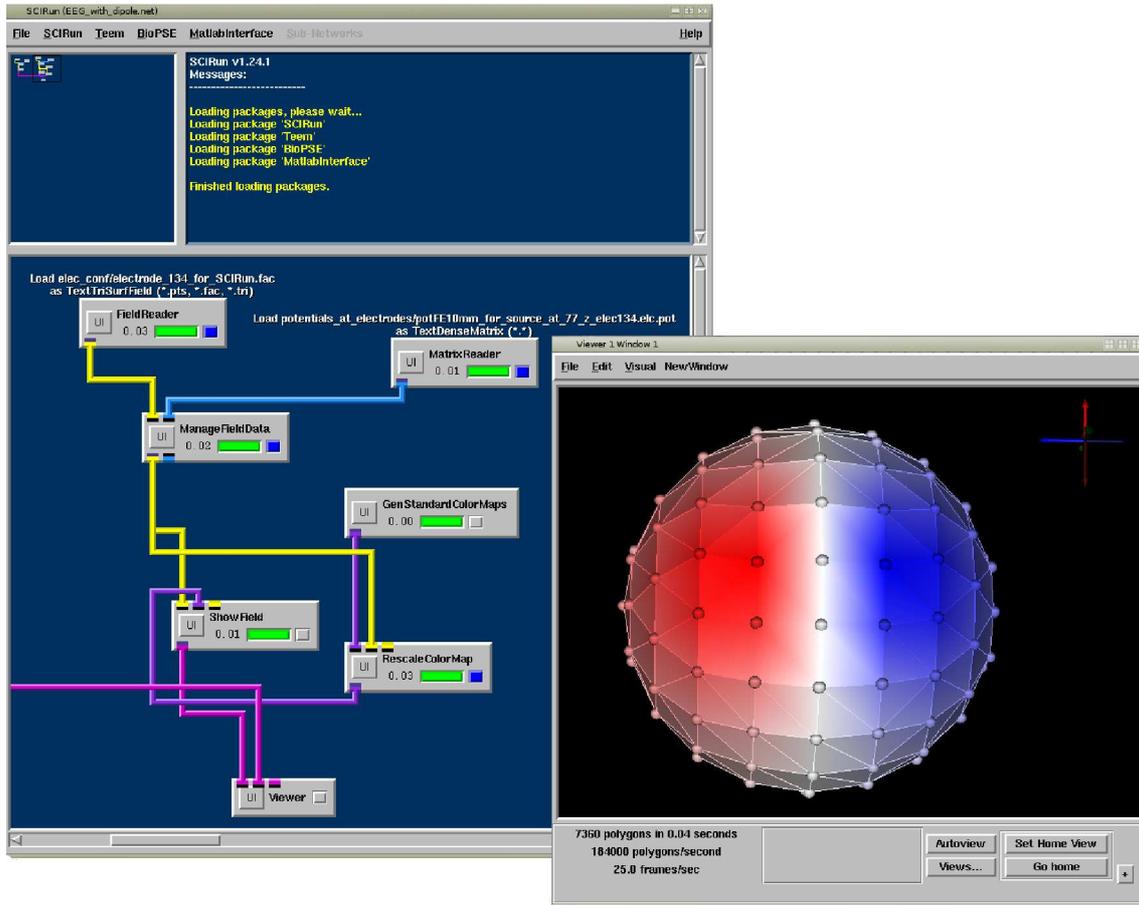


Abbildung 5.7: Die SCIRun Oberfläche. Sie zeigt eine Netz zur Visualisierung des berechneten Potentials an der Oberfläche des Leiters. Zu sehen sind die einzelnen Module und das Viewer-Fenster mit der Ausgabe

5.6 Fehlermessung

An dieser Stelle ist es nun möglich, Berechnungen an Kugelmodellen analytisch und unter Verwendung der in Kapitel 4 vorgestellten numerischen Modelle vorzunehmen und zu visualisieren. Um aus den Ergebnissen Rückschlüsse in Bezug auf Güte und Stabilität der Modelle ziehen zu können, werden im Folgenden zwei Fehlerkriterien eingeführt, die dies möglich machen. Aussagekräftige Eigenschaften der berechneten Potentiale bildet zum einen die **Topologie** der Felder, die hauptsächlich durch eine Änderung der Dipolposition beeinflusst wird, und zum anderen die **Magnitude** der Potentiale. Diese wird durch die Stärke der Quelle beeinflusst. Diese beiden Eigenschaften lassen sich mathematisch vergleichen [25] [34]: das erste Kriterium wird durch das **Relative Difference Measure (RDM)** gebildet und ist definiert als:

$$\text{RDM} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\Phi_i^{\text{num}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^m (\Phi_j^{\text{num}})^2}} - \frac{\Phi_i^{\text{ana}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^m (\Phi_j^{\text{ana}})^2}} \right)^2} \quad (5.10)$$

In dieser Fehlerberechnung bilden $\Phi^{num}, \Phi^{ana} \in \mathbb{R}^m$ die numerisch und analytisch berechneten Potentiale. Die Variable m definiert die Anzahl der Elektroden, an denen die Ergebnisse berechnet werden. Der RDM misst die Differenz der Topologie zwischen zwei Datensätzen.

Als zweites Fehlerkriterium wird der **Magnitude Factor (MAG)** herangezogen:

$$\text{MAG} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\Phi_i^{num})^2}{\sum_{i=1}^m (\Phi_i^{ana})^2}} \quad (5.11)$$

Er berechnet die Resonanzüberhöhung zwischen dem analytisch und dem numerisch berechneten Potential und gibt so Aufschluss über Fehler in der Magnitude.

Die Punkte, an denen RDM bzw. MAG berechnet werden, stellen die Elektrodenpositionen dar. Diese werden immer auf den nächstgelegenen FEM-Knoten im zugrundeliegenden Modell abgebildet. Diese Abbildung wird dann als Grundlage für die Berechnung der analytischen Lösung verwendet, um sicher zu stellen, dass die numerische und die analytische Lösung an den gleichen Positionen vorliegen. Des Weiteren muss gewährleistet sein, dass beide Lösungen in den richtigen Einheiten (μV) vorliegen und gleichwertig geshiftet sind. Letzteres wird durch eine Betrachtung der Referenzelektrode, der ersten Elektrode, erreicht. Es wird festgelegt, dass das Potential so verschoben wird, dass an der Referenzelektrode der Wert 0 zustande kommt. So kann man einen optimalen Vergleich der analytischen mit der numerischen Lösung durchführen.

Kapitel 6

Ergebnisse

Im folgenden Kapitel werden die bisher beschriebenen Anwendungen und Erkenntnisse in einer Reihe von Testberechnungen miteinander verglichen. Zu diesem Zweck wird ein 3-Schalen-Kugelmodell mit den Schichten Kopfhaut, Schädel und Gehirn verwendet. Als Fehlerkriterium werden die oben beschriebenen RDM und MAG herangezogen und als Testkonfiguration wird jeweils ein tangential oder radial ausgerichteter Dipol entlang der y-Achse vom Mittelpunkt des Kugelmodells bis zur Schichtgrenze des Schädels bewegt. Um das Verhalten bei einem feiner werdenden FEM-Netz zu beobachten, werden Netze verschiedener Schrittweiten erstellt (Tabelle 6.1). Des Weiteren wird in diesem Kapitel auch ein Vergleich von Netzen verschiedener Elemente durchgeführt. Zu diesem Zweck wurden Netze bestehend aus Tetraedern, regulären Hexaedern und Node Shifted Hexaedern erstellt. In den meisten Experimenten wird der Fehler an 134 Elektrodenpositionen in gleichmäßigen Abständen um das gesamte Kugelmodell berechnet. Die Kugel hat einen Außenradius von 90 mm, bei 80 mm beginnt die Schädelschicht und bei 70 mm beginnt die Schicht, die das Gehirn repräsentiert. Ihr Mittelpunkt liegt bei $\vec{m} = (127.0; 127.0; 127.0)$. Innerhalb der Kugel wird eine schichtweise konstante Leitfähigkeit, korrespondierend zu Tabelle 2.1, gesetzt.

Bezeichnung	# Elemente	# Knoten	# Oberflächenelemente	# Oberflächenknoten
tet10mm	19912	3771	2296	1150
tet5mm	98689	17731	8186	4095
tet4mm	162491	28815	12444	6224
tet3mm	344461	59098	19312	9658
tet2.5mm	765043	127917	26282	13143
cube10mm	3024	3841	1524	1526
cube8mm	5922	7165	2352	2354
cube4mm	47272	52138	9464	9466
cube2mm	378384	397634	37962	37964
cube4mm ns	47567	52431	9456	9458
cube2mm ns	379732	398975	37944	37946

Tabelle 6.1: Die für diese Arbeit erstellten FEM-Netze mit Angabe der Bezeichnung, Anzahl der Knoten, Elemente, Oberflächenknoten und Oberflächenelemente

6.1 Tetraeder Netze

6.1.1 Randannäherung

Die erste Testreihe zeigt Vergleiche unter Verwendung von Tetraedernetzen. Die oben beschriebenen Daten des Kugelmodells treffen hier zu. Ein wichtiges Kriterium bei der Quellrekonstruktion bildet das Verhalten des eingesetzten Dipol-Modells in der Nähe von Leitfähigkeitssprüngen. Es wird beobachtet, wie sich der Fehler beispielsweise in der Nähe einer Schichtgrenze verhält. Im verwendeten 3-Schalen-Modell bildet diese Grenze die innere Schädelschicht (bei Radius = 70 mm). Dort findet im Isotropen ein Sprung von 0,33 S/m auf 0,0042 S/m statt. In Abbildung 5.2 ist diese Schicht rot gekennzeichnet.

Um das Verhalten der Modelle am Rand der Schichten zu studieren, wurde jeweils ein radial ausgerichteter sowie ein tangential ausgerichteter Dipol entlang der y-Achse positioniert. Die Dipolpositionen wandern vom Mittelpunkt bis kurz vor den Rand der Schicht. In den folgenden Diagrammen gibt die x-Achse den Abstand vom Mittelpunkt wieder, was gleichbedeutend ist mit (100 % - Abstand vom Rand). Die Abbildungen 6.1 bis 6.8 zeigen die Ergebnisse für eine Auswahl von Tetraedernetzen unterschiedlicher Schrittweite.

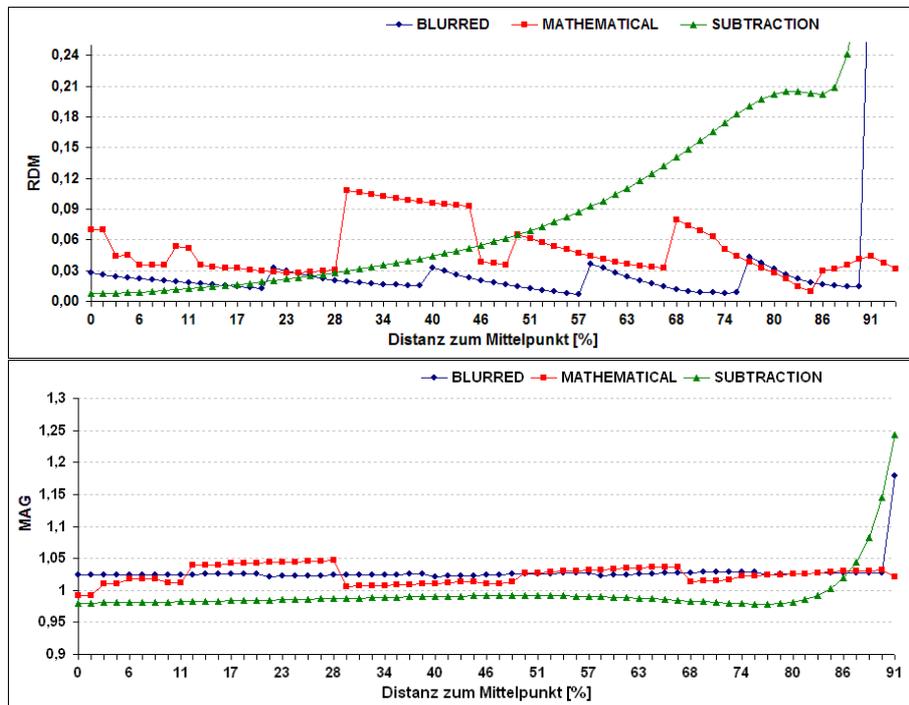


Abbildung 6.1: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 10 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

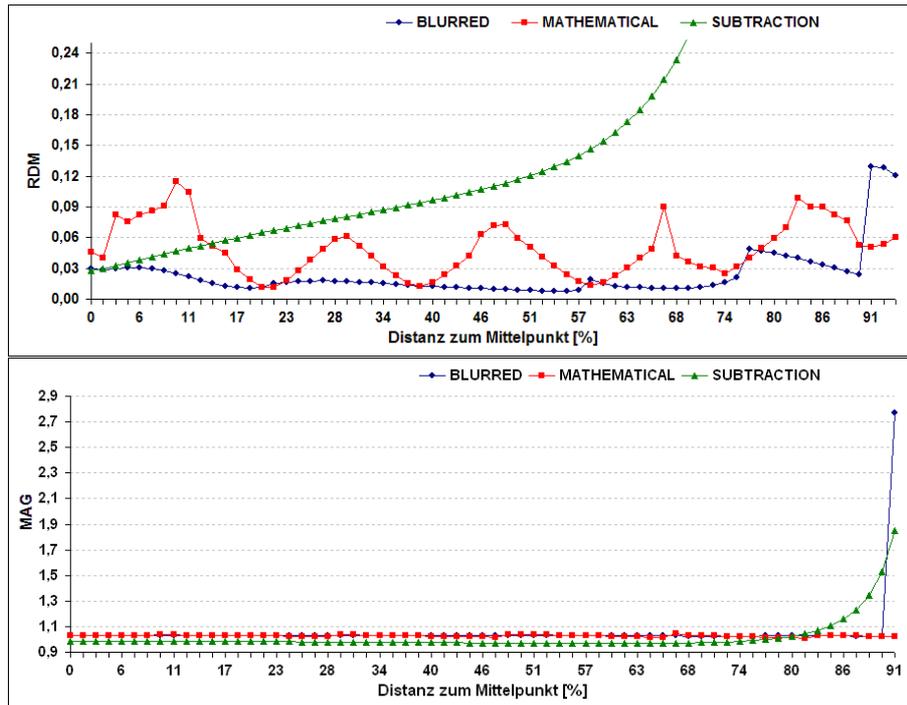


Abbildung 6.2: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 10 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

Dabei zeigt Abbildung 6.1 die Ergebnisse im größten Tetraedernetz der Testserie (tet10mm). Es ist zu erkennen, dass der RDM des Subtraction Modells anfänglich ein sehr gutes Verhalten aufweist, jedoch schnell die Einflüsse der Randschicht ihre Auswirkungen zeigen. Je näher der Dipol an die Grenze kommt, desto mehr Arbeit muss das Korrekturpotential leisten. Im ersten betrachteten Tetraedernetz (tet10mm) mit einem minimalen Knotenabstand von 10 mm besteht die Oberfläche der Kugel aus relativ wenigen Knoten (1150). Hier sei zur Übersicht auf Tabelle 6.1 verwiesen. Sie zeigt für alle verwendeten FEM-Netze die Anzahl der Knoten insgesamt, die Anzahl der Oberflächenknoten und die Anzahl der Elemente. Diese geringe Knotenanzahl und die Verwendung einer konstanten Approximierung der Normalenableitungen führen dazu, dass das Randintegral S_h aus Gleichung (4.28) nicht optimal wirken kann. Der Magnitudenfehler bei dieser Netzweite ist für das Subtraction Model bis kurz vor dem Rand sehr gut. Dieser gute MAG-Wert hält sich bei feiner werdenden Netzen bis zu einem immer kürzeren Abstand vom Rand. An den weiteren Abbildungen 6.3 bis 6.8 sieht man für den Subtraction Dipole eine stetige Verbesserung bei Netzverfeinerungen. Betrachtet man den Topologiefehler vom Blurred und Mathematical Dipole Modell, so sieht man einen geringeren Einfluss der Randschicht auf die Modelle. Beim Mathematical Model ist das vermutlich auf den fehlenden Einfluss der Leitfähigkeit auf der rechten Seite der Gleichung (vgl. Gl. 4.9) zurückzuführen. Das Blurred Dipole Modell ist durch die räumliche Streuung der Singularität weniger anfällig. Jedoch hat das Subtraction Model durch die genaue Berücksichtigung der Leitfähigkeit einen Vorteil in weiterer Entfernung vom Rand. Dieser lässt sich durch ein feineres Netz noch ausbauen.

