

Direkte Methoden zur Berechnung
dipolinduzierter elektrischer und
magnetischer Felder und
inverse Strategien
zur Quellokalisierung im Gehirn

von
Carsten Wolters

Diplomarbeit in Mathematik mit Nebenfach Medizin

vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
im März 1997

Angefertigt am
Institut für Physiologie
Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Département Génie Biologique
Université de Technologie de Compiègne
bei Professor Dr. med. Dipl. Ing. R. Grebe

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Professor Dr. rer. nat. K.H. Esser

Vorwort

Im Rahmen eines Partnerschaftsstipendiums mit dem INSA de Lyon wurde am Institut National de la Santé et de la Recherche Médicale de Lyon, Unité 280 (Unité de recherche sur les signaux et processus cérébraux) in Zusammenarbeit mit Prof. Dr. François Perrin ein Programm zur Berechnung der dipolinduzierten Potentialverteilung an der Kopfoberfläche mit der Randelementmethode (Kollokation mit linearer Interpolation und analytischer Berechnung der auftretenden Integrale) für ein Einschichtmodell des Kopfes entwickelt (C unter dem Betriebssystem UNIX). Im Anschluß an das Studienjahr in Frankreich wurde dieses Modell am Institut für Physiologie der RWTH Aachen innerhalb der Arbeitsgruppe um Prof. Dr. Grebe auf ein Dreischichtmodell erweitert.

Später wurde der Kontakt zur Arbeitsgruppe um Prof. Dr. Buchner (Klinik für Neurologie der RWTH Aachen) aufgenommen. Im Rahmen eines durch die Volkswagenstiftung geförderten Projekts entstand in dieser Arbeitsgruppe das Programm CAUCHY (FORTRAN 77 unter dem Betriebssystem AIX), das zur Lokalisation elektrischer Gehirnaktivität entwickelt wurde. Zur Potentialberechnung wird hier die Methode der finiten Elemente gewählt. Durch das von den Philips-Forschungslaboratorien in Hamburg entwickelte Programm CURRY werden die dazu benötigten Volumenvergitterungen des Kopfes zur Verfügung gestellt, die anhand von Kernspinresonanz-Tomographie-Bildern erzeugt werden.

Meine Arbeit möchte ich Herrn Prof. Dr. François Perrin widmen, der mich in die Thematik der Potentialberechnung mit der Randelementmethode einführte und die fachliche Betreuung meiner Diplomarbeit trotz schwerer Krankheit übernahm. Prof. Perrin verstarb im Sommer 1993 während der letzten Tage meines Aufenthaltes in Lyon.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Medizinische Grundlagen	5
2.1	Physiologie der Nervenzelle	5
2.2	Funktionelle Histologie der Großhirnrinde	8
2.3	Elektro- und Magnetoencephalogramm	9
2.4	Evozierte Potentiale	12
3	Physikalische Modellierung	13
3.1	Quasistatische Näherung	13
3.2	Modellierung des Volumenleiters	17
3.3	Modellierung der Primärstromdichte	17
3.4	Berechnung des magnetischen Flusses	18
3.5	Einfluß radialer Quellen auf die magnetische Induktion	20
3.6	Kombinierte Erfassung von EEG und MEG	20
4	Die Methode der finiten Elemente	23
4.1	Variationsformulierung	23
4.2	Ritz-Galerkin-Verfahren	28
4.2.1	Fehlerabschätzungen	29
4.2.2	Finite Elemente	30
4.2.3	Behandlung der Nebenbedingung	31
4.2.4	Quantitative Konvergenzaussagen	32
4.3	Finite Elemente Lösung im Programmsystem CAUCHY	33
4.3.1	Vergitterung des Kopfes	33
4.3.2	Quelleinleitung in CAUCHY	33
4.3.3	Lösung des Gleichungssystems	33
5	Randelementmethode	35
5.1	Integralgleichungsmethode	35
5.2	Das Einschichtmodell	38
5.2.1	Kollokation mit stückweise konstanter Interpolation	40
5.2.2	Kollokation mit stückweise linearer Interpolation	41
5.3	p -Schichtmodell	46
5.3.1	Kollokation mit stückweise konstanter Interpolation	46
5.3.2	Kollokation mit stückweise linearer Interpolation	47
5.4	Quelleinleitung im BE-Modell	48
5.5	Lösen der entstehenden Gleichungssysteme	49
5.6	Die Isolierung der schlecht leitenden Knochenschicht	50

5.7	Konvergenz- und Fehlerbetrachtungen	52
5.8	Programmierung und Auswertung	54
5.8.1	Programmierung	54
5.8.2	Fehlerkriterien	55
5.8.3	Diskussion der Ergebnisse im Kugelmodell	55
5.8.4	Numerische Tests in realer Geometrie	59
6	Einflußmatrix und Vergleich der direkten Methoden	61
6.1	Die Einflußmatrix	61
6.2	Vergleich von FE- und BE-Methode	61
7	Das inverse Problem	65
7.1	Medizinische Zusatzbedingungen	65
7.2	Scharfe inverse Quellsuche	66
7.2.1	Bestimmung der Quellorte	67
7.2.2	Berechnung der Quellparameter Richtung und Stärke	69
7.2.2.1	Grundlagen zum Problem des linearen Ausgleichs	69
7.2.2.2	Die verallgemeinerte Inverse	70
7.2.2.3	Konditionsverbesserung durch Regularisierung	74
7.2.2.4	Die Abgeschnittene Singulärwertzerlegung (TSVD)	92
7.2.2.5	Tikhonov-Phillips-Regularisierung	93
7.3	Lineare Regularisierung	96
8	Quellsuche in simulierter Sulcusstruktur	97
8.1	Simulationsbeispiel 1:	99
8.2	Simulationsbeispiel 2:	102
8.3	Simulationsbeispiel 3:	108
8.4	Simulationsbeispiel 4:	110
8.5	Rechenzeitbedarf der scharfen Quellsuche	114
9	Zusammenfassung und Ausblick	117
A	Danksagung	121
B	Verzeichnis der verwendeten Symbole	123

Kapitel 1

Einleitung

Die Aktivität von Zellen und Zellverbänden (Organen), insbesondere die Erregung von Nervenzellen, ist mit einer elektrischen Aktivität in Form von Ionenströmen verbunden. Diese Ströme führen zur Ausbildung elektrischer und magnetischer Felder. Das elektrische Feld breitet sich im leitfähigen Gewebe bis an die Körperoberfläche aus und kann dort in Form von Potentialdifferenzen mit Hilfe von Elektroden abgegriffen werden. Das magnetische Feld kann in einer gewissen Entfernung von der Körperoberfläche mit hochempfindlichen Detektoren gemessen werden. Diese bioelektrischen Signale können Informationen über die Funktionsweise von Organen liefern.