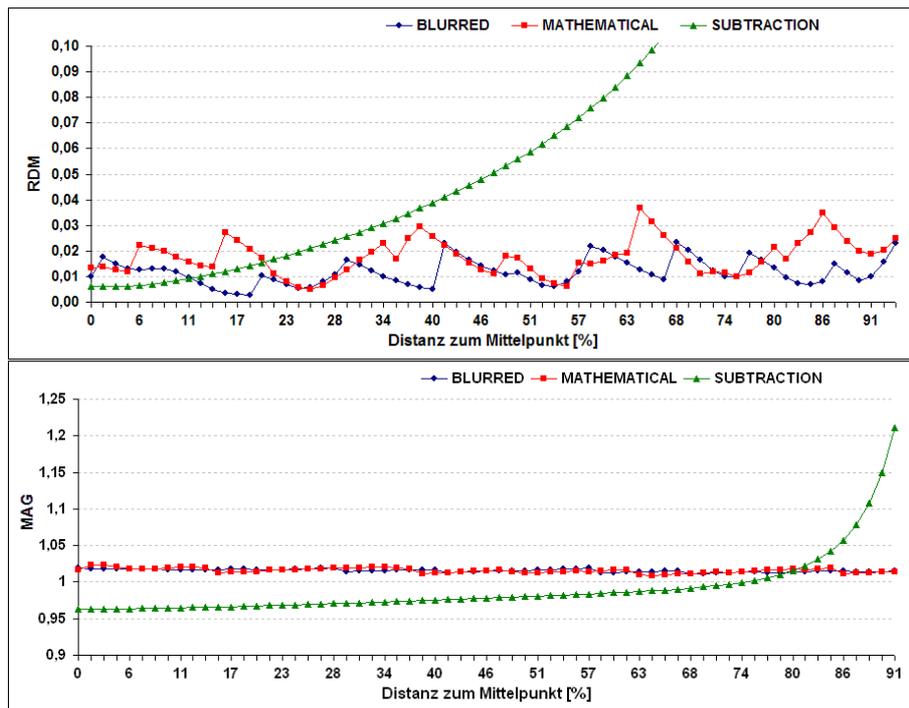


Abbildung 6.3: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 5 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

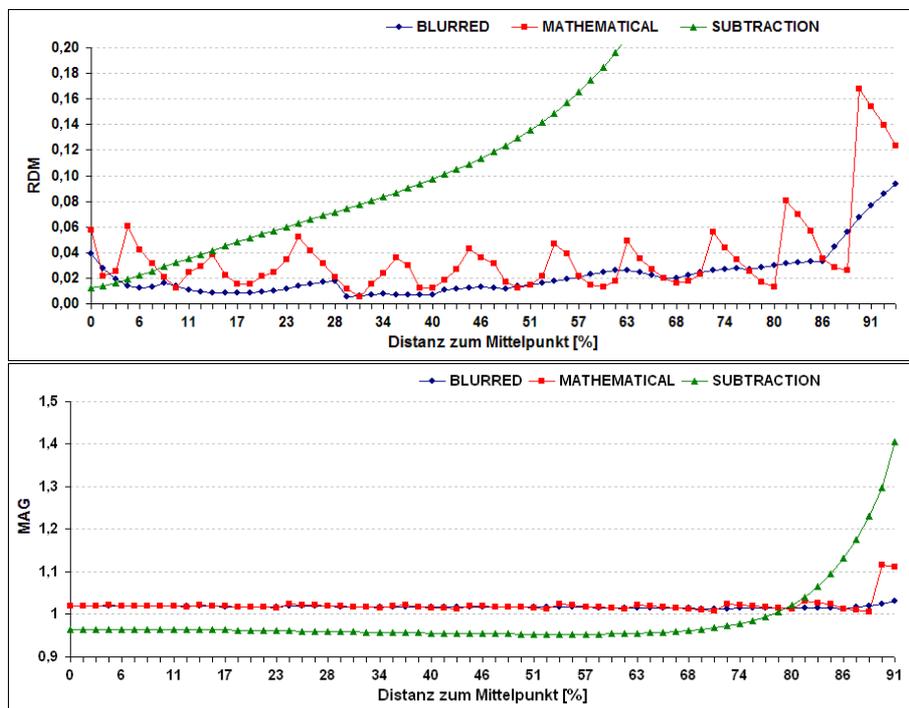


Abbildung 6.4: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 5 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

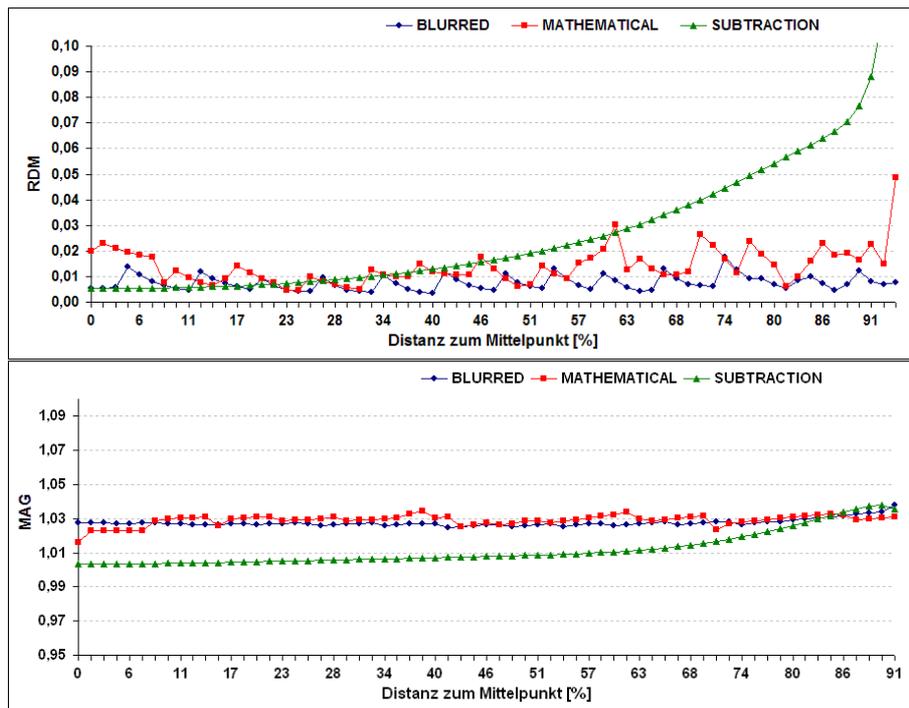


Abbildung 6.5: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 3 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

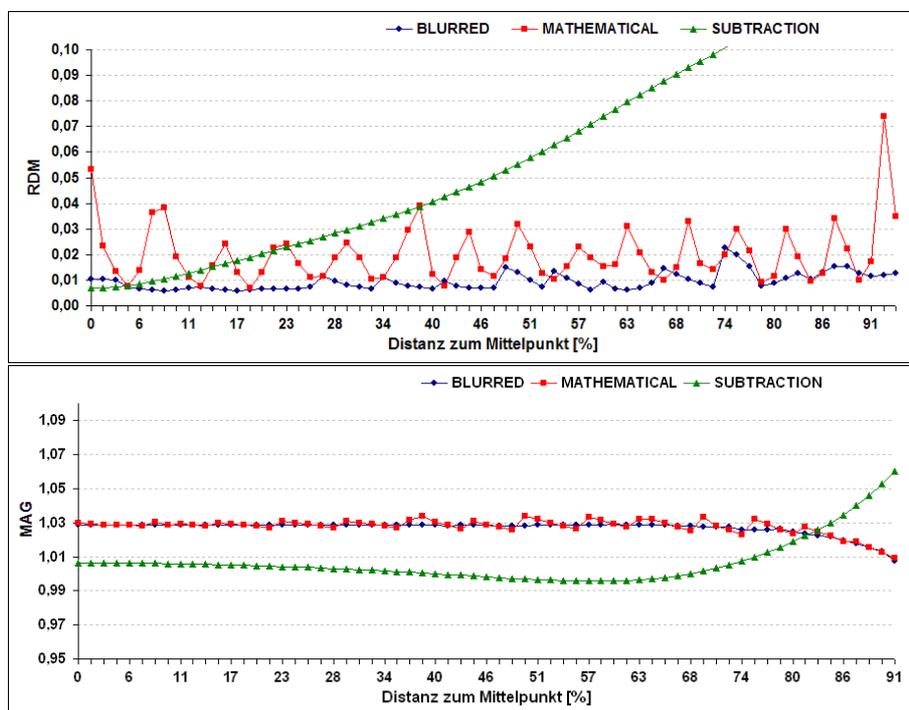


Abbildung 6.6: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 3 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

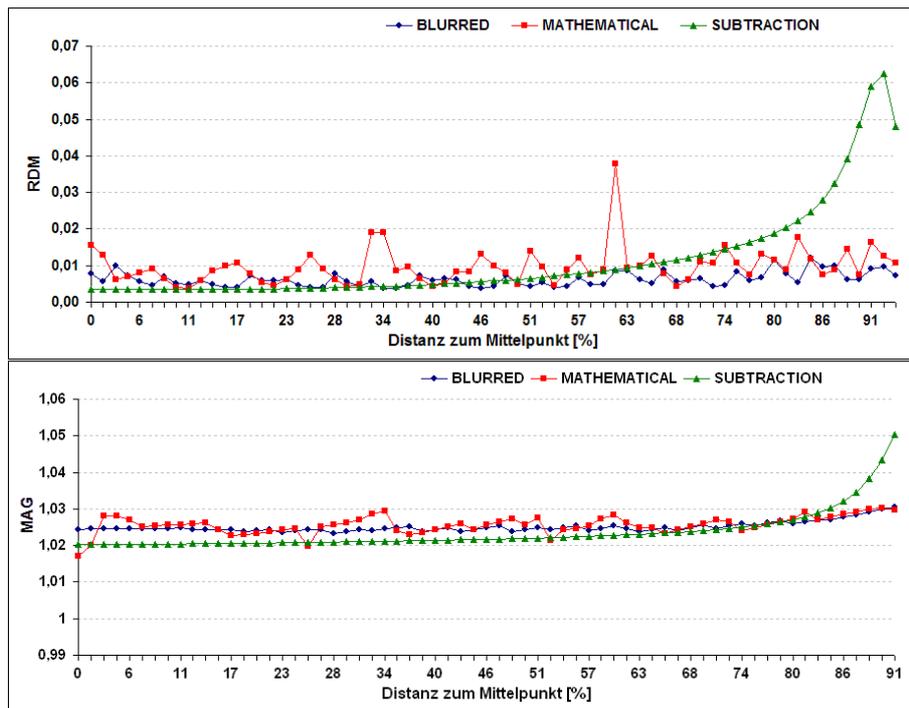


Abbildung 6.7: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 2.5 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

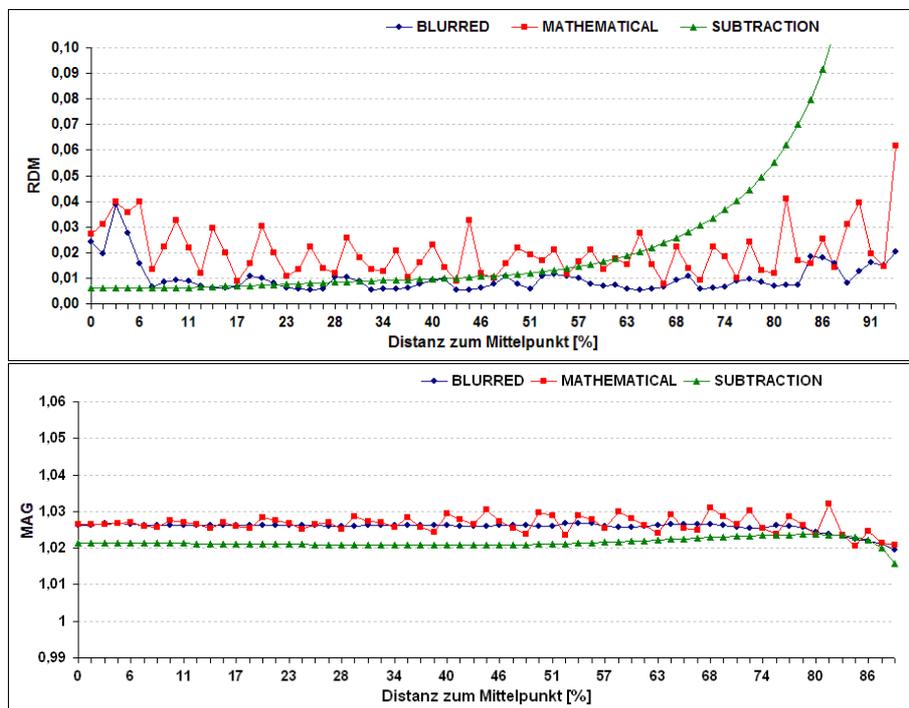


Abbildung 6.8: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Tetraedernetz mit einem minimalen Knotenabstand von 2.5 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

Genauer erkennt man die stetige Verbesserung des Subtraction Dipole Models bei feiner werden-

den Netzen in Abbildung 6.9. Hier wird der RDM des Subtraction Models auf den verschiedenen Netzen betrachtet. Man sieht eine eindeutige Verbesserung des Fehlers bei einer stetigen Netzverfeinerung. Die drei betrachteten Netze haben eine Knotenanzahl von 28815 (tet4mm), 59098 (tet3mm) und 127917 (tet2.5mm). Durch die steigende Anzahl von Oberflächenknoten ($6224 \rightarrow 9658 \rightarrow 13143$), hat S_h auch größeren Einfluss auf das Korrekturpotential.

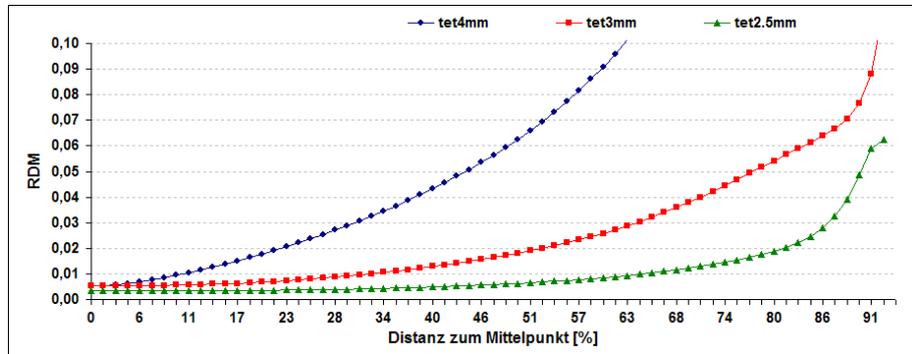


Abbildung 6.9: RDM in verschiedenen Finite-Elemente-Tetraedernetzen. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse. Betrachtung des Subtraction Dipole Models

6.1.2 Knotenannäherung

Auch die beiden anderen Modelle werden in den Abbildungen 6.10 und 6.11 untersucht.

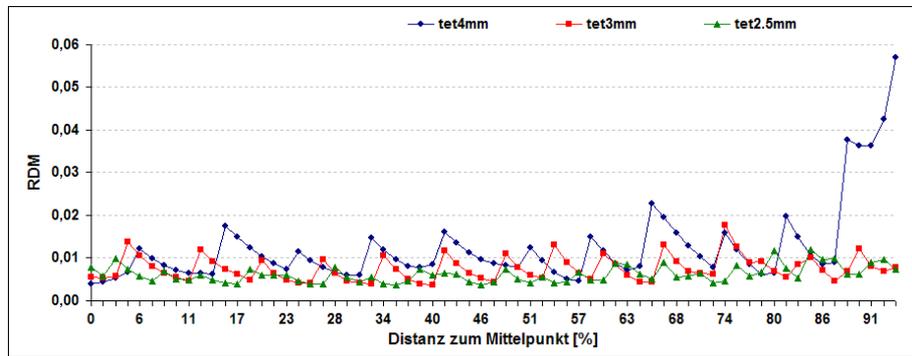


Abbildung 6.10: RDM in verschiedenen Finite-Elemente-Tetraedernetzen. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse. Betrachtung des Blurred Dipole Models

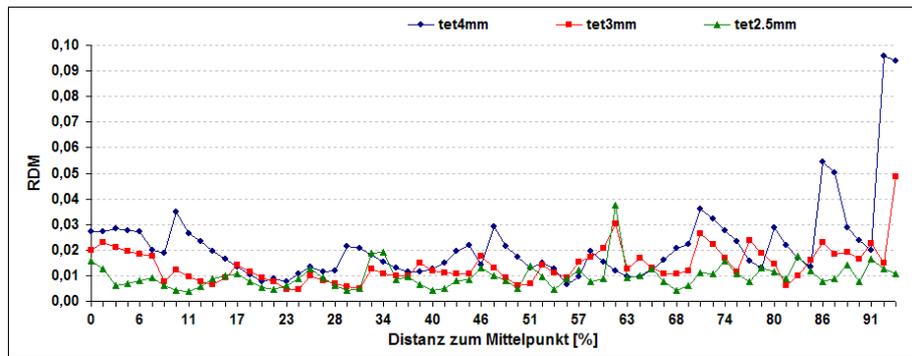


Abbildung 6.11: RDM in verschiedenen Finite-Elemente-Tetraedernetzen. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse. Betrachtung des Mathematical Dipole Models

Man erkennt ungleichmäßig verlaufende Graphen, die jedoch mit feiner werdenden Netzen zunehmend glatter werden. Um dieses Phänomen zu untersuchen, wurde der Abstand des jeweiligen Dipols zu den umliegenden Knoten des Elementes betrachtet. Abbildung 6.12 zeigt den Verlauf des RDM-Fehlers und parallel den Abstand der Quellen zum nächstgelegenen Knoten des jeweiligen Elements. Man sieht eindeutig einen negativen Einfluss auf den Fehler bei sinkendem Abstand. Es ist zu vermuten, dass sich der Fehler gleichmässiger verhalten wird, wenn man Quellen nur im Schwerpunkt des Elements setzt. Eine weitere Möglichkeit den Einfluss der Knotennähe zu vermindern besteht in einer lokalen Netzverfeinerung. Denn wie man beispielsweise in Abbildung 6.11 sieht, wird der Graph bei feineren Netzen geglättet. In einem kleineren Element kann der Abstand des Dipols zu den nächstgelegenen Knoten nicht in einer so großen Spanne variieren, wie dies der Fall z.B. in einem tet10mm Netz ist.

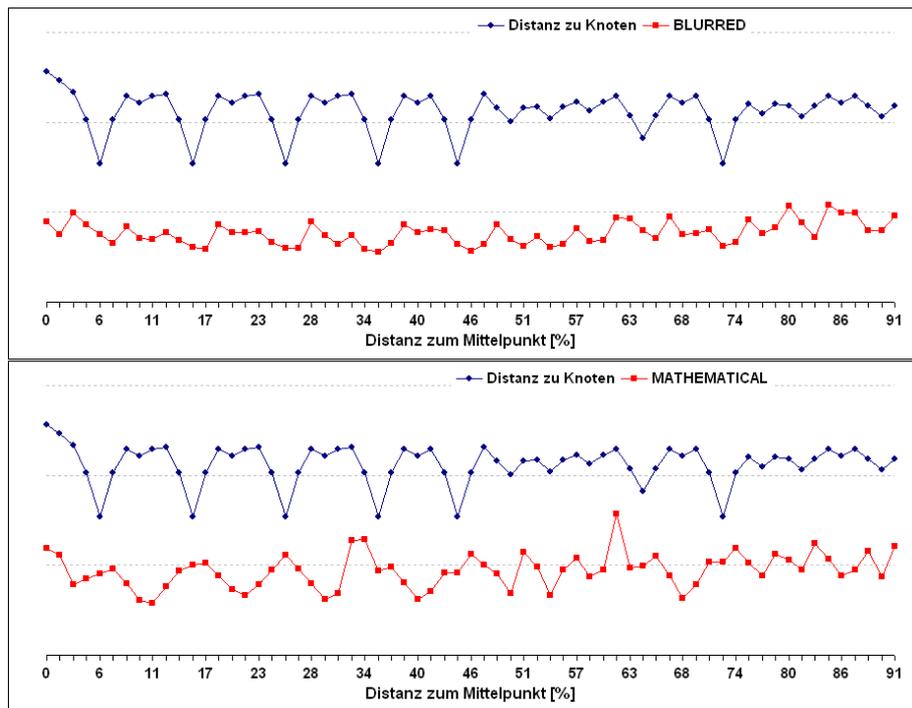


Abbildung 6.12: RDM im Vergleich zu den minimalen Abständen zum nächstgelegenen FEM-Knoten des Elementes. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse. Betrachtung des Blurred (oben) und des Mathematical (unten) Dipole Models

6.1.3 Tangential vs. Radial

Einen weiteren direkten Vergleich bieten die Diagramme 6.13 und 6.14. Sie zeigen, wie sich die Modelle verhalten, wenn die Dipole tangential oder radial gesetzt werden. Hier wurde das Verhalten an den Netzen tet3mm und tet2.5mm untersucht. In allen drei Modellen ist ein größerer Fehler bei den radialen Quellen zu erkennen.

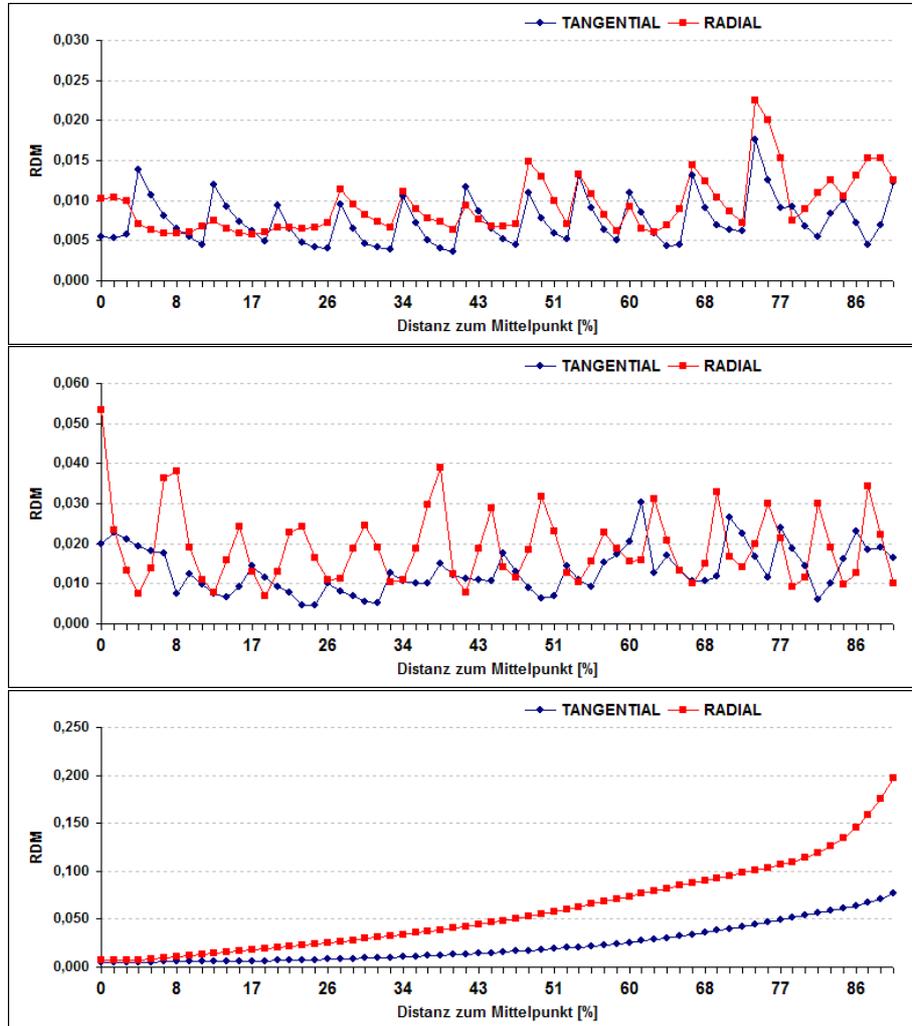


Abbildung 6.13: RDM der drei Dipol-Modelle Blurred (oben), Mathematical (mitte) und Subtraction (unten). Es wird jeweils ein radialer mit einem tangentialen Dipol mit verschiedenen Positionen entlang der y-Achse verglichen. Das zugrunde liegende FEM-Netz ist tet3mm

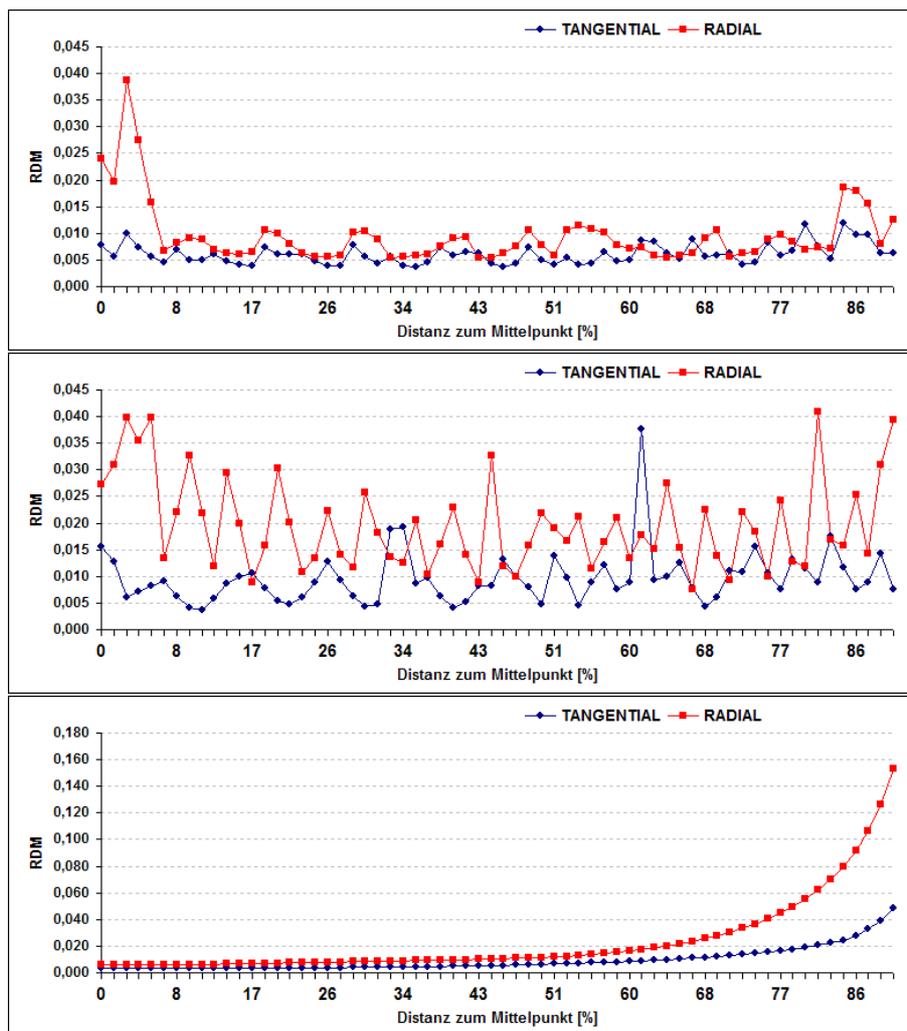


Abbildung 6.14: RDM der drei Dipol-Modelle Blurred (oben), Mathematical (mitte) und Subtraction (unten). Es wird jeweils ein radialer mit einem tangentialen Dipol mit verschiedenen Positionen entlang der y-Achse verglichen. Das zugrunde liegende FEM-Netz ist tet2.5mm

Zusammenfassend kann man bei den Testreihen der Tetraedernetze sagen, dass die Modelle trotz verschiedener Reaktionen eine durchweg gute Annäherung der Quelle leisten können. Die Fehlerspanne liegt bei gut gewählten Netzen in einem sehr akzeptablem Bereich. Der Einfluss der Randschichten lässt sich durch feiner werdende Netze gut vermindern.

Um einen Eindruck zu vermitteln, wie die Ergebnisse mit den Messungen und den Fehlerberechnungen zusammenhängen, wird in den Abbildung 6.15 und 6.16 ein anschauliches Beispiel visualisiert. Es werden verschiedene Stationen eines tangentialen (Abb. 6.15) und eines radialen Dipols (Abb. 6.16) auf dem Weg zur Schädelschicht gezeigt, wie das Ergebnis auf der Kugeloberfläche aussieht und wie sich das Potential bei einem Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel darstellt. Betrachtet werden in beiden Abbildungen die Ergebnisse eines isotropen tet2.5mm Netzes.

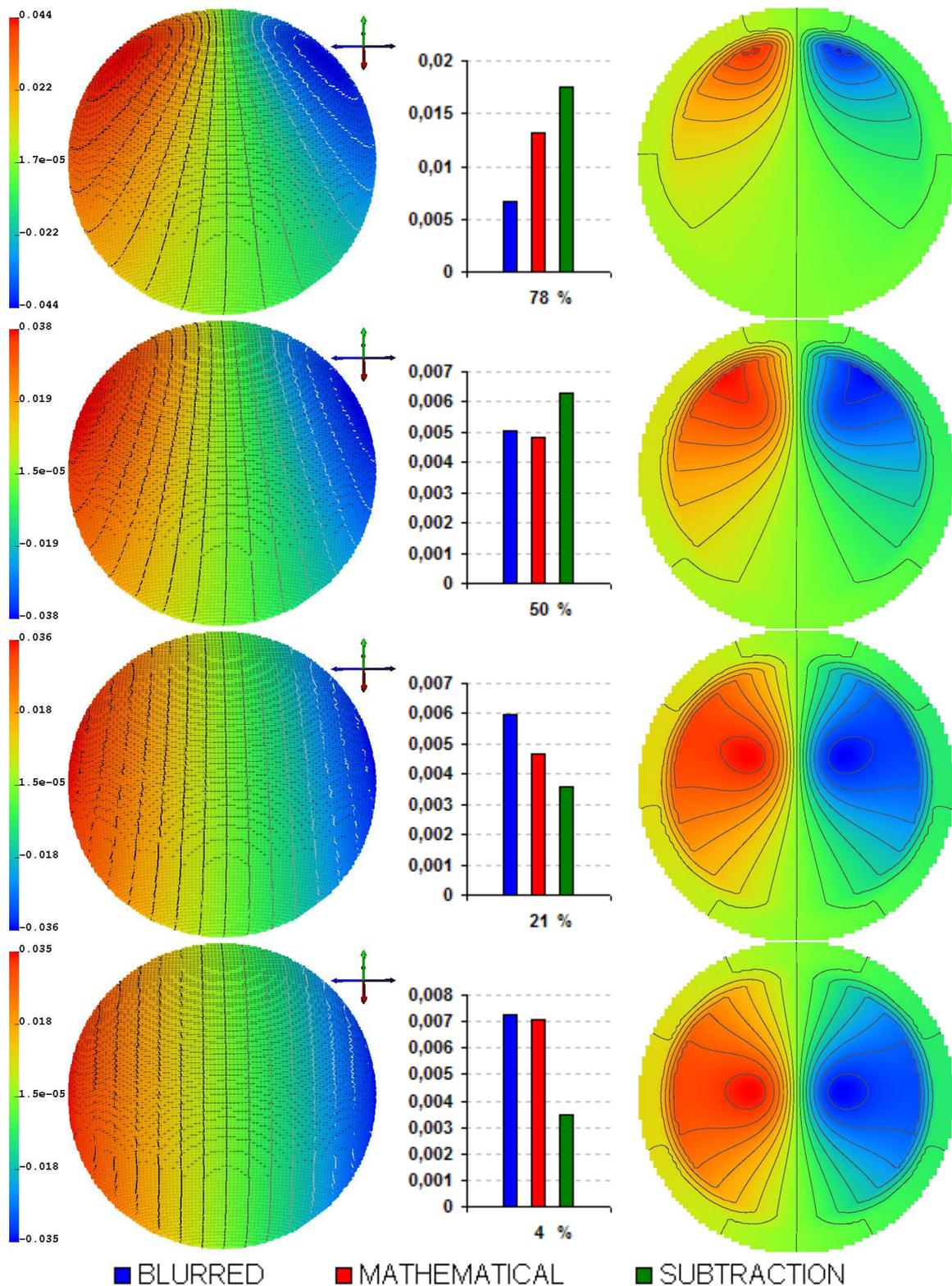


Abbildung 6.15: Der tangential zeigende Dipol wandert entlang der y-Achse nach oben in Richtung Schädelknochen. Links das Potential auf der Kugeloberfläche, in der Mitte RDM der Dipol-Modelle und Rechts ein Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel. Die x-Achse der Balkendiagramme zeigt wieder die prozentuale Entfernung zum Mittelpunkt

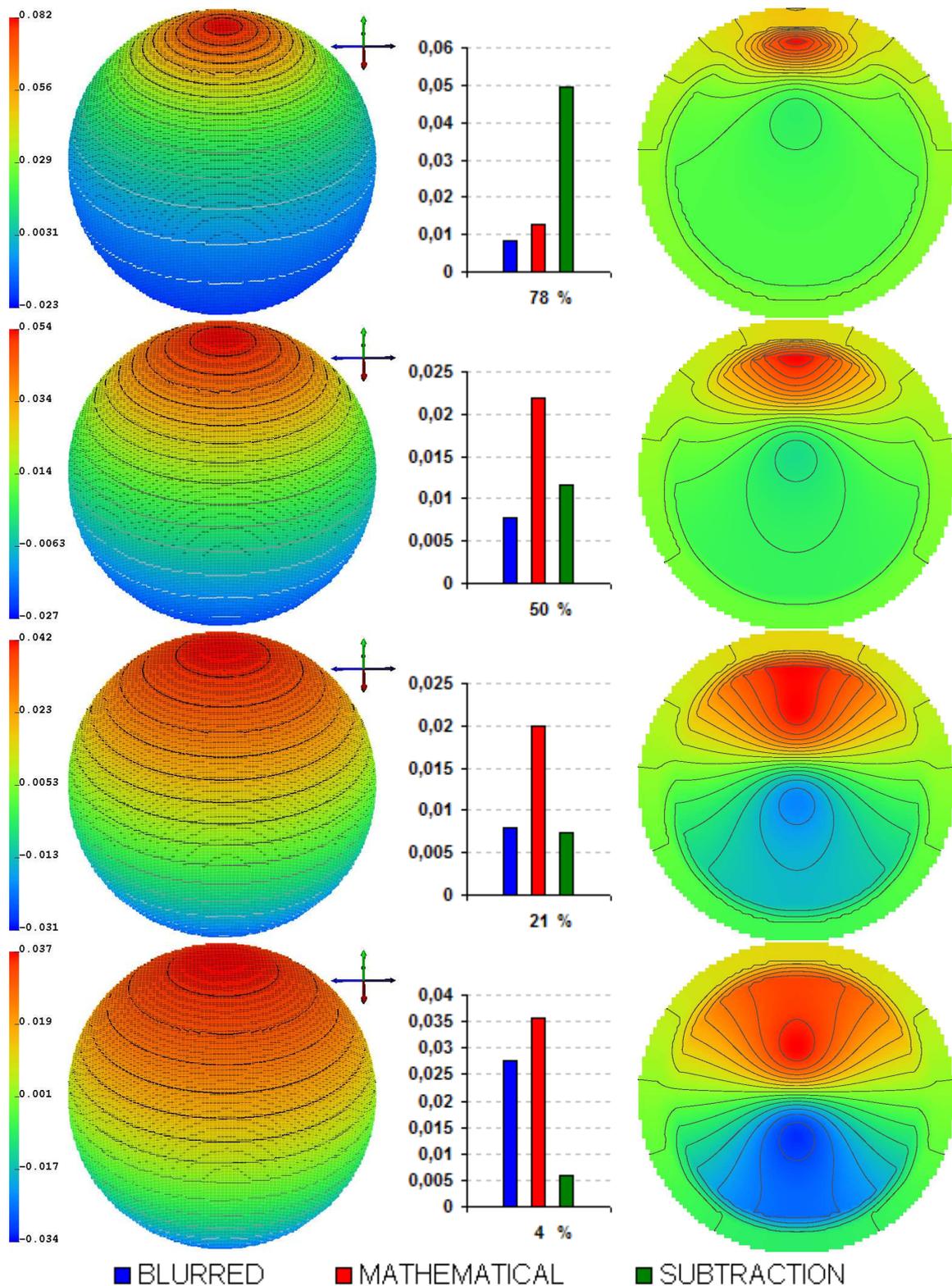


Abbildung 6.16: Der radial zeigende Dipol wandert entlang der y-Achse nach oben in Richtung Schädelknochen. Links das Potential auf der Kugeloberfläche, in der Mitte RDM und Rechts ein Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel. Die x-Achse der Balkendiagramme zeigt wieder die prozentuale Entfernung zum Mittelpunkt

6.2 Reguläre Hexaeder Netze

Die zweite Testreihe wurde mit den erstellten regulären Hexaedernetzen durchgeführt. Für die genaueren Netzdaten sei wieder auf Tabelle 6.1 verwiesen. Die weiteren Daten wie Schichtgrenzen, Mittelpunkt und Radius der Kugel sind equivalent zu denen der Tetraedernetze. Die Fehler werden an 134 Elektrodenpositionen, die gleichmäßig an der Kugeloberfläche verteilt sind, berechnet. Diese Netze haben den Vorteil, dass sie aufgrund der regulären Struktur das Innere der Kugel gleichmäßiger darstellen. An der Oberfläche jedoch entsteht bei großen Kuben eine ungenaue Darstellung der krummen Fläche. So ist es nötig, einen sehr kleinen Knotenabstand zu wählen.

6.2.1 Randannäherung

Auch hier wird das Verhalten der Modelle am Rand der Schicht untersucht. Wieder wandert jeweils ein tangentialer und ein radialer Dipol entlang der y-Achse Richtung Schädelschicht. Die Abbildungen 6.17 bis 6.20 zeigen die RDM- und MAG-Fehler auf den zwei Hexaedernetzen cube4mm mit 52138 Knoten und cube2mm mit 397634 Knoten. Letzteres ist das feinste Netz dieser Arbeit und erzielt, wie zu erwarten war, auch mit Abstand die besten Ergebnisse. Bei den gröberen Netzen (cube8mm und cube10mm) ist ein relativ schneller Anstieg der Fehler entstanden. Bei den gezeigten Netzen ist ein sehr gutes Verhalten der drei Modelle bis nahe an den Rand zu erkennen. Hier fällt auf, dass der Einfluss der Randschicht bei den Modellen des Blurred und des Mathematical Dipoles größer ist, als bei den Tetraedernetzen. Er ist deutlich zu erkennen.

Durch die reguläre Struktur des Netzes ist auch ein gleichmäßiger Einfluss der umliegenden Knoten zu sehen. Die Zickzacklinie des Mathematical Modells in Abbildung 6.18 bzw. des Blurred Modells in Abbildung 6.17 deutet darauf hin. Der besseren Topologie der Kubusnetze im Vergleich zu den Tetraedernetzen steht ein auffällig schlechterer Magnitudenfehler der Hexaeder gegenüber. Dies resultiert aus dem Nachteil, dass die Oberfläche nicht so glatt angenähert werden kann wie bei den Tetraedernetzen. Es entstehen quasi Löcher in der Oberfläche. Genauer ist dies in Sektion 6.4 dargestellt.