Ein bekanntes Beispiel ist das Elektrokardiogramm (EKG), welches die elektrische Aktivität des Herzens registriert. Elektroencephalogramm (Messung des elektrischen Feldes, EEG) und Magnetoencephalogramm (Messung des magnetischen Feldes, MEG) werden durch die Summenaktivität der Neuronen des Gehirns erzeugt. Die quantitative Analyse von EKG und EEG ist fester Bestandteil medizinischer Diagnostik geworden. Das Messen bioelektrischer Signale ist auf nicht-invasive Art und Weise auch über längere Dauer und ohne Belastung möglich und gibt Aufschluß über vielfältige krankhafte Veränderungen der betreffenden Organe. Bisher stand eher eine phänomenologische Interpretation der Meßdaten im Vordergrund. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Analyse der den gemessenen bioelektrischen Signalen zugrundeliegenden Quellstruktur, einem inversen Problem. Das Ermitteln von Anzahl, Ort, Ausrichtung und Intensität der Quellen über ihre an der Körperoberfläche abgegriffenen Felder findet großes medizinisches Interesse. In dieser Arbeit wird speziell die Quellrekonstruktion im Gehirn anhand der EEG/MEG-Signale behandelt.

Ein Anwendungsgebiet findet sich in der Diagnose und Therapie von Epilepsien. Ein epileptischer Anfall entsteht durch eine plötzliche abnorme Aktivitätssteigerung des Zentralen Nervensystems (ZNS) und äußert sich in Störungen des Sensoriums und der Motorik, des subjektiven Befindens und des objektiven Verhaltens. Sind die Anfälle selten, kann zwar theoretisch der Berufsalltag und das Privatleben unproblematisch sein, die mögliche Angst vor einem Anfallsereignis und die Vorurteile des Umfelds des Patienten führen jedoch zu einer massiven beruflichen Einschränkung und zu einem sozialen Rückzug des Patienten [47]. Bei häufigen epileptischen Anfällen wird die Lebensbeeinträchtigung noch weiter verstärkt, da hohe Dosen antiepileptischer Medikamente die geistige Leistungsfähigkeit einschränken können und bei einem Teil der Patienten die Erkrankung zu psychischen Veränderungen führt, die einen Umgang mit ihnen erschwert. Daher hat sich eine systematische chirurgische Behandlung der Erkrankung Epilepsie entwickelt [39]. Voraussetzung für einen die

restlichen Gehirnregionen schonenden chirurgischen Eingriff ist die Kenntnis der Lage und Ausdehnung der epileptischen Zentren. Bisher wurden diese Charakteristika in den Patienten stark belastenden invasiven Untersuchungen wie zum Beispiel Subdural-, Tiefen- und Foramen-ovale-Elektroden gewonnen. Dabei werden dem Patienten operativ Elektroden auf die Hirnoberfläche gesetzt bzw. ins Gehirn hineinoperiert. Die bioelektrischen Signale von Epilepsiekranken weisen zwischen den Anfallsereignissen sogenannte interiktale Spikes auf. Die nichtinvasive Messung des EEG/MEG dieser interiktalen Spikes und die anschließende Berechnung des epileptischen Zentrums belastet den Patienten kaum.

Ein weiteres Anwendungsfeld ist die präoperative Ermittlung der Lage wichtiger funktionell-zusammenhängender Zentren im Gehirn, z.B. des primär-motorischen, des primär-auditorischen oder primär-somatosensorischen Cortex. Bei Operationen in diesen Bereichen (z.B. Tumoroperationen) könnten Lähmungen, Hör- und Sensibilitätsstörungen vermieden werden. Dazu werden über akustische oder sensorische Reize charakteristische Signale evoziert, sogenannte evozierte Potentiale und über Summationstechniken sichtbar gemacht. Durch das Lösen des inversen Problems wird versucht, die zugrundeliegende Quellstruktur zu ermitteln.

Neben den aufgeführten klinischen Anwendungen ergeben sich auch zahlreiche Anwendungsfelder in der theoretischen Medizin und in der Neuropsychologie. Von Interesse sind z.B. funktionelle Zusammenhänge im Gehirn und die Aufdeckung der aktivierten Areale während der Verarbeitung eines Reizes.

Unter Kenntnis eines physiologisch begründeten Quellmodells kann die Ausbreitung der Felder im biologischen Gewebe über eine aus den Maxwellgleichungen der Elektrodynamik entstehende partielle Differentialgleichung beschrieben werden. Das Lösen dieser Gleichung wird im weiteren als direktes Problem bezeichnet. Für das direkte Problem wird ein Modell des Volumenleiters benötigt. Das Mehrschalen- bzw. Mehrschichtmodell beschreibt den Kopf als schichtweise homogenen Leiter. Hirn, Liquor, Knochen und Kopfhaut werden als Schichten mit jeweils konstanter Leitfähigkeit gewählt. Die Schichtübergänge können anhand der über bildgebende Verfahren (z.B. Kernspinresonanz-Tomographie) erfaßten realen Geometrie des Kopfes ermittelt werden. Für das direkte Problem eignen sich numerische Methoden. Die Differentialgleichung ist von elliptischem Typ und kann in der Variationsformulierung über die Methode der finiten Elemente (FE) auf einem Volumengitter des Kopfes gelöst werden. Da man bisher den Kopf als schichtweise homogenen Leiter modelliert, besteht eine weitere Möglichkeit darin, die Differentialgleichung über die Integralgleichungsmethode in eine Randintegralgleichung zu überführen und auf einem Oberflächengitter (nur die Schichtübergänge werden vergittert) die gesuchten Potentiale über die Randelementmethode (BE, Boundary Element) numerisch zu bestimmen.

Durch vielfaches Lösen des direkten Problems wird im Hinblick auf eine rechentechnisch effiziente Lösung des inversen Problems die sogenannte Einflußmatrix aufgebaut. In dieser Matrix wird der Einfluß jeder physiologisch sinnvollen Quelleinspeisung auf die Meßdaten gespeichert. Man nutzt dabei die Linearität der Differentialgleichung.