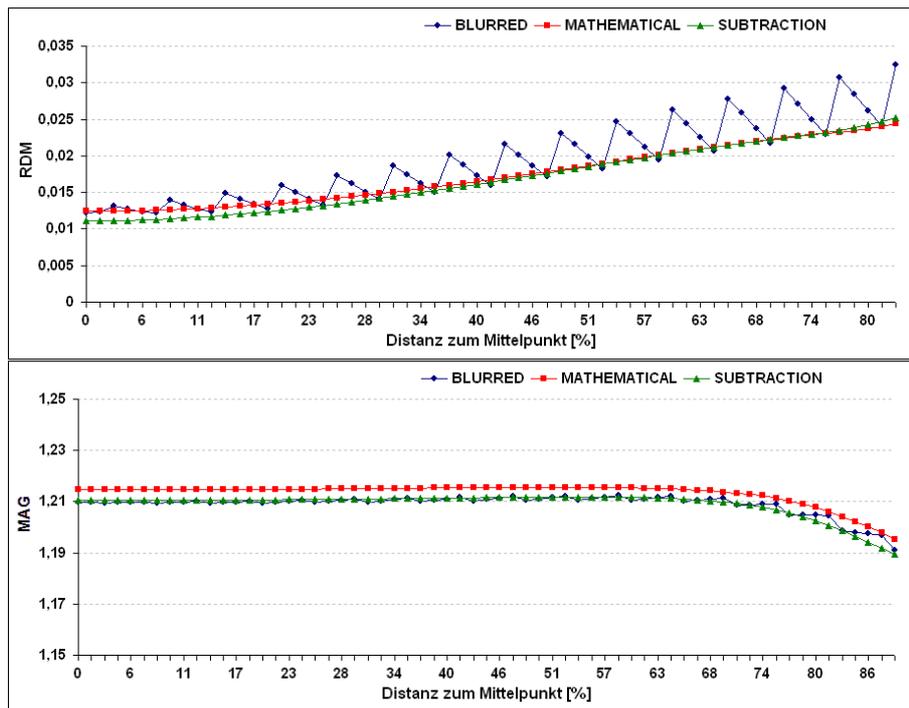


Abbildung 6.17: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 4 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

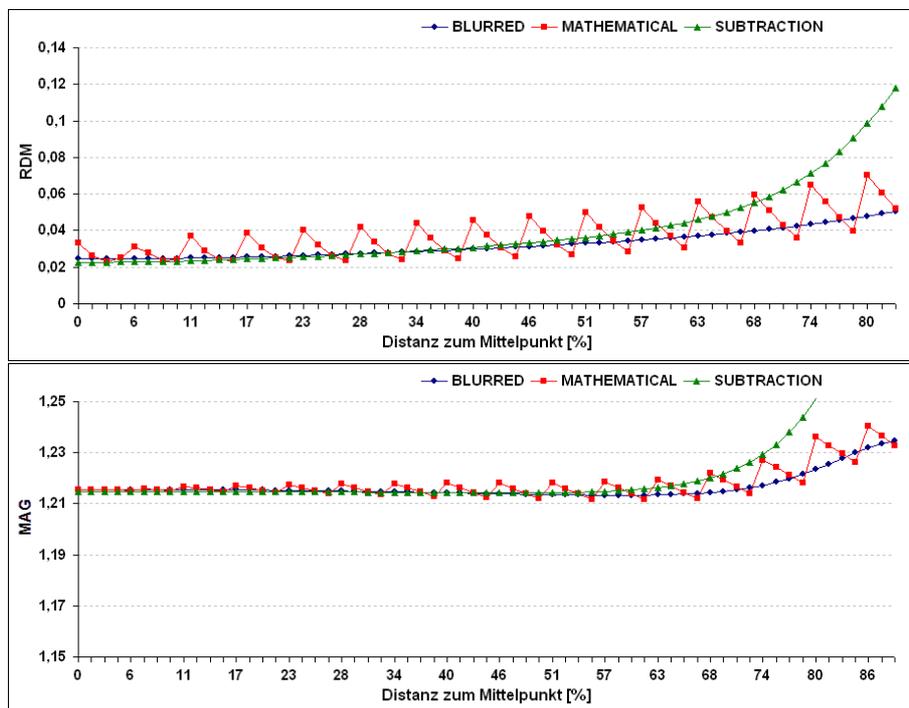


Abbildung 6.18: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 4 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

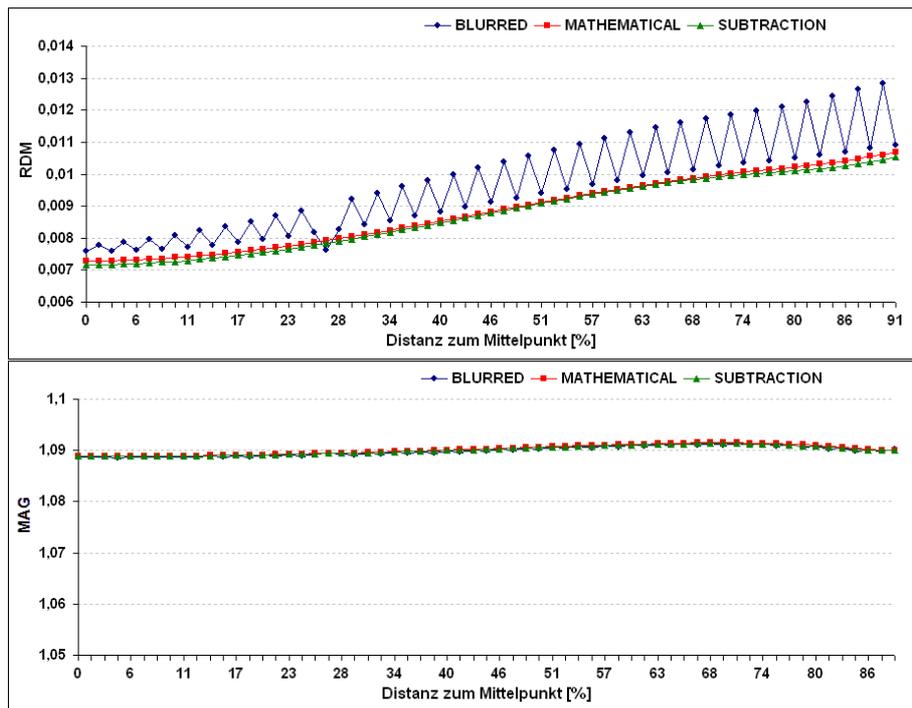


Abbildung 6.19: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

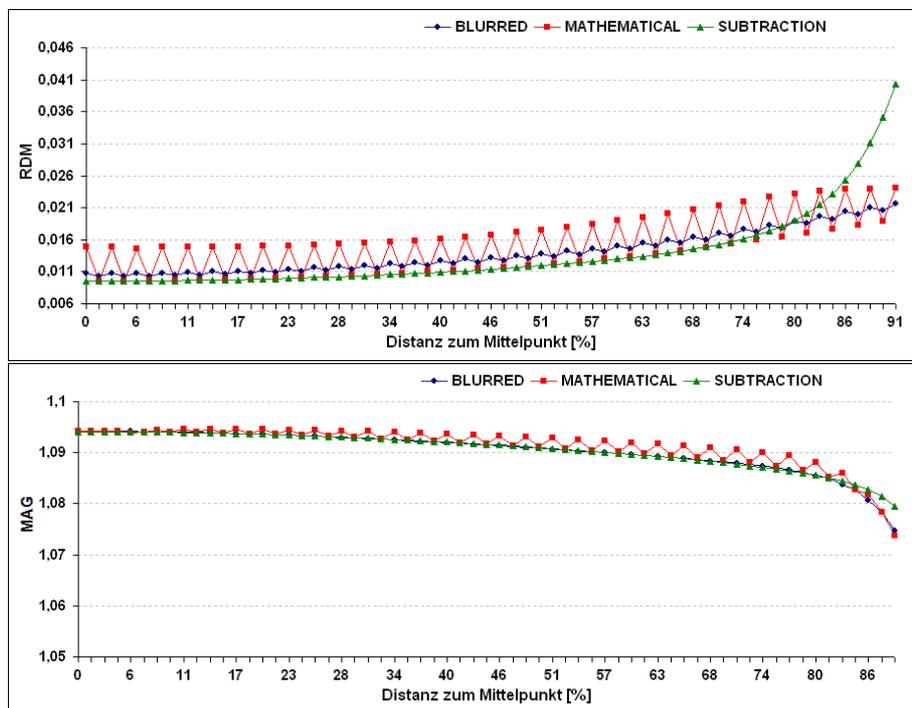


Abbildung 6.20: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 2 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

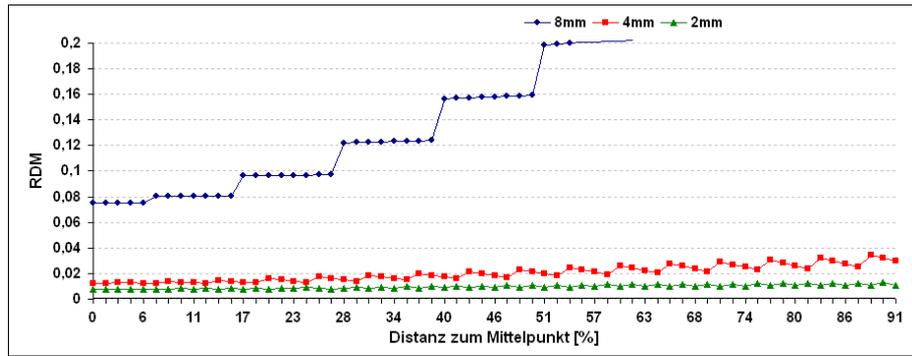


Abbildung 6.21: RDM des Blurred Dipole Models in verschiedenen Finite-Elemente-Hexaedernetzen mit Seitenlängen von 8 mm, 4mm und 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

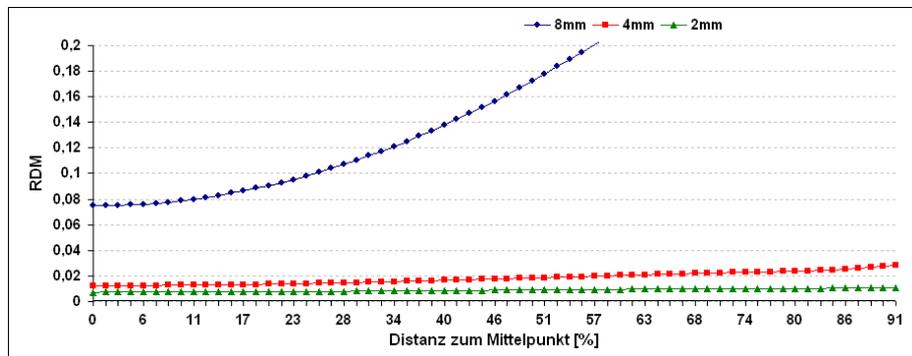


Abbildung 6.22: RDM des Mathematical Dipole Models in verschiedenen Finite-Elemente-Hexaedernetzen mit Seitenlängen von 8 mm, 4mm und 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

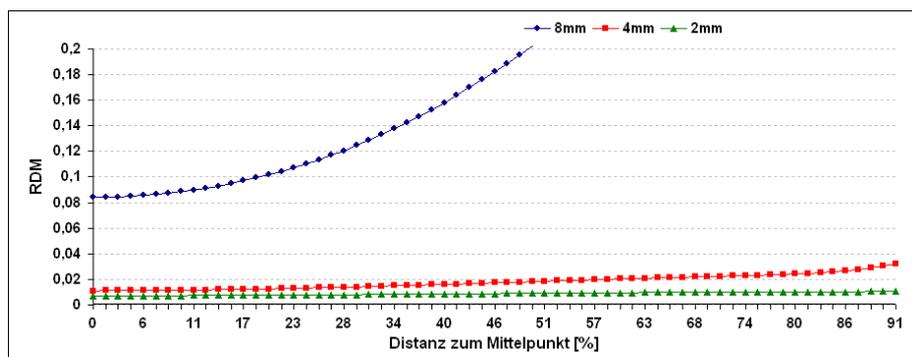


Abbildung 6.23: RDM des Subtraction Dipole Models in verschiedenen Finite-Elemente-Hexaedernetzen mit Seitenlängen von 8 mm, 4mm und 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

Die Abbildungen 6.21, 6.22 und 6.23 zeigen, wie schon erwähnt, dass ein Hexaedernetz mit mehr als 4 mm Seitenlänge ein nur unzureichendes Ergebnis für alle behandelten Modelle liefert.

Gleichzeitig wird eine Verbesserung von beim Übergang von 4 mm Seitenlänge (59098 Knoten) zu 2 mm (397634 Knoten) erreicht.

6.2.2 Knotenannäherung

Wie bei den Tetraedernetzen auch kann man bei den Hexaedernetzen den negativen Einfluss der FEM-Knoten auf das Blurred und das Mathematical Model sehen. Durch den regulären Aufbau der Netze wiederholen sich die Abstände zu den nächstgelegenen Knoten entlang der y-Achse von Element zu Element. So ist bei einer Verschiebungsweite von 1 mm pro Dipol ein Muster zu erkennen. Die Diagramme 6.24 und 6.25 zeigen dies in einem cub4mm Netz einmal für das Mathematical Model (Abb. 6.24) mit radial gerichteten Quellen und einmal für den Blurred Dipole (Abb. 6.25) mit tangential gerichteten Quellen.

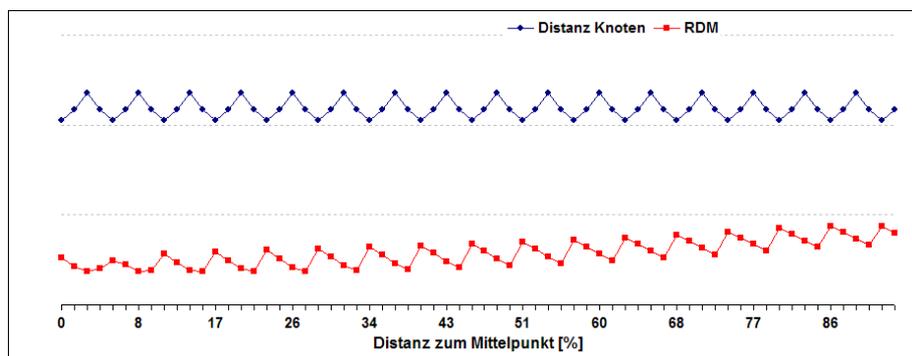


Abbildung 6.24: RDM des Mathematical Dipole Model und parallel die Abstände des Dipols zum nächstgelegenen Knoten des Elementes. Berechnet in einem Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 4 mm. Ein radialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

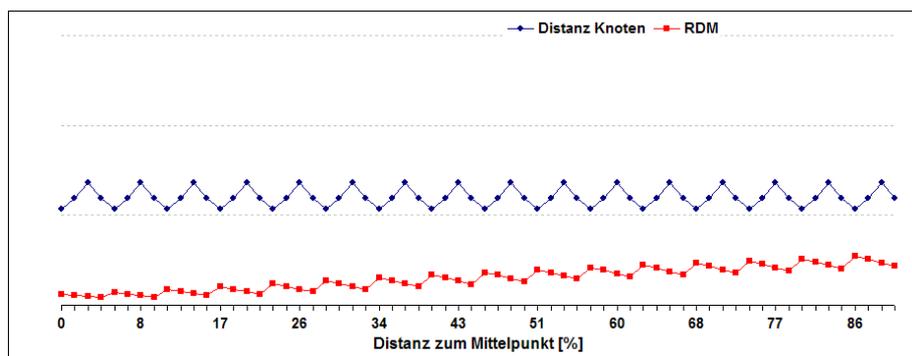


Abbildung 6.25: RDM des Blurred Dipole Model und parallel die Abstände des Dipols zum nächstgelegenen Knoten des Elementes. Berechnet in einem Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 4 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

6.2.3 Tangential vs. Radial

Auch der Vergleich zwischen tangentialer und radialer Dipolausrichtung in der Testreihe mit Hexaedernetzen bestätigt die Erkenntnisse aus Sektion 6.1. Dies wird im Übrigen auch durch die Ergebnisse von [30] bestätigt. Eine radial gerichtete Quelle hat größere Auswirkungen auf den numerischen Fehler, als ein tangential zeigender Dipol. Im Subtraction Model ist dieser Einfluss am deutlichsten ausgeprägt (Abb. 6.26 und 6.27 jeweils unten).

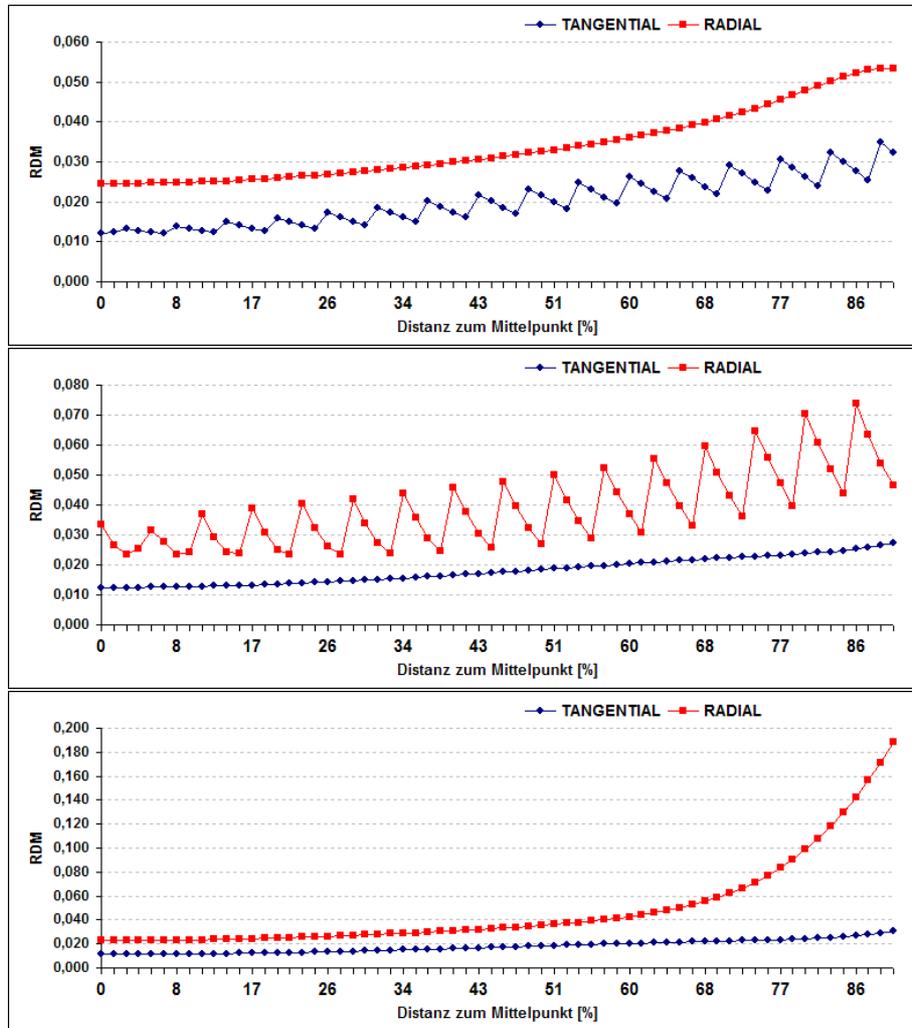


Abbildung 6.26: RDM in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 4 mm. Verglichen werden jeweils radiale mit tangentialen Quellen innerhalb der einzelnen Modelle. Blurred (oben), Mathematical (mitte) und Subtraction (unten). Die Dipole haben verschiedene Positionen entlang der y-Achse

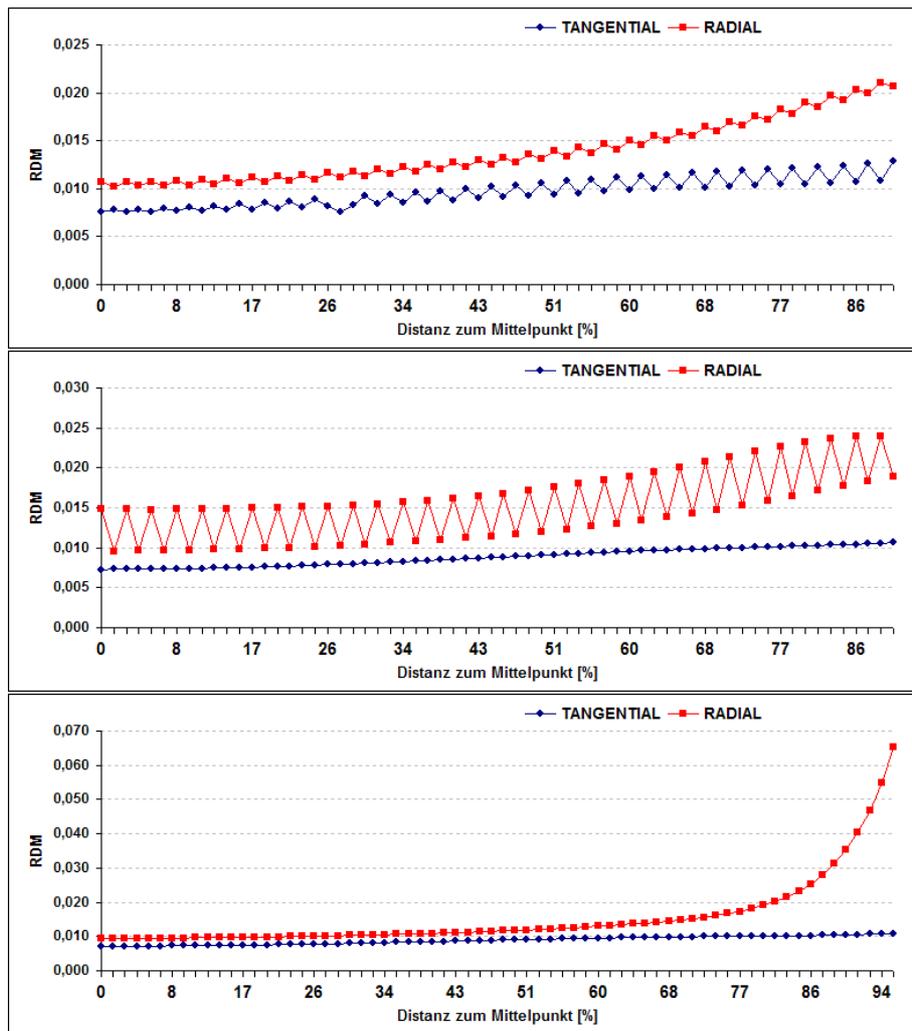


Abbildung 6.27: RDM in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 2 mm. Verglichen werden jeweils radiale mit tangentialen Quellen innerhalb der einzelnen Modelle. Blurred (oben), Mathematical (mitte) und Subtraction (unten). Die Dipole haben verschiedene Positionen entlang der y-Achse

Auch hier kann man zusammenfassend sagen, dass die erlangten Ergebnisse ein sehr gutes Verhalten der drei Modelle belegen. Bei dem feinsten Netz ist ein RDM-Fehler von unter 1 % erreicht worden. Der Magnitudenfehler jedoch bedarf einer Verbesserung, was durch das schon beschriebene Node-Shift-Verfahren erreicht werden kann.

6.3 Node Shifted Hexaeder Netze

Die nächste Testreihe befasst sich mit den Node Shifted Hexaeder Netzen. Ihre Besonderheit ist, dass sie den Rand der Kugel durch verschobene Oberflächenknoten besser und glatter approximieren können. Dadurch erhofft man sich eine noch bessere Annäherung des gesuchten Potentials.

Bei diesen FEM-Netzen stößt das in dieser Arbeit implementierte Subtraction Model an seine Grenzen. Nach vielen Testläufen, die immer einen Topologiefehler von 10 - 30 % als Resultat ergaben, zeigte sich, dass der Ansatz der konstanten Approximierung der Normalenableitung für S_h aus Gleichung (4.28) hier ein zu schlechtes Ergebnis liefert. Bei den regulären Hexaedernetzen kann man davon ausgehen, dass alle Knoten der extrahierten Oberflächenvierecke in einer Ebene liegen und somit die berechnete Normale senkrecht auf alle Punkte in diesem Viereck steht. Im Falle der Node Shifted Hexaeder ergaben Tests, dass dies nur bei den wenigsten Oberflächenelementen zutrifft. Somit ist die Berechnung einer Normalen im Schwerpunkt nicht mehr ausreichend. Auch Mittelungen über mehrere Teilnormalen ergab keine signifikante Verbesserung. Hier kann die Implementierung der linearen Approximierung der Normalenableitung eine Verbesserung herbeiführen.

Aus diesem Grund beschränken sich die Ergebnisse in dieser Sektion auf das Blurred und das Mathematical Dipole Model. Wieder wird die gleiche Kugel diskretisiert wie in den vorangegangenen Sektionen. Eine Visualisierung der Node Shifts sieht man in Abbildung 5.5. Die Fehler werden wieder an den 134 gleichmäßig verteilten Elektrodenpunkten auf der Kugeloberfläche berechnet.

In Abbildung 6.28 ist eine Testreihe des cub4mm_ns Netzes mit 52431 Knoten dargestellt. Man sieht einen höheren Einfluss der Knotenabstände auf das Blurred Model. Das Diagramm 6.29 zeigt den Vergleich der beiden Modelle auf dem feinsten Node Shifted Netz. Einem 2 mm Netz mit 398975 Knoten. Vergleicht man die beiden Diagramme miteinander, so ist zu erkennen, dass das Mathematical Model einen weiteren Schritt der Verbesserung schafft, als das Blurred Model.

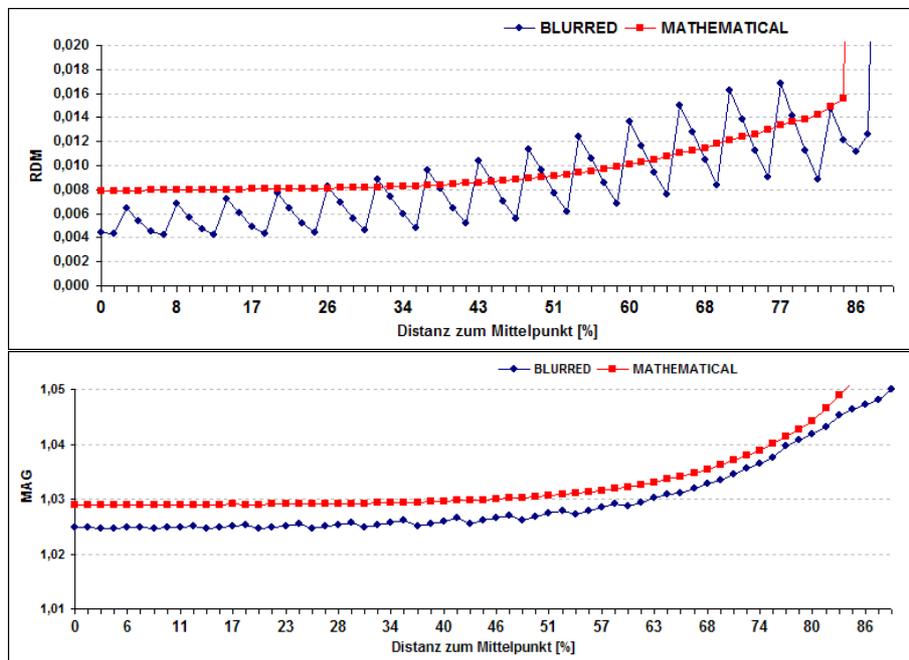


Abbildung 6.28: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 4 mm Node Shifted. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

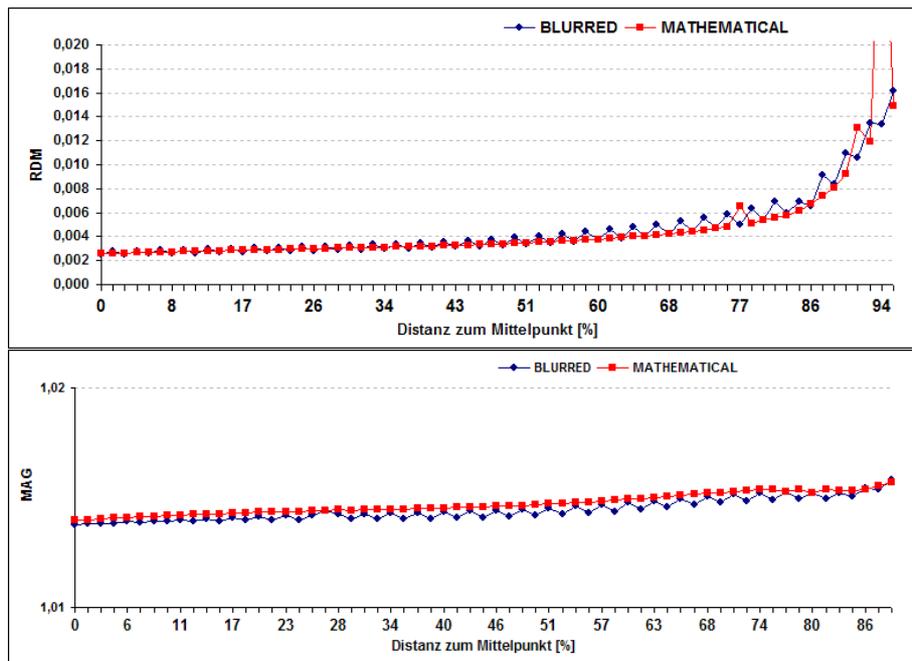


Abbildung 6.29: RDM und MAG in einem Finite-Elemente-Hexaedernetz mit einer Seitenlänge von 2 mm Node Shifted. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

Eine nähere Betrachtung der Node Shifted Hexaedernetze findet in der nächsten Sektion statt. Dort werden die beiden Arten der Kubusnetze miteinander verglichen.

6.4 Vergleich verschiedener FEM-Netze

Es ist schwierig, einen direkten Vergleich verschiedener Netztypen in dieser Testreihe durchzuführen. Man kann nicht von der Netzweite selbst ausgehen, da dies in Tetraedernetzen durch die Delaunay Tetrahedrization nicht immer gleich ausfällt. So ist zu beachten, dass Netze mit gleicher Knotenanzahl gegenüber gestellt werden.

Wie oben schon erwähnt hat das Node Shift Verfahren die Absicht, eine krumme Oberfläche wie die einer Kugel besser zu approximieren. Aus diesem Grund wird in dieser Sektion ein Vergleich der Node Shift mit der regulären Version durchgeführt.

cube4mm vs. cube4mm_ns

Dies wird zuerst mit den Netzen cube4mm mit 52138 Knoten und cube4mm_ns mit 52431 Knoten durchgeführt. Man kann deutlich erkennen, dass das Node Shift Verfahren tatsächlich einen Vorteil bringt. Besonders wirkt sich diese Verbesserung auf den Magnitudenfehler aus. Durch die glatte Annäherung der Oberfläche wirken weniger Störungen auf die Magnitude des berechneten Potentials ein. Die Abbildungen 6.30 und 6.31 zeigen einen Vergleich der Topologie- und Magnitudenfehler der beiden Netzversionen jeweils für das Blurred und das Mathematical Model.

Tatsächlich wird das Ergebnis der Cubusnetze durch das Node Shift Verfahren noch einmal verbessert. Auch der etwas schlechtere Magnitudenfehler konnte durch die bessere Approximierung der Kugeloberfläche deutlich reduziert werden.

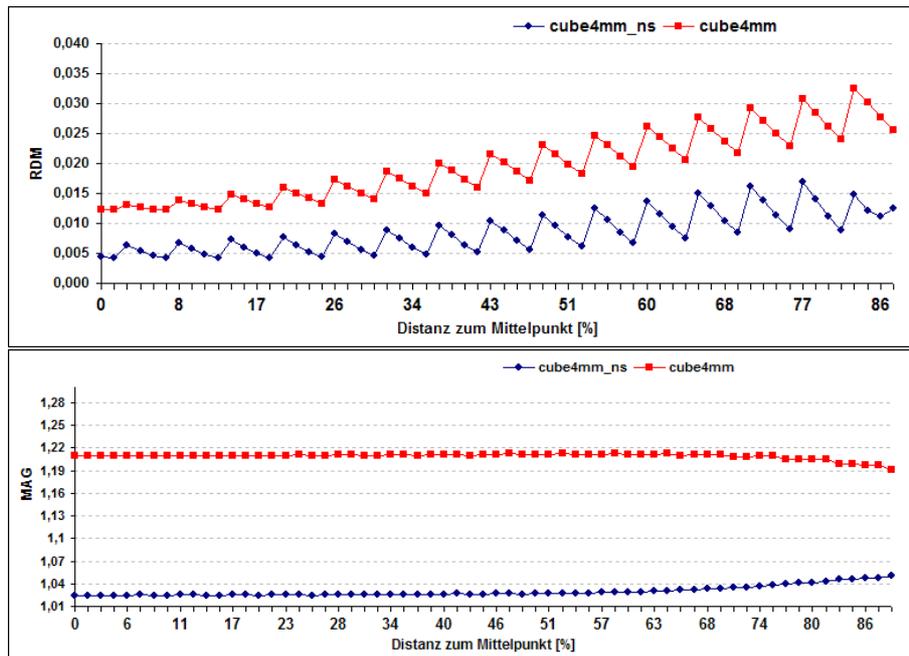


Abbildung 6.30: RDM und MAG des Blurred Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz im Vergleich mit einem Node Shift Hexaeder Netz bei einer Seitenlänge von 4 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

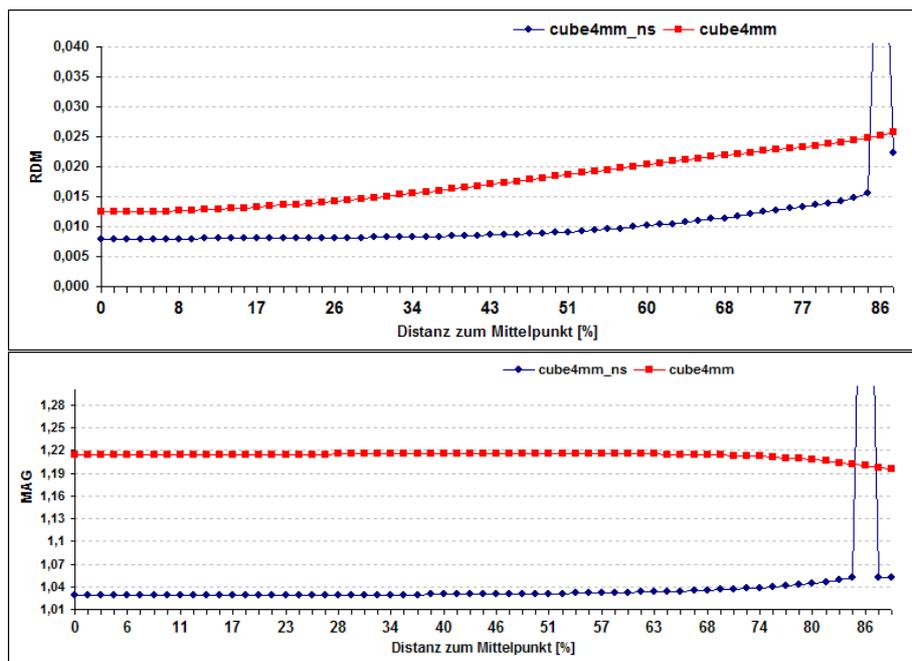


Abbildung 6.31: RDM und MAG des Mathematical Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz im Vergleich mit einem Node Shift Hexaeder Netz bei einer Seitenlänge von 4 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

cube2mm vs. cube2mm_ns

Auch der direkte Vergleich der 2 mm Kubusnetze bestätigt eine Verbesserung der Potentialberechnung. Die Abbildungen 6.32 und 6.33 zeigen den RDM und MAG des direkten Vergleichs der beiden FEM-Netze jeweils für den Blurred und Mathematical Dipole.

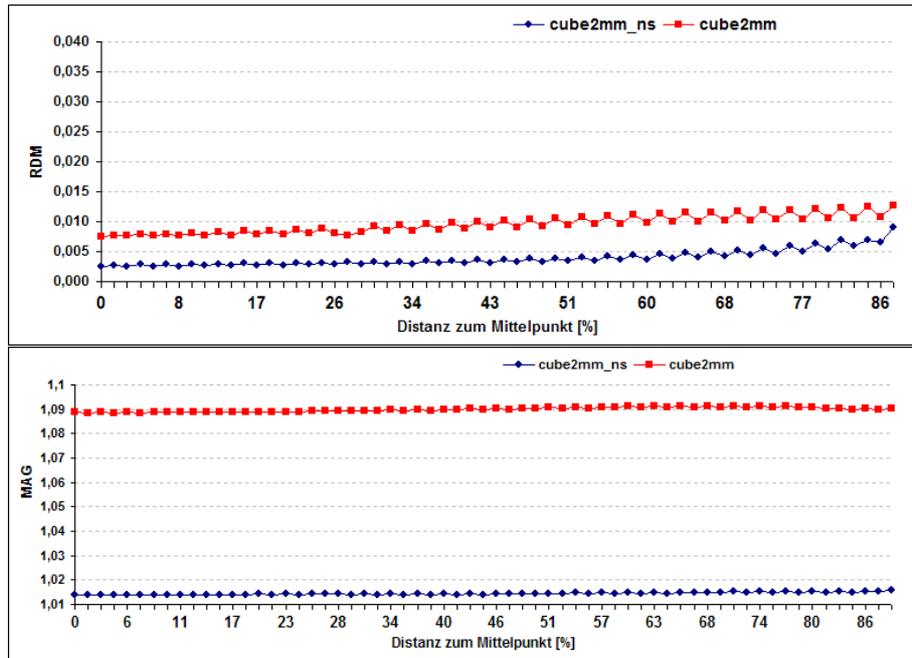


Abbildung 6.32: RDM und MAG des Blurred Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz im Vergleich mit einem Node Shift Hexaeder Netz bei einer Seitenlänge von 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

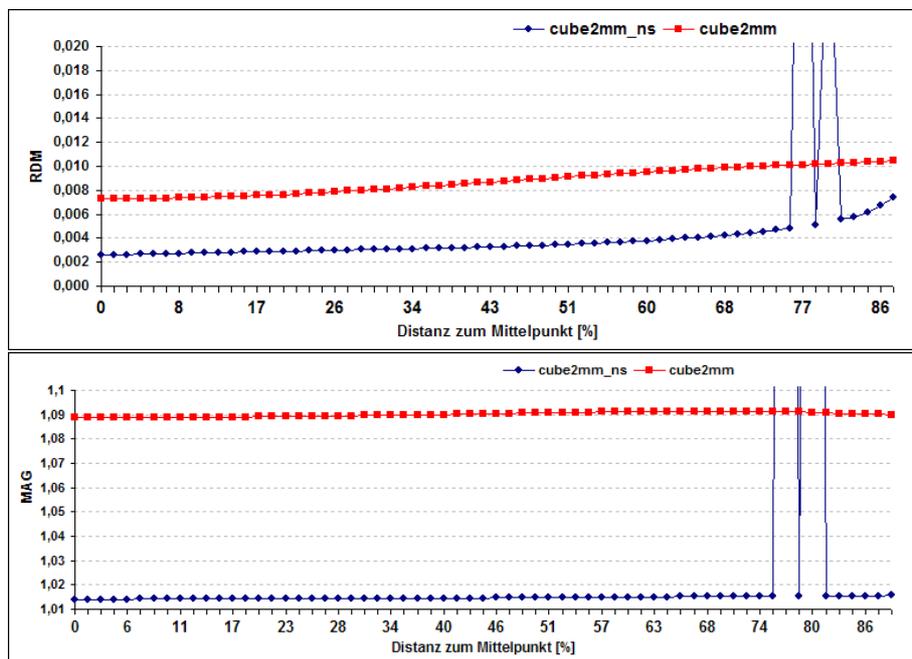


Abbildung 6.33: RDM und MAG des Mathematical Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz im Vergleich mit einem Node Shift Hexaeder Netz bei einer Seitenlänge von 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

6.5 134 vs. 81 Elektrodenpositionen

In dieser Testreihe, wird in einem kurzen Versuch beobachtet, was geschieht, wenn die Messpunkte, sprich die Elektrodenpositionen, variieren. Es wird an einem cube2mm Hexaeder Netz getestet. Die Daten des Kugelmodells sind die gleichen wie in den vorangegangenen Sektionen auch. Hier wird lediglich die Anzahl und Position der Elektroden verändert. Zum einen wird eine realistische Elektrodenkappe mit 81 Positionen auf der Oberseite der Kugel betrachtet. Zum anderen wird die bisher auch verwendeten 134 Elektroden, die gleichmäßig auf der gesamten Kugeloberfläche verteilt sind, verwendet. Abbildung 6.34 zeigt die beiden Elektrodenkonfigurationen visualisiert mit SCIRun. In den Diagrammen 6.35 bis 6.37 sind jeweils RDM und MAG der einzelnen Dipol-Modelle in bezug auf die beiden Elektrodenkonfigurationen dargestellt. Man sieht ein unerwartetes Verhalten der 81-Elektroden Kappe. Der Topologiefehler verbessert sich ab einen gewissen Abstand des Dipols vom Mittelpunkt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Anordnung der Elektroden erst oberhalb der Mitte beginnt und erst wenn die Quelle näher an den Elektroden ist, koennen die geringen Ströme einen besseren Wert erzielen.