Im Rahmen des inversen Problems werden mit Hilfe der Einflußmatrix Quellen gesucht, deren Summenpotential an den Elektrodenorten bzw. deren magnetischer Summenfluß an den Detektororten die gemessenen Potentiale (EEG) bzw. Flüsse (MEG) unter Einbeziehung des Rauschens „ideal“ approximieren. Die inverse Suche benötigt anatomische und physiologische Zusatzinformationen, da nur wenige Meßinformationen zur Verfügung

stehen. Durch die Kopplung der elektrischen (EEG, heutzutage bis zu 128 Meßkanäle, eine Referenzelektrode) mit der magnetischen Messung (MEG, moderne Ganzkopfsysteme verfügen aktuell über ca. 150 Detektoren, nach Abzug der Referenzkanäle bleiben ca. 144 Meßinformationen) kommt man heutzutage auf ca. 271 Meßkanäle. Eine Zusatzinformation besteht zum Beispiel in der starken Beschränkung der Anzahl zu suchender Quellen, der sogenannten scharfen inversen Quellsuche. Es kann ebenfalls eine physiologisch begründete Aussage über die Glattheit der Quellverteilung und über eine Einschränkung des Suchgebiets gemacht werden.

In Kapitel 2 wird ein Überblick über die elektrophysiologischen Grundlagen der neuronalen Informationsverarbeitung und über die Entstehung der Encephalogramme gegeben.

In Kapitel 3 wird die quasistatische Näherung der Maxwellgleichungen für das elektrische Potential begründet. Es werden Modelle für Volumenleiter und Quelle vorgestellt und es wird beschrieben, wie aus dem elektrischen Potential der magnetische Fluß bestimmt werden kann.

Die folgenden zwei Kapitel widmen sich der Lösung des direkten Problems. Kapitel 4 beschreibt die numerische Lösung der Differentialgleichung in der Variationsformulierung über die FE-Methode. In Kapitel 5 wird die Differentialgleichung über die Integralgleichungsmethode in eine Randintegralgleichung transformiert, zu deren numerischer Lösung die Randelementmethode (BE) herangezogen wird. Für die BE-Methode wurde bisher ein Kollokationsansatz in den Massenzentren der Dreiecke und Interpolation mit stückweise konstanten Ansatzfunktionen verfolgt. Im Vergleich dazu sollte ein Kollokationsansatz in den Dreieckseckpunkten mit stückweise linearer Interpolation und analytischer Berechnung der auftretenden Integrale umgesetzt werden. Eine grobe Beschreibung der Vorgehensweise nach de Munck [12] wurde theoretisch untermalt und programmtechnisch in der Sprache C auf UNIX-Maschinen realisiert.

In Kapitel 6 wird das Konzept der Einflußmatrix erläutert und es werden die beiden vorgestellten direkten Methoden vom theoretischen und praktischen Standpunkt aus miteinander verglichen.

In Kapitel 7 werden inverse Suchstrategien vorgestellt, der Schwerpunkt liegt auf der scharfen inversen Quellsuche bei verrauschten Meßdaten. Im dort betrachteten Modell wird angenommen, daß sich die Meßdaten über einige wenige scharf umschriebene Quellen beschreiben lassen. Diese Quellen (Anzahl, Ort, Richtung, Stärke) sollen innerhalb des Suchgebiets so ermittelt werden, daß die Meßwerte im Sinne der euklidischen Norm möglichst genau ermittelt werden, gleichzeitig aber das Rauschen keinen zu starken Einfluß auf die Lösung nimmt und die Algorithmen stabil in bezug auf eine Überschätzung der Anzahl aktiver Quellen bleiben. Hier wird sich das Konzept der Regularisierung als eine Möglichkeit herausstellen, den auftretenden schlechten Konditionszahlen in Kombination mit verrauschten Meßdaten zu begegnen.

Das Kapitel 8 widmet sich der Anwendung der scharfen inversen Quellsuche im FE-Modell an einer simulierten Sulcusstruktur. Von großem medizinischem Interesse ist die Zuordnung corticaler Areale zu sensorischen, motorischen und höheren psychischen Leistungen. Ein großer Teil des Cortex liegt in Fissuren und Sulci, an deren gegenüberliegenden Wänden funktionell verschiedene neuronale Aktivität gefunden werden kann. Es werden die Algorithmen der scharfen inversen Suche mit und ohne Regularisierung (Konditionsver-

besserung) getestet auf ihr Auflösungsvermögen innerhalb eines Sulcus, auf ihre Reaktion auf mehrere weit auseinanderliegende fokale Zentren und auf ihr Stabilitätsverhalten bei Erhöhung und Überschätzung der Anzahl aktiver Quellen.

Kapitel 2

Medizinische Grundlagen

Bei der Verarbeitung bewußter Handlungen, bei Sinneseindrücken sowie auch bei unbewußten Reaktionen ist das Gehirn elektrisch aktiv. Jede Bewegung elektrischer Ladungen ruft ein elektrisches sowie auch ein magnetisches Feld hervor. Das Elektroencephalogramm stellt die aus dieser Aktivität entstehenden Potentialdifferenzen des elektrischen Feldes dar, die auf der Kopfhaut gemessen werden können. Das Magnetoencephalogramm registriert die magnetischen Felder. Die Interpretation dieser Daten im Rahmen der Lokalisierung der zugrundeliegenden Hirnaktivität setzt die Kenntnis der elektrophysiologischen Vorgänge im menschlichen Körper voraus. In diesem Kapitel wird ein kurzer Überblick über die Grundlagen der Encephalogramme gegeben. Für eine eingehendere Beschreibung sei auf die Literatur verwiesen ([48],[51]).

2.1 Physiologie der Nervenzelle

Das Neuron ist die strukturelle und funktionelle Einheit des Nervensystems. Ein typisches Neuron hat einen Zellkörper (Soma), der zwei Arten von Fortsätzen hat, das Axon und die Dendriten. Mit den Dendriten nimmt die Nervenzelle Signale von anderen Nerven auf. Das Axon, welches am Axonhügel des Somas entspringt, überträgt das Nervensignal auf andere Nerven-, Muskel- oder Drüsenzellen. Im folgenden soll nur die Reizweiterleitung zu Nervenzellen beschrieben werden. Das Axon endet mit sogenannten Endknöpfen an der Synapse und nimmt dabei Verbindung zum Soma, zu den Dendriten oder zum Axon des nächsten Neurons auf (siehe Abbildung 2.1). An der Synapse erfolgt die Informationsübertragung über sogenannte Neurotransmitter auf chemischem Wege, innerhalb eines Neurons wird Information über elektrische Vorgänge weitergeleitet. Die Vorgänge der elektrischen Informationsübertragung sollen nun beschrieben werden.