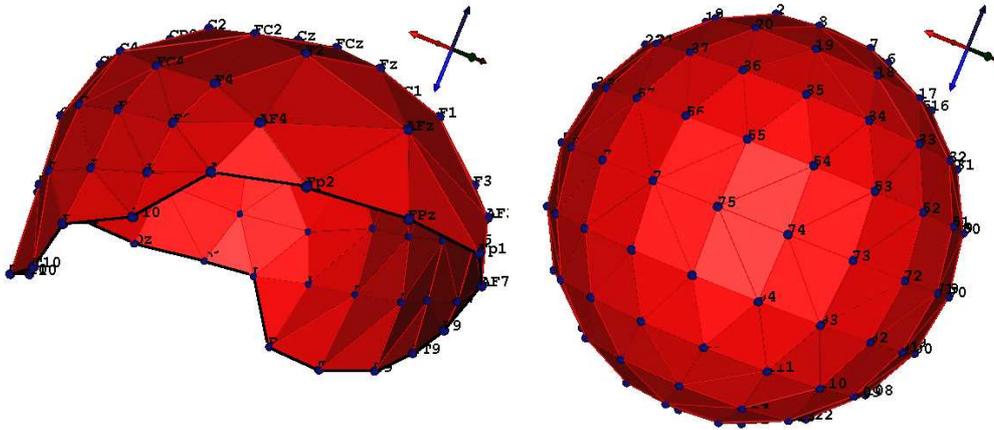


Abbildung 6.34: Eine realistische Elektrodenkappe mit 81 Elektroden bis über die Ohren verteilt (links) und eine Konfiguration aus 134 gleichmäßig verteilten Elektroden (rechts)

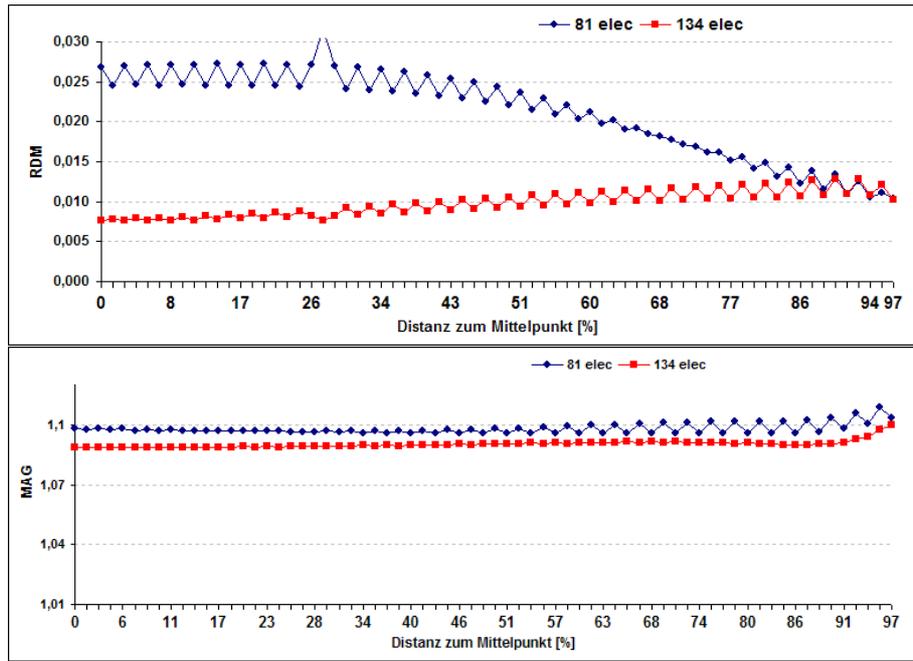


Abbildung 6.35: RDM und MAG des Blurred Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

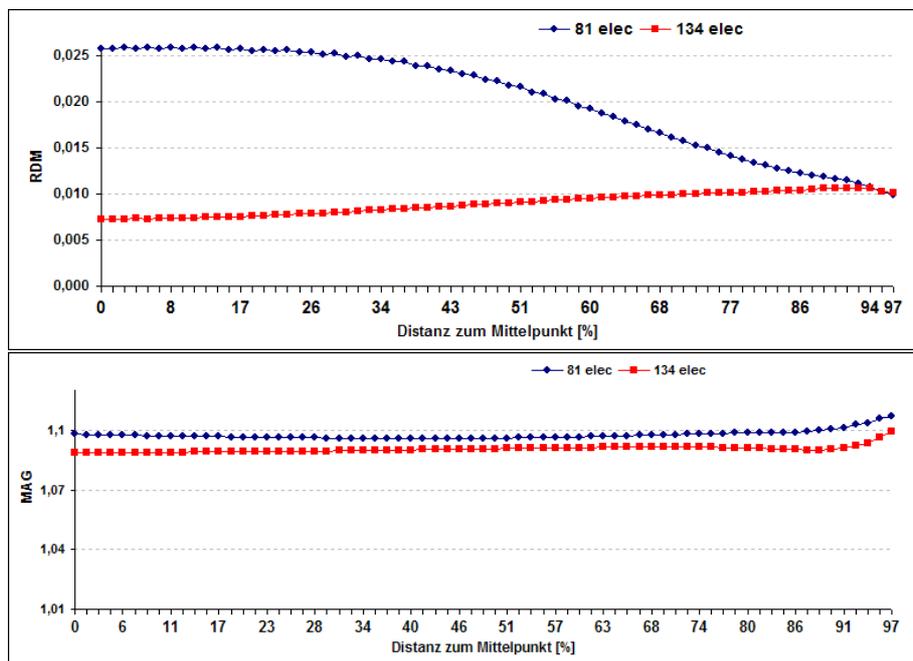


Abbildung 6.36: RDM und MAG des Mathematical Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

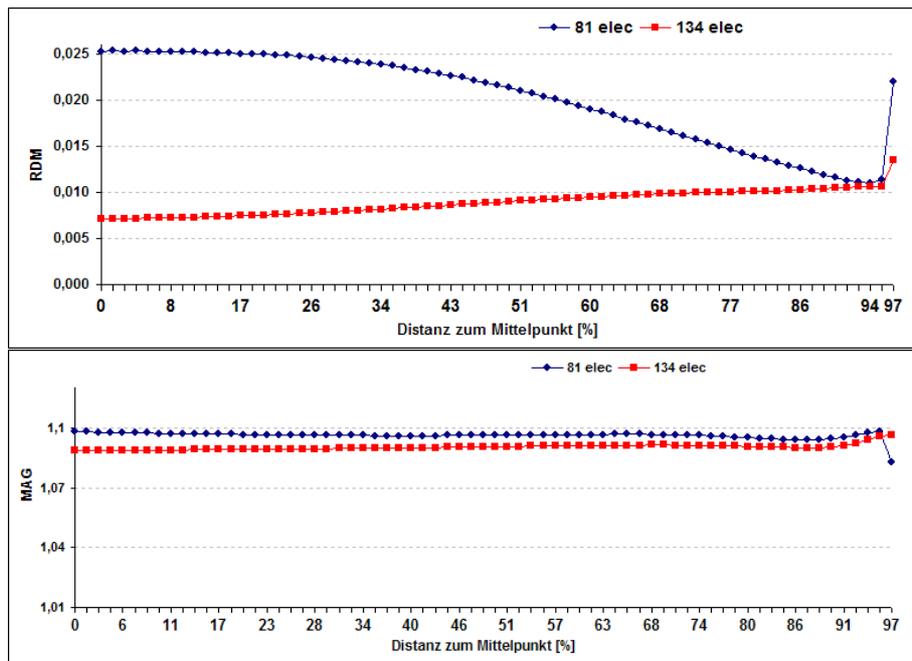


Abbildung 6.37: RDM und MAG des Subtraction Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse.

6.6 Anisotropie

Eine abschließende Testreihe beschäftigt sich mit dem Einfluss der Anisotropie der Schädelschicht auf die implementierten Dipol-Modelle. Hier wird der Fehler wieder an den 134 gleichmäßig verteilten Elektrodenpunkten ermittelt. In der Testkonfiguration wird das gleiche Kugelmodell verwendet wie bisher. Der Unterschied liegt nur in der Leitfähigkeit der Schädelschicht. Sie wird nach Tabelle 2.2 in das Programm von De Munck und in die Tensordateien von NeuroFEM eingegeben. Es wird hier eine Anisotropie von **1:3** (radial zu tangential) angegeben. Die Leitfähigkeiten der übrigen Schichten (Kopfhaut und Gehirn) bleiben unverändert isotrop. Die daraus resultierenden Topologie- und Magnitudenfehler werden in den Abbildungen 6.38 bis 6.40 mit denen des isotropen Testlaufes verglichen. Die Einwirkung der anisotropen Schädelschicht zeigt bei allen Modellen eine höhere Wirkung auf den Fehler als die des isotropen Schädels. Das resultiert in einem schlechteren RDM und MAG. Abbildung 6.41 zeigt wieder den Vergleich zwischen tangentialer und radialer Dipolausrichtung. Auch im Anisotropen bereitet eine radiale Ausrichtung mehr Schwierigkeiten als eine tangentielle Quelle.

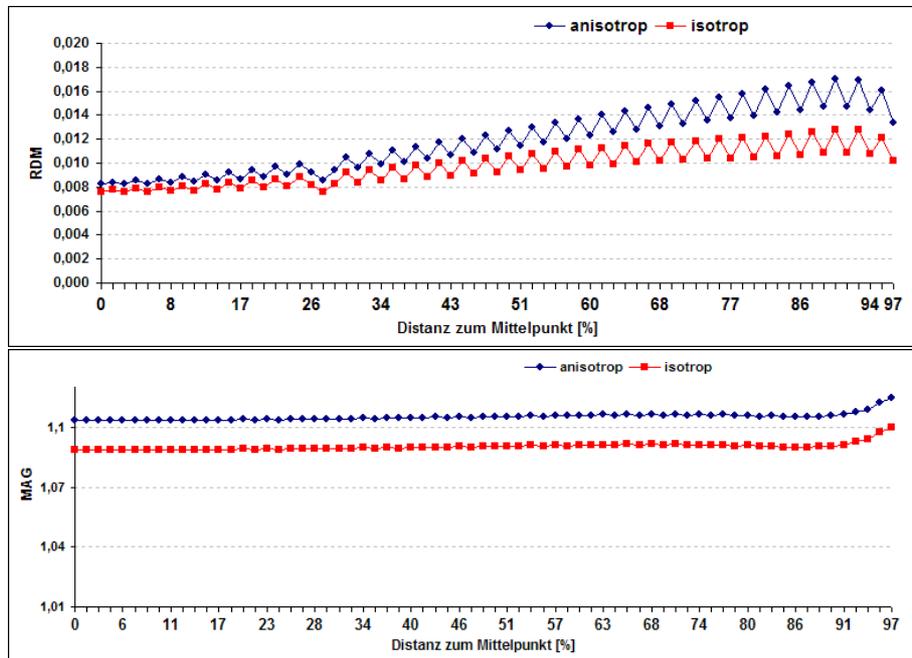


Abbildung 6.38: RDM und MAG des Blurred Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Der Vergleich des isotropen Modells mit dem der anisotropen Schädelschicht. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

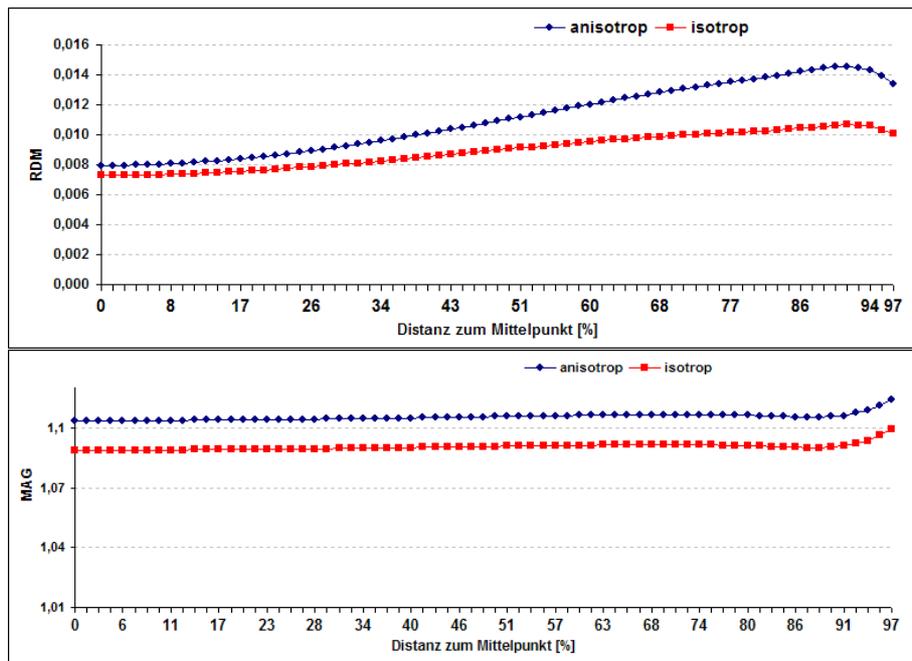


Abbildung 6.39: RDM und MAG des mathematical Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Der Vergleich des isotropen Modells mit dem der anisotropen Schädelschicht. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

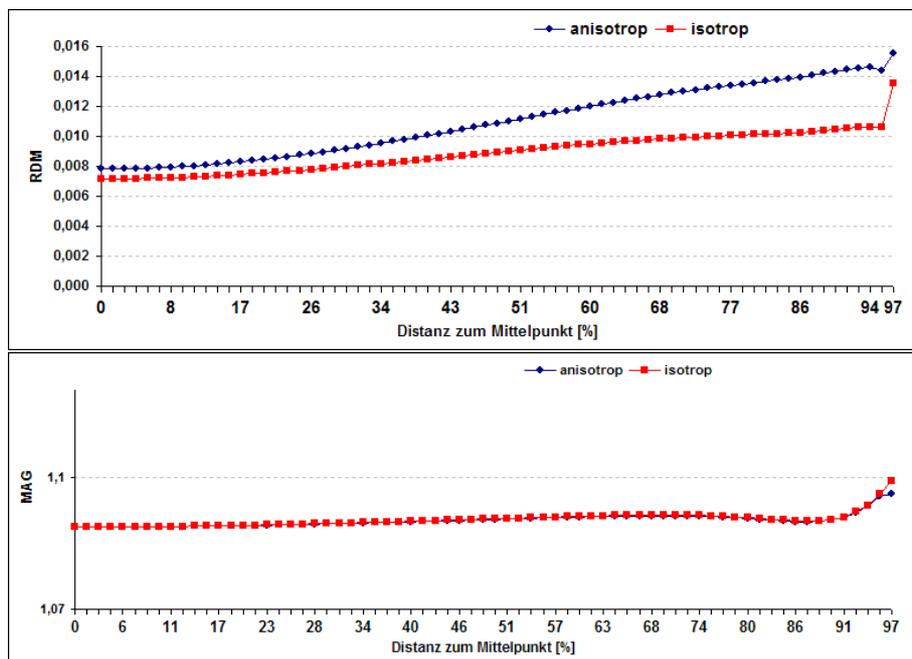


Abbildung 6.40: RDM und MAG des Subtraction Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Der Vergleich des isotropen Modells mit dem der anisotropen Schädelschicht. Ein tangentialer Dipol an verschiedenen Positionen entlang der y-Achse

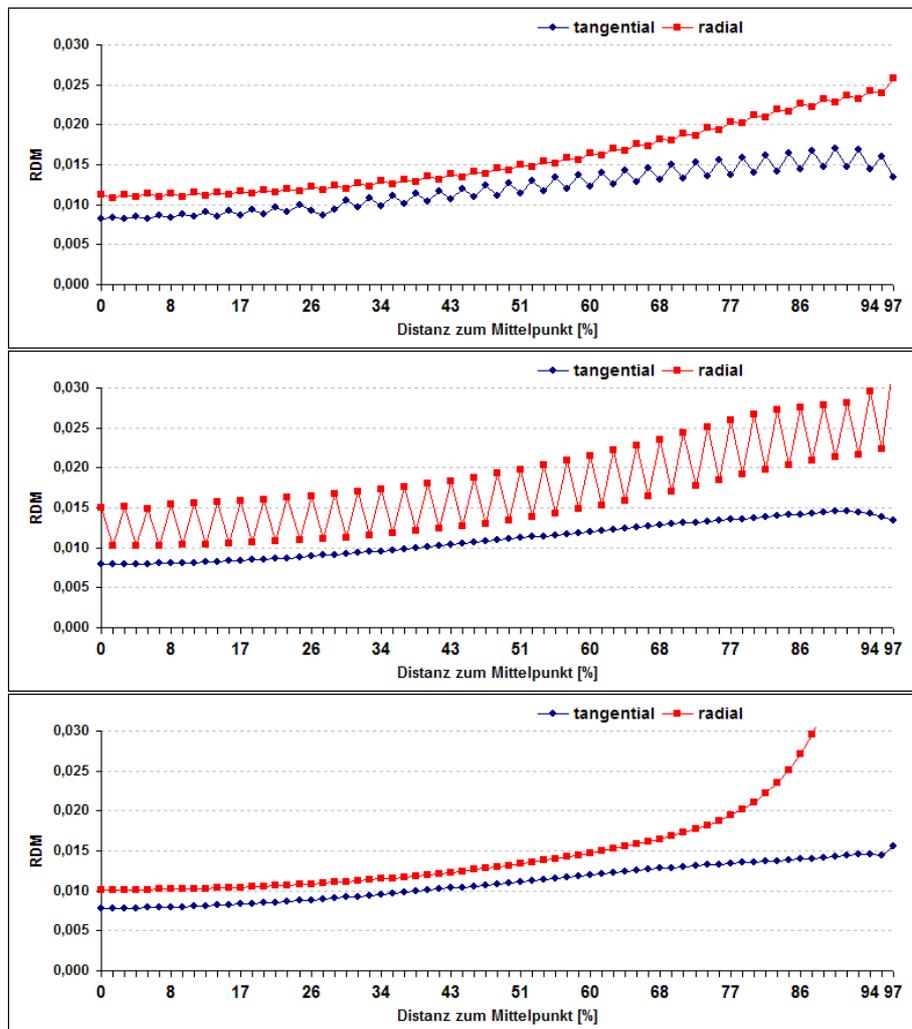


Abbildung 6.41: RDM und MAG des Blurred (oben), des Mathematical (mitte) und des Subtraction (unten) Dipole Model in einem regulären Finite-Elemente-Hexaedernetz mit der Seitenlänge 2 mm. Der Vergleich des Einflusses der anisotropen Schädelschicht auf einen tangential und radial ausgerichteten Dipols. Der Dipol nimmt verschiedene Positionen entlang der y-Achse ein

Die Abbildungen 6.42 bis 6.45 zeigen jeweils eine Gegenüberstellung der isotropen und der anisotropen Berechnung für einen radial und einen tangential ausgerichteten Dipol an der Stelle $\vec{m} = (127.0; 177.0; 127.0)$. Durch das relativ geringe anisotrope Verhältnis ist nur bei genauem Hinsehen ein Unterschied zu erkennen. Am deutlichsten sieht man den Einfluss der Anisotropie, wenn man die Potentiallinien der Abbildung 6.45 betrachtet. Am oberen Rand kann im Isotropen mehr Strom entweichen als im Anisotropen.