An der Membran lebender Zellen ist eine elektrische Potentialdifferenz meßbar. Dieses sogenannte Ruhemembranpotential beträgt je nach Zelltyp 60 – 100mV (Zellinneres negativ). Die Ursache ist eine ungleiche Ionenverteilung in intrazellulärer und extrazellulärer Flüssigkeit. Die für die Erregungsabläufe an Nervenzellen wichtigsten Ionen, Kalium (K^+), Natrium (Na^+) und Chlor (Cl^-), weisen im Ruhezustand ein Konzentrationsgefälle von innen nach außen (K^+) bzw. umgekehrt (Na^+ und Cl^-) auf. Folgende Phänomene tragen dazu bei:

- Die Zellmembran ist für K^+ im Ruhezustand relativ gut durchlässig. Wegen des hohen Konzentrationsgefälles diffundieren K^+ -Ionen aus der Zelle, was wegen der mitgeführten positiven Ladung zu einer Ladungsverzerrung führt. Die Membran

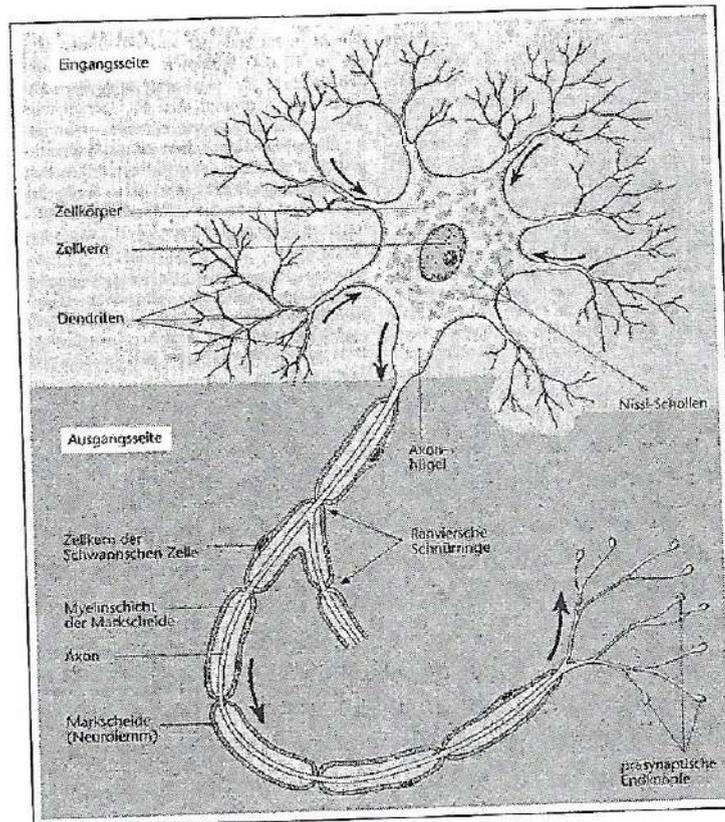


Abbildung 2.1: Der Aufbau eines Neurons (aus Schäffler, Schmidt [31]). Die Pfeile geben die Richtung der Erregungsleitung an. Hell hinterlegt die Seite, wo Information empfangen wird, dunkel hinterlegt die Seite, wo Information fortgeleitet wird.

ist für Proteinanionen überhaupt nicht und für Na^+ nur wenig permeabel. Dieses Diffusionspotential steigt so lange an, bis der weitere K^+ -Ausstrom durch das steigende Potential verhindert wird. Elektrische und osmotische Arbeit gleichen einander jetzt aus. Das dazugehörige Potential ist das sog. K^+ -Gleichgewichtspotential, welches ein wenig negativer als das Ruhemembranpotential ist.

- Durch aktiven Transport, d.h. unter Energieaufwand, wird laufend Na^+ aus der Zelle und K^+ in die Zelle "gepumpt" ($\text{Na}^+\text{-K}^+\text{-ATPase}$). Der Pumpstrom ist elektrogen.
- Die Anionen im Zellinneren sind zum Großteil negativ geladene Proteine.

Zwei Arten der Informationsübertragung sollen nun unterschieden werden, zunächst das Aktionspotential und dann die für die weiteren Überlegungen wichtige elektrotonische Fortleitung.

Die Axone der Neuronen weisen zum Teil eine beträchtliche Länge auf (bis zu 1m). Ohne einen besonderen Mechanismus würde ein elektrischer Reiz aufgrund des hohen Widerstandes der Nervenfasern schnell versiegen. So wird ein Signal in Form eines Aktionspotentials (AP) auf dem Axon weitergeleitet. Es spielen sich folgende Vorgänge ab: Durch den Reiz wird das Ruhemembranpotential in Richtung 0 mV verringert (Depolarisation), wobei bei genügender Stärke des Reizes das sogenannte Schwellenpotential (ca. -50 mV) erreicht wird. Überschreiten dieses Potentialwertes führt zu einem lawinenartigen Anstieg der Na^+ -Leitfähigkeit und zu einem Einstrom von Na^+ -Ionen über die sogenannten

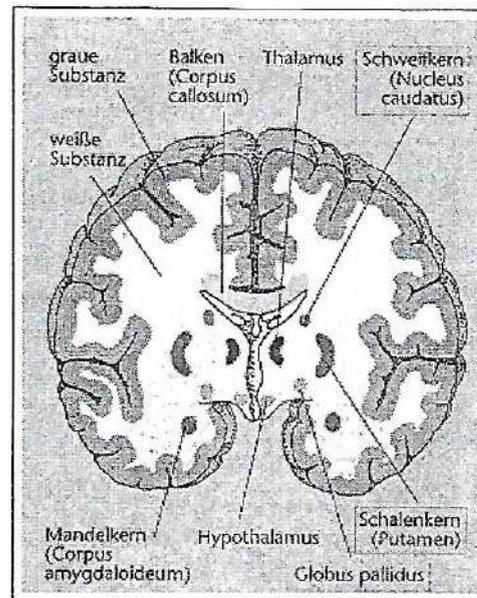


Abbildung 2.2: Schnitt durchs Gehirn; linke und rechte Hemisphäre, graue und weiße Substanz und Lage der Basalganglien (aus Schäffler, Schmidt [31]).