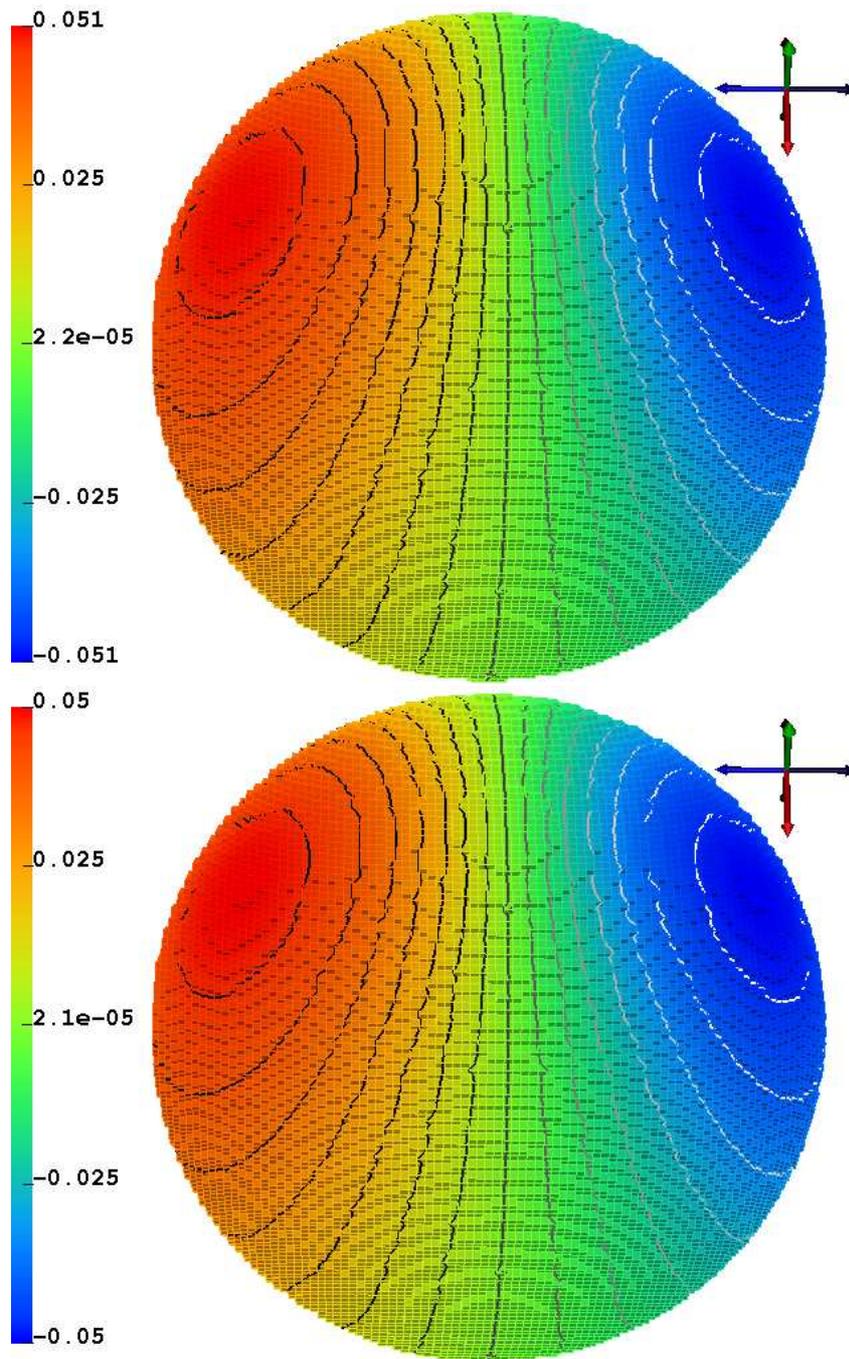


Abbildung 6.42: Potential an der Kugeloberfläche. Isotroper Schädel (unten) und anisotroper Schädel (oben). Ein Dipol in tangentialer Richtung, 50 mm in y-Richtung vom Mittelpunkt entfernt

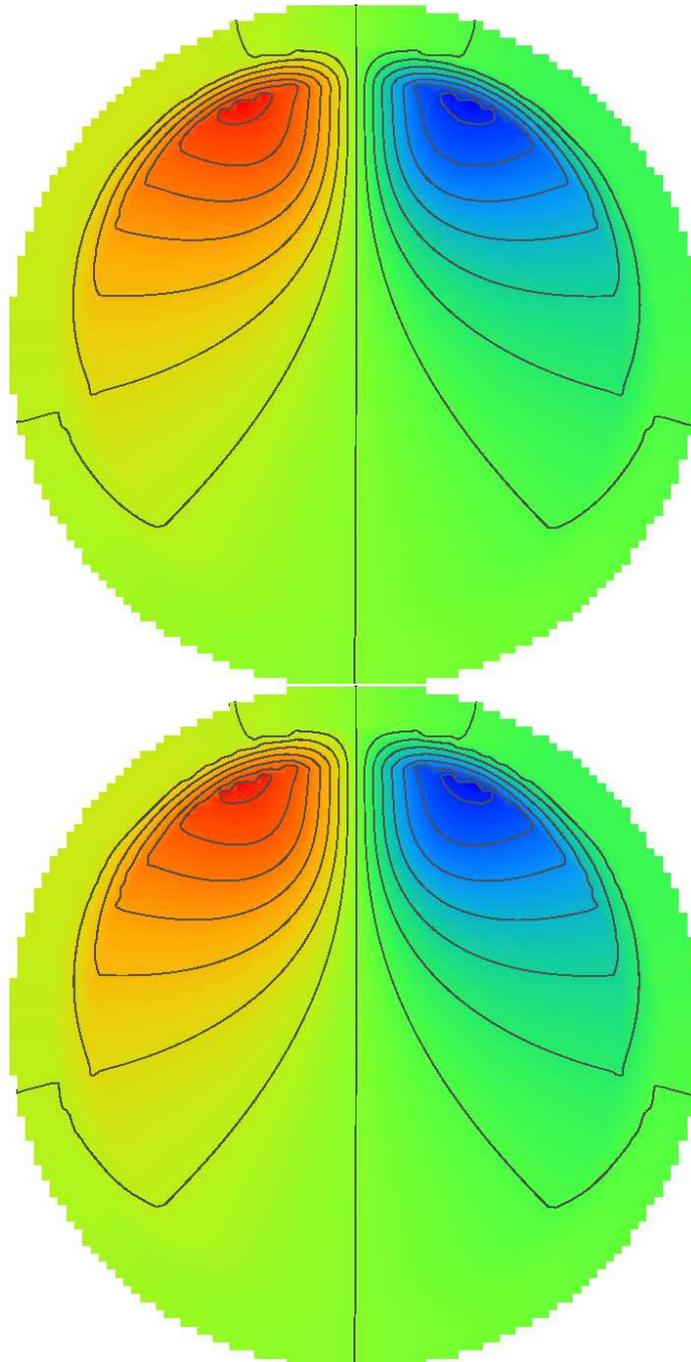


Abbildung 6.43: Potential im Inneren der Kugel. Isotroper Schädel (unten) und anisotroper Schädel (oben). Ein Dipol in tangentialer Richtung, 50 mm in y-Richtung vom Mittelpunkt entfernt

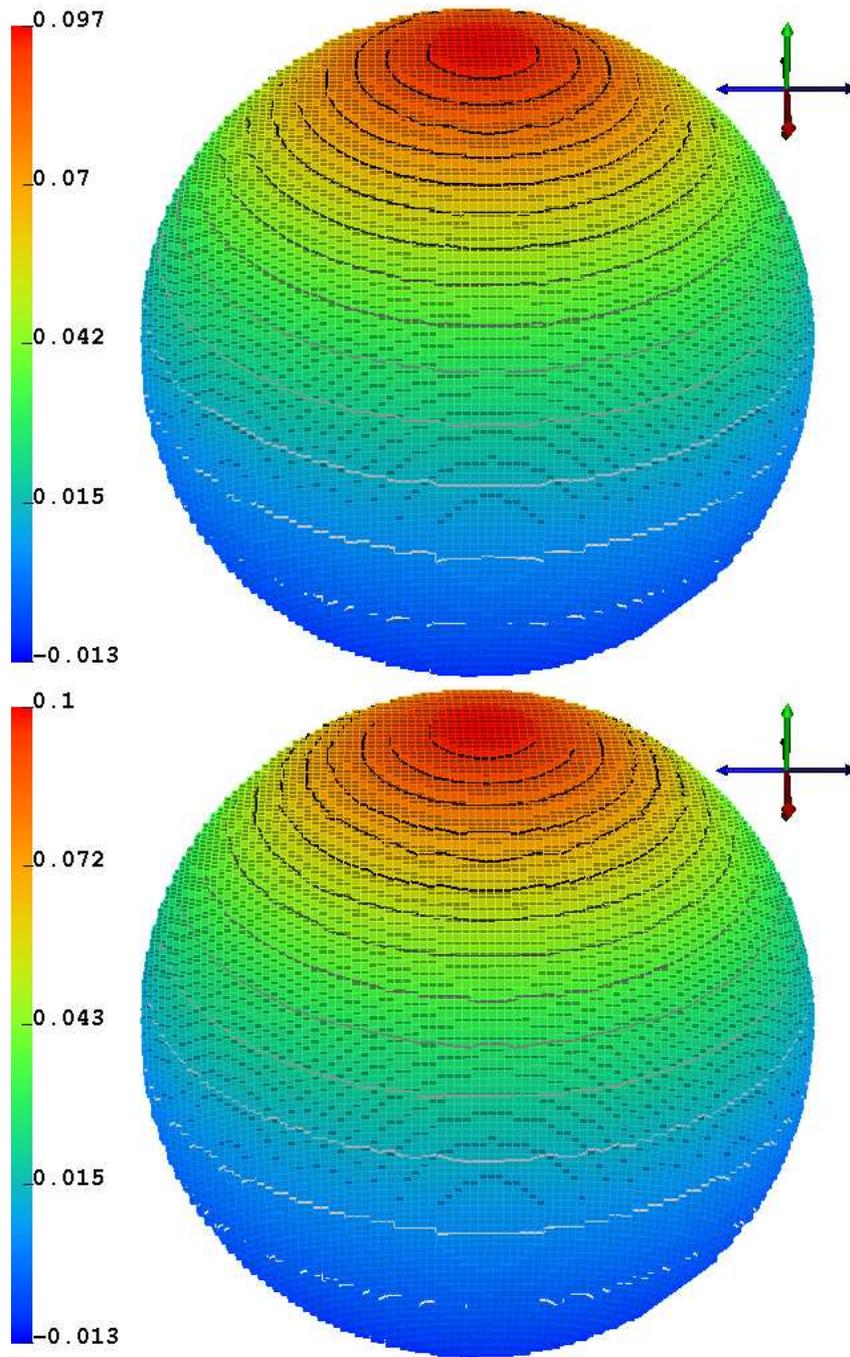


Abbildung 6.44: Potential an der Kugeloberfläche. Isotroper Schädel (unten) und anisotroper Schädel (oben). Ein Dipol in tangentialer Richtung, 50 mm in y-Richtung vom Mittelpunkt entfernt

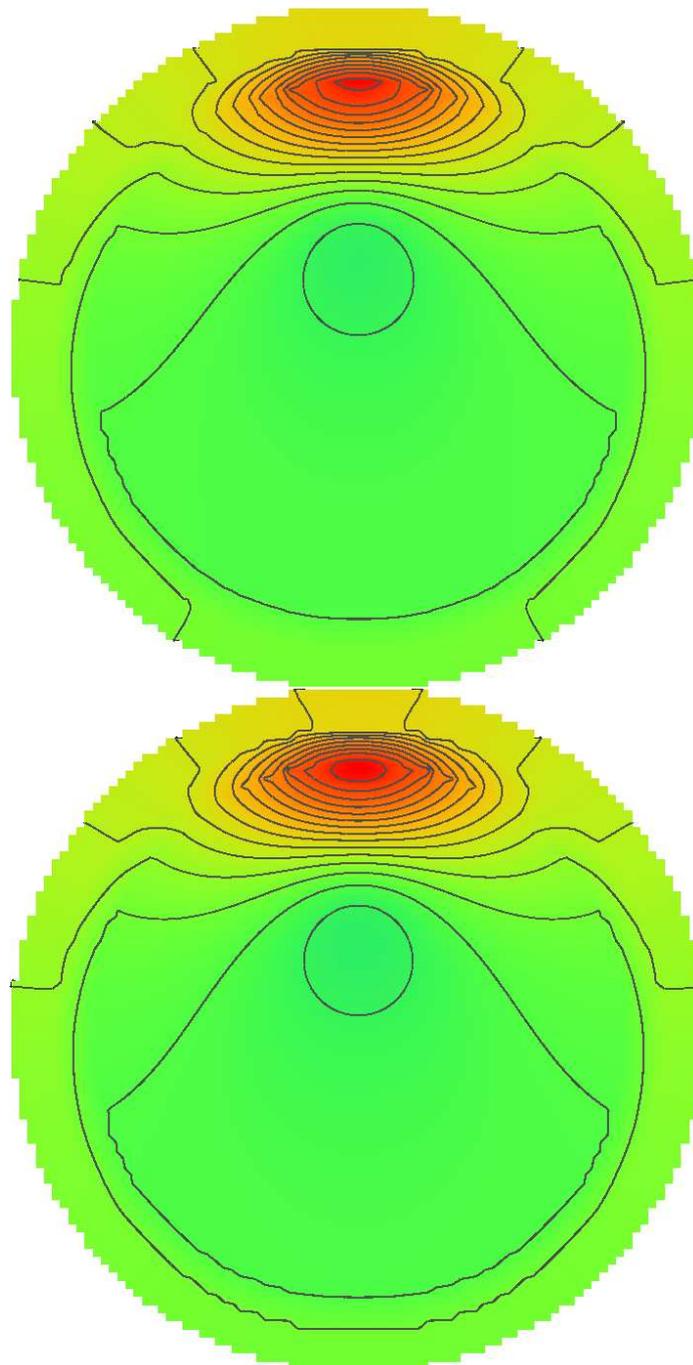


Abbildung 6.45: Potential im Inneren der Kugel. Isotroper Schädel (unten) und anisotroper Schädel (oben). Ein Dipol in tangentialer Richtung, 50 mm in y-Richtung vom Mittelpunkt entfernt

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit befasste sich mit der numerischen Rekonstruktion elektrischer Quellen im menschlichen Gehirn. Die Simulation von elektrischen Impulsen durch eine dipolare Quelle führt in den Bereich der Elektrostatik, wo durch die Maxwell'schen Gleichungen eine partielle Differentialgleichung für das sogenannte Bioelektrische Feldproblem, bestehend aus Inversen und Vorwärtproblem, abgeleitet werden kann. Diese gilt es numerisch zu lösen. Durch die auftretende Singularität in Form der δ -Distribution auf der rechten Seite der Gleichung ergibt sich jedoch ein Problem für die Numerik. Es gibt verschiedene Verfahren zur Approximation der Singularität. In dieser Arbeit wurden drei Ansätze näher beschrieben, zwei von ihnen implementiert und anschließend einem Gütevergleich unterzogen. Alle Modelle wurden mit der Finite Elemente Methode diskretisiert und in das Programmpaket NeuroFEM eingebunden. Die Aufstellung der Steifigkeitsmatrizen wurde unter Verwendung der Colsamm C++-Bibliothek von Herrn Härdtlein programmiert.

Das aus der Mechanik abgeleitete Blurred Dipole Model geht dem Prinzip nach, die Singularität nicht zu beheben, sondern ihren Einfluss räumlich aufzuteilen, indem die eine dipolare Quelle in eine Vielzahl von monopolaren Quellen und Senken um das Gebiet des Dipols herum aufgeteilt wird. Dadurch kann eine glattere rechte Seite diskretisiert werden.

Das Mathematical Dipole Model ist als ein Spezialfall der Zenger-Korrektur anzusehen. Es bedient sich der Definition der δ -Distribution bzw. ihres Integrals, und setzt dadurch die Werte für die Knoten direkt um die Quelle herum.

Im Subtraction Dipole Model wird das gesuchte Potential aufgeteilt in Singularitätenpotential und Korrekturpotential. Die Singularität wird so in den Teil des Gesamtpotentials verschoben, für den eine analytische Lösung bekannt ist. Das noch fehlende Korrekturpotential wird durch eine Poisson-Gleichung mit inhomogenen Neumann Randbedingungen beschrieben. Ist diese gelöst, wird sie auf das Singularitätenpotential addiert und ergibt das gesuchte Potential der Vorwärtsrechnung.

Um die drei Modelle geeigneten Tests unterziehen zu können wurde in Kapitel 5 eine umfassende Plattform aufgebaut, die mit verschiedenen FEM-Netzen, zweier Fehlerdefinitionen zum Vergleich und einer Möglichkeit, die analytische Lösung in einem Mehr-Schalen-Kugelmodell zu berechnen, ausgestattet wurde.

Anschließend wurde eine umfassende Testserie gestartet, die Stärken und Schwächen der Modelle aufzeigen sollte. Das Mathematical sowie das Blurred Model zeigte eine relativ gute Unempfindlichkeit in der Nähe von Leitfähigkeitssprünge. Jedoch wurden beide Modelle sehr von naheliegenden FEM-Knoten beeinflusst. Liegt die Quelle nahe an so einem Knoten, wächst der numerische Fehler

der beiden Ansätze.

Die Subtraktionsmethode bietet eine sehr gute Möglichkeit, Quellrekonstruktion zu betreiben. Nur in der Nähe von Schichtgrenzen, also von Leitfähigkeitssprüngen, zeigte sie eine höhere Empfindlichkeit als die anderen beiden Modelle auf. Dagegen zeigt dieser Ansatz eine hohe Stabilität, wenn der Dipol in die Nähe eines FEM-Knotens gelegt wird. Desweiteren besitzt diese Methode ein enormes zukünftiges Potential, da in ihr bereits die Ansätze zur Einleitung von Quellen in anisotrope Medien erforscht sind. Dieser Ansatz fehlt im Blurred Model ganz und befindet sich bei dem Mathematical Model noch in der Entwicklung.

Der Unterschied der Dipolausrichtung hatte auf alle drei Modelle den gleichen Einfluss. Sie hatten einen geringfügig höheren Fehler bei der Berechnung eines Vorwärtsproblems mit einer radial ausgerichteten Quelle als mit einer tangential gerichteten. Dies resultiert wieder auf den Einfluss der Leitfähigkeitssprünge bei einem Schichtwechsel.

Auch in anisotropen Schädelmodellen zeigten die drei Ansätze die gleichen Eigenschaften wie in den isotropen Modellen.

Der nächste Schritt im Anschluss dieser Arbeit würde eine fortführende Programmierung sein, die für das Subtraction Model die Einleitung von dipolaren Quellen in anisotrope Medien ermöglicht. Die Grundlagen hierfür sind im NeuroFEM Programmpaket gelegt. Auch würde eine weitergehende Arbeit in der Erforschung des Mathematical Dipole Models in Bezug auf Anisotropie eine Möglichkeit bieten. Gleichzeitig ist eine Erweiterung auf die Zenger-Korrektur höherer Ordnung erstrebenswert, um die Einflüsse der FEM-Knoten zu reduzieren. In weiterführenden Arbeiten kann man in viele Richtungen forschen, da der Bereich der Quellrekonstruktion im menschlichen Gehirn ein überaus komplexes Themengebiet darstellt. Alles in Allem ist zu sagen: "Es bleibt schwierig!"