schnellen Na^+ -Kanäle ins Zellinnere. Dadurch bricht das Membranpotential rasch zusammen (Depolarisationsphase des AP) und erreicht vorübergehend sogar positive Werte. Die Leitfähigkeit g_{Na^+} sinkt dann wieder, gleichzeitig steigt g_{K^+} , was zum Wiederaufbau des Ruhemembranpotentials (Repolarisationsphase) führt. Der Ladungsunterschied zwischen depolarisierter und in Ruhe befindlicher Membran führt längs der Faser zu einem Ausgleichsstrom, der angrenzende Bereich wird zur Depolarisation gebracht. Dendriten und Sornata weisen keine schnellen Na^+ -Kanäle auf. Die Informationsweiterleitung erfolgt hier elektrotonisch (kabelartig), wird also nicht unterstützt. Mathematisch kann dieses elektrotonische Potential über die Funktion $\Phi(x) = \Phi_0 e^{-x/\lambda}$ beschrieben werden. x bezeichne den Abstand zum Ort der Stromapplikation, λ die sogenannte Längenkonstante, in der sowohl geometrische Größen als auch die Leitfähigkeit der Membran und des Zellinneren zusammengefaßt sind und Φ_0 das Potential am Ort der Stromapplikation [48]. Die Summe aller auf die Dendriten eines Neurons übertragenen und bis zum Axonhügel elektrotonisch weitergeleiteten Reize (sowohl erregende als auch hemmende) muß das Schwellenpotential erreichen, damit ein AP ausgelöst und der Reiz nach dem sogenannten Alles- oder Nichts-Gesetz weitergeleitet wird.

In der Synapse wird eine Erregung nur in einer Richtung übertragen, nämlich vom präsynaptischen zum postsynaptischen Neuron. Die Übertragung erfolgt auf chemischem Wege über sogenannte Transmitterstoffe. Man unterscheidet exzitatorische postsynaptische Potentiale (EPSP) und inhibitorische postsynaptische Potentiale (IPSP). Azetylcholin als Überträger führt zu einer Erhöhung der postsynaptischen Na^+ -Leitfähigkeit und somit zu einer Depolarisation (EPSP). Es gibt auch Transmitter (z.B. Glyzin), die die postsynaptische Membran durch Erhöhung der Cl^- bzw. K^+ -Leitfähigkeit hyperpolarisieren.

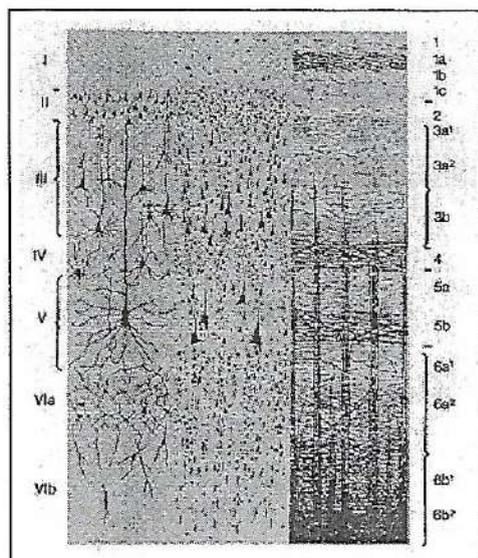


Abbildung 2.3: Schichtenstruktur der Großhirnrinde; links die wesentlichen Nervenzelltypen in den verschiedenen Schichten (Golgi-Imprägnation), in der Mitte Nervenzellkörper (Nissl-Färbung), rechts die Hauptfaserstruktur nach einem Markscheidenpräparat (aus Schmidt, Thews [48]).

2.2 Funktionelle Histologie der Großhirnrinde

Das Gehirn kann anatomisch grob in drei Teile unterteilt werden, den Hirnstamm, das Kleinhirn und das Großhirn. Das Großhirn besteht aus einer linken und einer rechten Hemisphäre. Der innere Teil, die weiße Substanz, wird von der 1.3 bis 4.5mm dicken Großhirnrinde (cortex), der grauen Substanz, umgeben (Abbildung 2.2). Die weiße Substanz besteht überwiegend aus Axonen, die Großhirnrinde läßt sich als mehrschichtiges, vielfach gefaltetes neuronales Gewebe beschreiben. Sie enthält in etwa 10^{10} Neurone und eine große, aber unbekannte Zahl von Gliazellen, die sowohl Stütz- als auch Versorgungsfunktion für die Neurone haben.

In der Rinde wechseln sich Schichten, die vorwiegend Zellkörper enthalten, mit solchen ab, in denen vorwiegend Axone (Nervenfasern) verlaufen. Ein Schnitt durch die Hirnrinde zeigt somit ein streifiges Aussehen. Aufgrund der Zellformen unterscheidet man typischerweise 6 Schichten:

1. **Molekularschicht:** Sie ist reich an Fasern, aber arm an Zellen.
2. **Äußere Körnerschicht:** Hier liegen kleine Neurone unterschiedlichster Form, die tangential zur Oberfläche verlaufen.
3. **Äußere Pyramidenschicht:** In dieser Schicht befinden sich hauptsächlich Pyramidenzellen mittlerer Größe.
4. **Innere Körnerschicht:** Lose angeordnete kleine Neurone unterschiedlicher Größe (Sternzellen) sind durchzogen von dicht gepackten, tangential zur Oberfläche verlaufenden Fasern.
5. **Innere Pyramidenschicht:** In dieser Schicht befinden sich mittlere und große Pyramidenzellen, lange apicale Dendriten ziehen bis zur Molekularschicht. Die Py-