Anhang A

Danksagung

Der erfolgreiche Abschluß dieser Arbeit wäre ohne die Unterstützung vieler Personen nicht möglich gewesen. Deshalb gilt mein besonderer Dank

Herrn Professor Dr. U. Råde, der es mir ermöglichte an seinem Lehrstuhl meine Arbeiten anzufertigen und für die Themenstellung. Und besonders für die Möglichkeit einer Reise nach Münster im Rahmen dieser Arbeit.

Meinem Betreuer Herrn Dipl. inf. H. Köstler, der mir Tag und Nacht mit Rat und Tat zur Seite stand. Und dies nicht nur während meiner Studien- und Diplomarbeit, sondern während meines gesamten Studiums.

Meinem Betreuer Dr. C. Wolters, der mir durch ausführliche Erklärungen das Verständnis vermittelte, das zur Bearbeitung dieses komplexen Themas notwendig war. Und der mir während meines Aufenthalts Essen und Logie bot.

Dipl. Math. Jochen Härdtlein, der mir im Bereich der Finiten Elemente, bei Problemen mit Col-samm und in jedem anderen Fall mit offener Tür und offenen Ohren zur Seite stand.

Herrn Patrick Münch, Frau Regina Kempfer und Frau Stefanie Paczulla, die mir durch die Korrektur meiner Arbeit sehr geholfen haben.

Und nicht zu vergessen meinen Eltern, die mir ihre volle Unterstützung während meines Studiums zukommen ließen.

Anhang B

Parameter der verwendeten Programme

De Munck

Das Programm von De Munck benötigt eine Reihe von Parameterdateien:

1. Information über Modell, Schichten, Koordinaten und Leitfähigkeiten (Hmodel.txt).

```
1: MODEL = CONCENTRIC_SPHERES
2: SPHERE_POS = (0.1286,0.128064,0.127024)
3: N_SHELL = 3
4: RADIUS0 = 0.09
5: RADIUS1 = 0.08
6: RADIUS2 = 0.07
7: RADIAL_CONDO = 0.33
8: RADIAL_COND1 = 0.0042
9: RADIAL_COND2 = 0.33
10: TANGENTIAL_CONDO = 0.33
11: TANGENTIAL_COND1 = 0.0042
12: TANGENTIAL_COND2 = 0.33
13: SURFACE_NAME0 = Skin
14: SURFACE_NAME1 = Skull
15: SURFACE_NAME2 = Brain
```

Diese Datei wird nicht übergeben, sondern automatisch ausgelesen.

2. Die Positionen der Elektroden (Electrodes.pts)

```
1: 134
2: 128.60000      128.06400      37.02400
3: 156.41153      128.06400      41.42891
4: 145.94021      149.80793      41.42891
5: 122.41135      155.17824      41.42891
6: 103.54268      140.13097      41.42891
7: 103.54268      115.99703      41.42891
8: 122.41135      100.94976      41.42891
```

```

9: 145.94021      106.32007      41.42891
10: 181.50067     128.06400      54.21247
11: 174.41333     154.51434      54.21247
12:      .          .          .
13:      .          .          .
14:      .          .          .

```

3. Eine Datei, in der das Dipolmoment enthalten ist (Dipol.mat)

```

1: 1 3
2: 0 0 1

```

4. Die Position des Dipols (Dipol.pts)

```

1: 1
2: 128.656      137.0      127.039

```

Die drei Parameterdateien werden dem Aufruf wie folgt übergeben:

```
./testmultisphere Electrodes.pts Dipol.mat Dipol.pts
```

NeuroFEM

Der NeuroFEM-Aufruf erwartet ebenfalls eine Reihe von Parameterdateien:

1. FEM-Geometriedatei in der die Knoten, Elementtypen, Elemente und Positionen der Gitterstruktur enthalten sind. (Bsp: ca_main.geo)

```

1: BOI - GEOMETRIEFILE
2: =====
3: =====
4: BOI - STEUERKARTE
5: ANZAHL DER KNOTEN           : 3771
6: ANZAHL DER ELEMENTE        : 19912
7: GEOMETR. STRUKTUR - DIMENSION : 3
8: EOI - STEUERKARTE
9: =====
10: =====
11: BOI - KOORDINATENKARTE
12: 4.00000E+01 1.21000E+02 1.18000E+02 4.00000E+01 1.29000E+02 1.23000E+02
13: 4.00000E+01 1.29000E+02 1.33000E+02 4.00000E+01 1.37000E+02 1.28000E+02
14: 4.10000E+01 1.14000E+02 1.27000E+02 4.10000E+01 1.17000E+02 1.36000E+02
15: 4.10000E+01 1.29000E+02 1.13000E+02 4.10000E+01 1.32000E+02 1.42000E+02
16:      .          .          .
17:      .          .          .
18:      .          .          .
19: 2.17000E+02 1.31000E+02 1.15000E+02 2.17000E+02 1.35000E+02 1.38000E+02
20: 2.17000E+02 1.39000E+02 1.20000E+02 2.17000E+02 1.41000E+02 1.30000E+02
21: 2.18000E+02 1.28000E+02 1.27000E+02

```

```

22:   EOI - KOORDINATENKARTE
23:   =====
24:   =====
25:   BOI - ELEMENTKNOTENKARTE
26:     303:    150    50    40    76
27:     303:    140    150    40    76
28:     303:    110    76    50    150
29:     303:    114    50    40    150
30:     .      .      .      .      .
31:     .      .      .      .      .
32:     .      .      .      .      .
33:     303:   3525   3445   3405   3546
34:     303:   3742   3752   3744   3763
35:     303:   3672   3702   3561   3639
36:   EOI - ELEMENTKNOTENKARTE
37:   =====
38:   =====
39:   EOI - GEOMETRIEFILE

```

2. Leitfähigkeiten der Elemente, diese Datei wird nicht übergeben, da je nach übergebener Geometriedatei entschieden wird, wo die Leitfähigkeiten stehen. (Bsp: ca_perm.knw)

```

1:   BOI - TENSORVALUEFILE
2:   =====
3:   =====
4:   BOI - TENSOR
5:         1 3.300000E-01 3.300000E-01 3.300000E-01
6:         0.0000      0.0000      0.0000
7:         2 3.300000E-01 3.300000E-01 3.300000E-01
8:         0.0000      0.0000      0.0000
9:         3 3.300000E-01 3.300000E-01 3.300000E-01
10:        0.0000      0.0000      0.0000
11:         .          .          .
12:         .          .          .
13:         .          .          .
14:       19911 3.300000E-01 3.300000E-01 3.300000E-01
15:         0.0000      0.0000      0.0000
16:       19912 3.300000E-01 3.300000E-01 3.300000E-01
17:         0.0000      0.0000      0.0000
18:   EOI - TENSOR
19:   =====
20:   =====
21:   EOI - TENSORVALUEFILE

```

3. Elektrodendatei die auch die Vorlage für das De Munck Programm stellt. (Elektrodes.elc)

```

1:   ReferenceLabel avg
2:   NumberPositions=   134

```

```

3:   UnitPosition mm
4:   Positions
5:   128.60000      128.06400      37.02400
6:   156.41153      128.06400      41.42891
7:   145.94021      149.80793      41.42891
8:   122.41135      155.17824      41.42891
9:   103.54268      140.13097      41.42891
10:  103.54268      115.99703      41.42891
11:  122.41135      100.94976      41.42891
12:  145.94021      106.32007      41.42891
13:  181.50067      128.06400      54.21247
14:  174.41333      154.51434      54.21247
15:  .               .               .
16:  .               .               .
17:  .               .               .
18:  122.41135      100.94976      212.61909
19:  145.94021      106.32007      212.61909
20:  128.60000      128.06400      217.02400
21:  NumberPolygons= 264
22:  TypePolygons= 3
23:  Polygons
24:    1    2    3
25:    1    3    4
26:    1    4    5
27:    .    .    .
28:    .    .    .
29:   132  134  133
30:   133  134  127
31:  Labels
32:  1 2 3 4 5 6 7 . . .

```

4. Parameterdatei in der Löserkonfigurationen, Residuen, Dipolmodelle usw. definiert werden.
(Bsp: blurred.par)

```

1:   [NeuroFEMSimulator]
2:   # GENERAL PARAMETERS
3:   # residuum of the forward solution
4:   toleranceforwardsolution= .10000E-08
5:   # degree of Gaussian integration (2 is recommended)
6:   degreeofintegration= 2
7:   # different analytical solutions for the EEG problem
8:   analyticalsolution= 1
9:
10:  # should METIS repartition for parallel run?
11:  metisrepartitioning= 1
12:
13:  # SOLVER (1:Jakobi-CG, 2:IC(0)-CG, 3:AMG-CG, 4:PILUTS(ILLDT)-CG)

```

```

14: solvermethod= 3
15: # use or use not lead field basis approach
16: associativity= 0
17: # NeuroFEM Solver
18: # parameter file for Pebbles solver
19: pebbles= pebbles.inp
20: # ONLY for MultiRHS-Pebbles: number of right-hand-sides
21: pebblesnumrhs= 1
22:
23: # SOURCE SIMULATION
24: # threshold of all dipoles to appear in the result files
25: dipolethreshold= .10000E+01
26: # blurring single loads to adjacent nodes by means of the Gaussian distribution
27: sourcesimulationepsilondirac= .10000E-08
28:
29: # DIPOLE MODELING
30: # dipole modeling;
31: dipolemodelingsmoothness= 2
32: # power of the dipole moments to be considered
33: dipolemodelingorder= 2
34: # internal scaling factor; should be larger than twice the element edge length
35: dipolemodelingscale= 20.000
36: # Lagrangian multiplier for the (inverse) dipole modeling
37: dipolemodelinglambda= .10000E-05
38: # source-sink separation of the analytical dipole model
39: dipolemodelingdistance= 1.0000
40: # use rango dipole model
41: dipolemodelingrango= 0
42: # dipole model (0 = Blurred, 1 = Zenger, 2 = Rango)
43: dipolemodel= 0
44:
45: # Monopole/Dipole
46: # calculation of the potential distribution for spherical
47: analyticaldipole= 0
48: # forward solution computation with monopoles or dipoles
49: dipolesources= 1
50: # spread a nodal load to adjacent nodes
51: sourcesimulation= 1
52: #average value of the potential is subtracted
53: #from the analytical results
54: veragecorrection= 0
55:
56: [NeuroFEMGridGenerator]
57: # Number of materials
58: nummaterials= 7
59: # Conductivities of fem head model
60:

```

```

61: #define EXTRA          3          // tissue codes (see D1.2b)
62: #define SKULL          1
63: #define CSF            8
64: #define GREY_MATTER    7
65: #define WHITE_MATTER   6
66:
67: # Conductivity in S/m
68: #skin_cond      0.33;
69: #skull_cond     0.0042;
70: #csf_cond       1.79;
71: #grey_cond      0.337;
72: #white_cond_iso 0.14;
73: # The first value corresponds to the electrode which will be added to the mesh
74: conductivities=
75: 1.0 0.33 0.0042 0.33 0.33 0.33 0.33
76: # Labels in the head model corresponding to the different tissues
77: # The first value corresponds to the electrode which will be added to the mesh
78: labels=
79: 1000 1 2 3 4 4 4
80:
81: # Tissue labels in the head model for which the tensor valued conductivity
82: #should be used if available
83: tensorlabels=
84: #0 0 1 0 0 1 0
85: 0 0 0 0 0 0 0
86:
87:
88: [FileFormats]
89: #ReferenceData file: 1= Vista, 2= ASA, 3= ASCII
90: ReferenceDataIn= 2
91: #LeadfieldMatrix input file: 1= Vista, 2= ASA
92: LeadfieldIn= 1
93: #SensorConfiguration file: 1= Vista, 2= ASA
94: SensorconfigurationIn= 2
95: #Source Space Grid: 1= Vista, 2= ASA, 3= CAUCHY
96: SourceSpaceIn= 1
97: #FEM HeadGrid: 1= Vista, 2= ASA, 3= CAUCHY
98: HeadGridIn= 1
99: #Output File; Format: 1= Vista, 2 = ASA, 3 = Vista + ASA,
100: #           4 = Vista + Ascii, 5 = Cauchy, 6 = SCIRun
101: ResultOut= 6

```

5. Dipoldatei, in der eine genaue Beschreibung des verwendeten Dipols enthalten ist. (source.dip)

```

1: # 1 dipole(s) at 1 time step
2: UnitPosition      mm
3: UnitMoment        nAm
4: UnitTime          ms

```

```
5:  NumberPositions= 1
6:  NumberTimeSteps= 1
7:  TimeSteps        0(1)1
8:  FirstTimeStep    0
9:  LastTimeStep     1
10: MomentsFixed
11: 0    0    1
12: PositionsFixed
13: 127.0 77.0 127.0
14: Magnitudes
15: 1
16: NoLabels
```

Die Parameterdateien sowie andere direkte Parameter werden wie folgt übergeben:

```
./neurofem -i sourcesimulation \\
           -h ca_main.geo \\
           -s Elektrodes.elc \\
           -p blurred.par \\
           -dip source.dip \\
           -fwd FEM \\
           -o OUTPUTSTRING \\
           -sens EEG
```

Literaturverzeichnis

- [1] Homepage of neurofem integrator, 2005. <http://www.sci.utah.edu/personnel/slew.html>.
- [2] K.A. Awada, D.R. Jackson, J.T. Williams, D.R. Wilton, S.B. Baumann, and A.C. Papanicolaou. Computational aspects of finite element modeling in EEG source localization. 44(8):736–751, 1997.
- [3] S. Bergler. *Parallelisierung der Gitterkomponente im ORCAN Framework*. Studienarbeit, Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, 2005.
- [4] Musiol Mühlig Bronstein, Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 1999.
- [5] H. Buchner, G. Knoll, M. Fuchs, A. Rienäcker, R. Beckmann, M. Wagner, J. Silny, and J. Pesch. Inverse localization of electric dipole current sources in finite element models of the human head.
- [6] D. Camacho, R. Hopper, G. Lin, and B. Myrs. An improved method for finite element mesh generation of geometrically complex structures with application to the skullbase. *Biomechanics*, 30:1067–1070, 1997.
- [7] J.C. de Munck. The potential distribution in a layered anisotropic spherical volume conductor. *J. Appl. Phys.*, 64 (2):464–470, 1988.
- [8] J.C. de Munck. A fast method to compute the potential in the multisphere model. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 40:1166–1173, 1993.
- [9] P. Frey, P.-L. George, and H. Borouchaki. Delaunay tetrahedralization using an advancing-front approach. *INRIA, Gamma Project, Domaine de Voluceau*, (105), 2005.
- [10] M. S. Gockenbach. *Partial Differential Equations*. Michigan Technological University, 2003.
- [11] H.-G. Großmann, Ch. und Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. B. G. Teubner Stuttgart, 1992.
- [12] F. Hartmann, U. und Kruggel. From segmented medical voxel datasets to high quality finite element meshes. *IEEE Biomed*, 2002.
- [13] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil II*. B.G. Teubner Stuttgart, 1991.
- [14] <http://www10.informatik.uni-erlangen.de>, 2005.
- [15] <http://www.ccrl-nece.de/vgrid/>, 2005.
- [16] <http://www.neuro.com/>, 2005.
- [17] J. Härdtlein. Efficient and user-friendly computation of local stiffness matrices. *Frontiers in Simulation, Simulationstechnique 18th Symposium*, (18):748–753, 2005.

- [18] J. Härdtlein, A. Linke, and C. Pflaum. Fast expression templates. *Computational Science - ICCS 2005*, (3515):1055–1063, 2005.
- [19] H. Köstler. *Akkurate Behandlung von Singularitäten bei partiellen Differentialgleichungen*. Diplomarbeit, Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, 2003.
- [20] M. Mohr. *Simulation of Bioelectric Fields: The Forward and Inverse Problem of Electroencephalographic Source Analysis*. Doktorarbeit, Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, 2004.
- [21] S. Möhrs. *Bioelectric Field Simulation and Visualization: Anisotropic Conductivities for the Skull and Brain White Matter*. Diplomarbeit, Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, 2003.
- [22] 2000-2005. A parallel MPI-based C++ class structured code for fast high-resolution EEG and MEG forward modeling. A. Anwander and C.H. Wolters [28].
- [23] R. Plonsey and D. Heppner. Considerations on quasi-stationarity in electro-physiological systems. *Bull.math.Biophys.*, 29:657–664, 1967.
- [24] U. Rüde. *Zur numerischen Behandlung von Singularitäten in elliptischen partiellen Differentialgleichungen*. Doktorarbeit, Technische Universität München, 1988.
- [25] P.H. Schimpf, C.R. Ramon, and J. Haueisen. Dipole models for the EEG and MEG. *IEEE*.
- [26] Scirun: A scientific computing problem solving environment. Scientific Computing and Imaging Institute (SCI), <http://software.sci.utah.edu/scirun.html>.
- [27] P. Shirley. *Fundamentals fo Computer Graphics*. A K Peters, Ltd., 5th edition, 2002.
- [28] 2000-2003. SimBio: A Generic Environment for Bio-Numerical Simulation, IST-Program of the European Commission, Project No.10378, <http://www.simbio.de>.
- [29] A. P. Tipler. *Physik*. Spektrum Akademischer Verlag, 2000.
- [30] S.P. van den Broek. *Volume Conduction Effects in EEG and MEG*. PhD thesis, Proefschrift Universiteit Twente Enschede, The Netherlands, 1997.
- [31] H. Vogel and Ch. Gerthsen. *Gerthsen Physik*. Springer Verlag, 21th edition, 2002.
- [32] J. von Rango, H.A. Schlitt, H. Halling, and H.-W. Müller-Gärtner. Finite integration techniques for the MEG forward problem. In [34], pages 336–338, 1997.
- [33] D. Weinstein, L. Zhukov, and C. Johnson. Lead field basis for fem source localization. *Frontiers in Simulation, Simulationstechnique 18th Symposium*, 1999.
- [34] H. Witte, U. Zwiener, B. Schack, and A. Doering, editors. *Quantitative and Topological EEG and MEG Analysis*. Druckhaus Mayer Verlag GmbH Jena , Erlangen, 1997.
- [35] C. Wolters. Direkte Methoden zur Berechnung dipolinduzierter elektrischer und magnetischer Felder und inverse Strategien zur Quelllokalisierung im Gehirn. Diplomarbeit in Mathematik mit Nebenfach Medizin, Institut für Geometrie und Praktische Mathematik, RWTH Aachen, 1997.
- [36] C. Wolters. *Influence of Tissue Conductivity Inhomogeneity and Anisotropy on EEG/MEG based Source Localization in the Human Brain*. Doktorarbeit, Max-Planck-Institut of Cognitive Neuroscience in Leipzig, 2003.

- [37] C. H. Wolters, L. Grasedyck, and W. Hackbusch. Efficient computation of lead field bases and influence matrix for the FEM-based EEG and MEG inverse problem. *Inverse Problems*, 20(4):1099–1116, 2004.
- [38] C.H. Wolters, A. Anwander, D.Weinstein, M.Koch, X.Tricoché, and R.MacLeod. Influence of tissue conductivity anisotropy on EEG/MEG field and return current computation in a realistic head model: A simulation and visualization study using high-resolution finite element modeling. *NeuroImage*, 2005. accepted for publication.