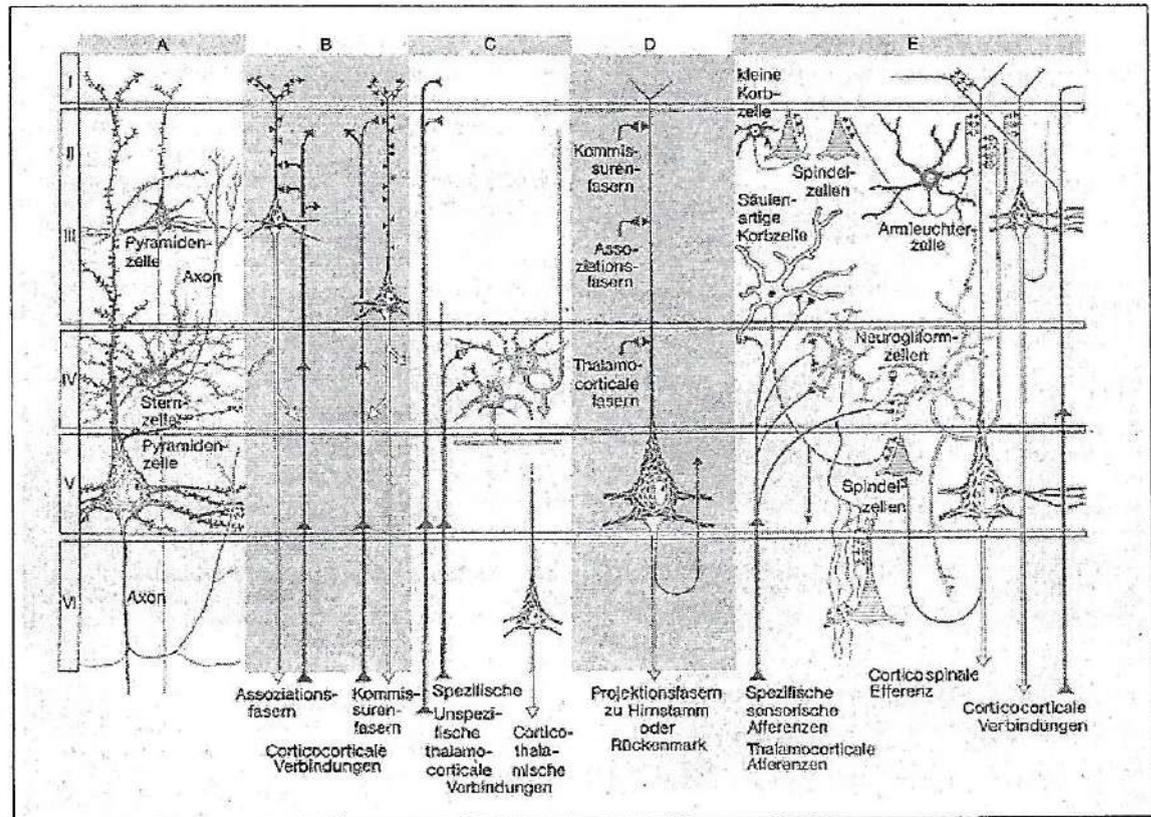


Abbildung 2.4: Corticale Neurone, Ihre Schaltkreise und ihre afferenten und efferenten Verbindungen. Stark vereinfachte und schematisierte Darstellung auf dem Hintergrund der Schichtenstruktur der Hirnrinde. A Lage und Aussehen der 2 Haupttypen corticaler Neurone. B Eingangs-Ausgangs-Beziehungen cortico-corticaler Verbindungen C Charakteristika thalamo-corticaler und cortico-thalamischer Verbindungen. D Synaptische Eingangszonen einer Pyramidenzelle, deren Axon zu subthalamischen Hirnregionen projiziert. E Zusammenschau der Verknüpfung corticaler Neurone (aus Schmidt, Thews [48]).

Pyramidenzellen liegen parallel zueinander und senkrecht zur Cortexoberfläche. Diese Schicht besitzt eine besondere Bedeutung für Elektro- und Magnetoencephalogramm.

6. **Spindelzellschicht:** Vorwiegend spindelförmige Neurone. Der innere Anteil dieser Schicht geht in die weiße Substanz über.

In Abbildung 2.3 sieht man links die wesentlichen Nervenzelltypen in den verschiedenen Schichten, in der Mitte Nervenzellkörper und rechts die Hauptfaserstruktur nach einem Markscheidenpräparat. Abbildung 2.4 zeigt die corticalen Neurone, ihre Schaltkreise und ihre afferenten und efferenten Verbindungen.

2.3 Elektro- und Magnetoencephalogramm

Von der Kopfhaut der Schädeldecke lassen sich kontinuierliche Potentialschwankungen ableiten, die als Elektroencephalogramm (EEG) bezeichnet werden. Hans Berger entdeckte die Möglichkeit, die elektrische Hirnaktivität des Menschen zu registrieren. Er legte in den Jahren 1929 bis 1938 die Grundlagen für die klinischen und experimentellen Anwendungen

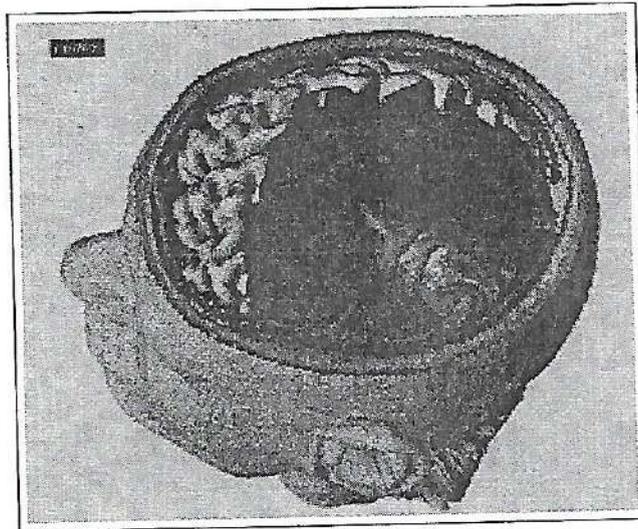


Abbildung 2.5: Aktivierter Neuronenverband im Gehirn (aus Buchner et al. [10])

dieser Methode. Seit der Entwicklung hochempfindlicher, mit flüssigem Helium gekühlter Detektoren (SQUIDS, Súperconducting QUAntum Interference DeviceS) konnte im Jahre 1968 erstmals auch das magnetische Feld nachgewiesen werden.

Zahlreiche Experimente haben gezeigt, daß sich in den Encephalogrammen im wesentlichen die postsynaptische Aktivität der corticalen Neurone widerspiegelt, nicht die fortgeleitete Impulsaktivität dieser Zellen (Aktionspotentiale) und auch nicht die Aktivitäten corticaler Gliazellen [48]. An der Entstehung der außen gemessenen Felder sind hauptsächlich die Pyramidenzellen in der 5. Schicht des Cortex beteiligt. Das Aktionspotential kann physikalisch als Quadrupol, das postsynaptische Potential als Stromdipol modelliert werden [60]. An der Kopfoberfläche, d.h. in der Fernzone der Quelle, werden somit hauptsächlich die dipolinduzierten Felder gemessen.

Ein einzelnes Neuron wird diese wohl nicht erzeugen. Vielmehr werden ganze Hirnbereiche von mehreren mm^3 Volumen nahezu synchron erregt. Auf einem mm^3 findet man ca. 10^5 Neuronen, von denen ungefähr die Hälfte Pyramidenzellen sind. Ein solcher lokaler Erregungsherd läßt sich über eine Dauer von mehreren zehn Millisekunden beobachten [60] (Abbildung 2.5).

Das Registrieren des Elektroenzephalogramms ist ein international angewandtes Routineverfahren in der neurologischen Diagnostik. Die Lage der Ableitelektroden (internationales 10-20 System) und die Ableitbedingungen sind weitgehend standardisiert worden. Moderne EEG-Geräte arbeiten mit bis zu 128 Ableitelektroden. Die Auswertung konzentriert sich vor allem auf Frequenz, Amplitude, Form, Verteilung und Häufigkeit der im EEG enthaltenen Wellen. Wegen der maximalen EEG-Amplitude von wenigen $100\mu\text{V}$ ist es erforderlich, die Signale für eine weitere Auswertung um einen Faktor 10^3 bis 10^4 zu verstärken.

Aufgrund der Überlagerung der spontanen Aktivität vieler unterschiedlicher Bezirke des Cortex weist das EEG eine große Komplexität auf. Dennoch ist es möglich, einige physiologische (gesunde) und pathologische (krankhafte) Veränderungen im EEG zu unterschei-

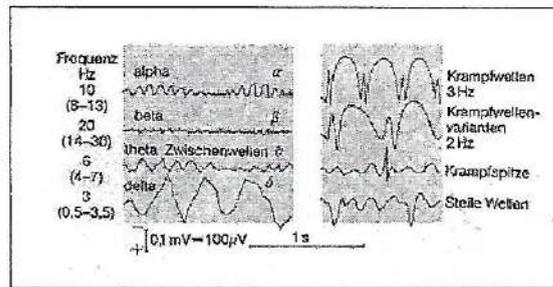


Abbildung 2.6: Hauptformen des EEG. Links die verschiedenen Wellenarten, die bei Gesunden vorkommen können, rechts Beispiele für Krampfpotentiale, wie sie v.a. bei Epilepsie abgeleitet werden (aus Schmidt, Thews [48]).

den. Daraus können diagnostische Aussagen über zum Beispiel Wachzustand, emotionale Anspannung und Hirnreifegrad, sowie auch bezüglich einiger Erkrankungen getroffen werden. Eine genauere Analyse des Frequenzgehaltes zeigt, daß in den EEG-Signalen verschiedene bevorzugte periodische Signalanteile in einem Frequenzbereich von 0,5 bis 30 Hz mit Amplituden zwischen 10 und 150 µV enthalten sind. Man teilt das Frequenzspektrum in vier Frequenzbänder auf:

Bezeichnung	Frequenz	Amplitude
δ-Wellen	0,5 – 3 Hz	100 – 150 µV
θ-Wellen	4 – 7 Hz	50 – 100 µV
α-Wellen	8 – 13 Hz	ca. 30 µV
β-Wellen	14 – 30 Hz	ca. 10 µV

Die Potentialschwankungen werden normalerweise hauptsächlich durch den Wachheitsgrad bestimmt. Beim gesunden Erwachsenen herrscht in Ruhe und bei geschlossenen Augen der α-Grundrhythmus vor, der occipital besonders ausgeprägt ist. Beim Öffnen der Augen und bei anderen Sinnesreizen verschwinden die α-Wellen und es treten hochfrequentere β-Wellen kleinerer Amplitude auf. Langsamere Wellenformen größerer Amplitude, wie die θ-Wellen und die δ-Wellen, tauchen beim Erwachsenen nur während des Schlafs auf (Abbildung 2.6, links). Wie bereits erwähnt hat das EEG auch klinische Bedeutung. In Abbildung 2.6 werden rechts eine Reihe von Krampfpotentialen gezeigt, wie sie vor allem bei Epilepsie vorkommen. Verlangsamungen und Unregelmäßigkeiten des Kurvenbildes treten bei diffusen organischen Hirnkrankheiten, nach Hirntraumen und bei Stoffwechsellintoxikationen (Koma) auf. Auch Tumoren führen häufig zu (umschriebenen) EEG-Veränderungen. Daneben ist zu beachten, daß Medikamente (besonders Psychopharmaka) das EEG ebenfalls beeinflussen können. Das Erlöschen des EEG (Nulllinien-EEG) wird immer mehr als Kriterium des Hirntodes benutzt.

Das Magnetoencephalogramm (MEG) zeichnet die magnetische Aktivität des Gehirns auf. Der durch speziell geformte, supraleitende Meßschleifen (Magnetometer bzw. Gradiometer) tretende magnetische Fluß des Gehirns wird durch SQUIDS gemessen. Die Felder liegen in der Größenordnung 10^{-12} bis 10^{-13} Tesla (T) [60]. Das Magnetfeld der Erde liegt zum Vergleich bei 10^{-4} T. Der Aufwand an Meßtechnik ist dementsprechend groß. Es

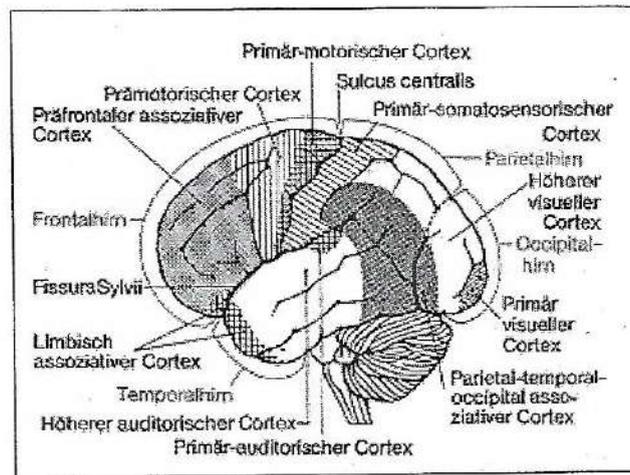


Abbildung 2.7: Die 4 Anteile der Hirnrinde (frontaler, temporaler, parietaler und occipitaler Cortex) aus lateraler Sicht (aus Schmidt, Thews [48]).

wird in magnetisch abgeschirmten Kammern gemessen, um Störeinflüsse wie Erdmagnetfeld und elektrische Leitungen usw. zu eliminieren. Der Vorteil dieser Methode gegenüber dem EEG liegt im bis zu zehnfach höheren Signal-Rausch-Verhältnis.

2.4 Evozierte Potentiale

Neben der Spontanaktivität des Cortex treten vor allem nach psychologischen, motorischen und sensorischen Ereignissen charakteristische Potentialveränderungen auf, die in der Regel nur eine kleine Amplitude haben und deswegen mit Summationstechniken sichtbar gemacht werden müssen. Diejenigen elektrischen Potentialschwankungen, die sich im zentralen Nervensystem als Antwort auf eine Reizung von Rezeptoren, von peripheren Nerven, von sensorischen Bahnen oder Kernen oder von anderen sensorischen Strukturen registrieren lassen, werden als evozierte Potentiale (EP) bezeichnet. So können nach Reizung peripherer somatischer Nerven oder Sensoren von den sensorischen Rindenarealen langsame, positiv-negative Potentialschwankungen registriert werden, die als somatisch evoziertes Potential (SEP) bezeichnet werden. Die diagnostisch-klinische Bedeutung der Messung von EP liegt vor allem in der Überprüfung der Intaktheit peripherer sensorischer und subcorticaler Leitungssysteme. Durch die inverse Analyse von EEG und MEG soll der Ort der Verarbeitung der beschriebenen EP's geklärt werden. Ähnlich wie das SEP können zum Beispiel auch visuell evozierte Potentiale (VEP) registriert und diagnostisch verwertet werden. Die Struktur ist allerdings komplexer und variabler, da das Auge mehr Information (Farbe, Muster, Kontrast, Leuchtdichte, usw.) aufnimmt und zu den primären und sekundären Projektionsarealen weiterleitet. Zur Auslösung von VEP werden in der Neurologie Schachbrett- und Streifenmuster wie auch Lichtblitze eingesetzt (zu den Rindenarealen siehe Abbildung 2.7).

Kapitel 3

Physikalische Modellierung

Dieses Kapitel befaßt sich mit der physikalischen Modellierung der neurophysiologischen Vorgänge im Gehirn. Die postsynaptischen elektrotonen Ionenströme im leitfähigen Gewebe führen zur Ausbildung eines elektrischen und eines magnetischen Feldes. Es soll hier ein Überblick geliefert werden, wie sich die Quellen und die Ausbreitung dieser Felder mathematisch-physikalisch fassen lassen.

Das Phänomen der Feldausbreitung wird zunächst als zeitabhängig betrachtet, man gelangt in die Theorie der Elektrodynamik. Es wird sich zeigen, daß diese Abhängigkeit vernachlässigt werden kann (Plonsey und Heppner [42]), d.h. zeitliche Änderungen der Felder verlaufen überall im biologischen Volumenleiter nahezu synchron. Verschiedene Zeitpunkte können demnach völlig unabhängig voneinander betrachtet werden.

3.1 Quasistatische Näherung

Die Herleitung der quasistatischen Näherung erfolgt für einen unendlich ausgedehnten, homogenen und isotropen Volumenleiter. Es soll damit der Einfluß der zeitlichen Änderung der elektromagnetischen Felder auf ihre Ausbreitung untersucht werden, nicht deren Abhängigkeit vom Volumenleiter. Somit stellt diese Vereinfachung für die folgenden Überlegungen keine Einschränkung dar.

Die Grundgleichungen, die zur Beschreibung elektromagnetischer Phänomene zur Verfügung stehen, sind die vier Maxwellgleichungen (zur Bedeutung der Bezeichnungen siehe Index):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \quad (\text{Coulomb}) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} \quad (\text{Faraday}) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Für eine vollständige Beschreibung werden noch Materialgleichungen benötigt. Da sich biologisches Gewebe im Wesentlichen wie ein Elektrolyt verhält, werden deshalb folgende Gleichungen verwendet (Plonsey [41]):

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$$

Bezeichnung	Schicht	σ [$1/\{\Omega \cdot \text{mm}\}$]
Ω_1	Gehirn	$0.336 \cdot 10^{-3}$
Ω_2	Liquor	$0.1 \cdot 10^{-2}$
Ω_3	Knochen	$0.42 \cdot 10^{-5}$
Ω_4	Kopfhaut	$0.336 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 3.1: Leitfähigkeiten der verschiedenen Schichten

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$$

Die Stromdichte \mathbf{j} kann als Summe aus durch die Quellen erzeugter Primärstromdichte \mathbf{j}_p und der durch Rückflüsse im Volumen hervorgerufenen Volumenstromdichte $\sigma\mathbf{E}$ definiert werden [21]:

$$\mathbf{j} := \mathbf{j}_p + \sigma\mathbf{E} \quad (3.1)$$

Es können nun Potentiale Φ und \mathbf{A} eingeführt werden (Nolting [36]), so daß sich

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \partial_t\mathbf{A} \end{aligned}$$

schreiben läßt.

Aus der dritten Maxwellgleichung ergibt sich

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \epsilon\epsilon_0\partial_t\mathbf{E} + \mathbf{j}_p.$$

Wenn man auf beide Seiten dieser Gleichung die Divergenz anwendet ($\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$) und unter der Annahme, daß die Vektorfelder von der Zeit harmonisch ($\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$) abhängen (Materialeigenschaften linear, siehe Plonsey [41], Pesch [40]), erhält man die verallgemeinerte Poissongleichung in harmonischer Formulierung:

$$\nabla \cdot [(\sigma + i\omega\epsilon\epsilon_0)(\nabla\Phi + i\omega\mathbf{A})] = \nabla \cdot \mathbf{j}_p. \quad (3.2)$$

Hier bezeichne ω die Kreisfrequenz.

Zu den elektrischen Eigenschaften biologischer Gewebe können folgende Aussagen gemacht werden:

- Die bei bioelektrischen Quellen am häufigsten auftretenden Frequenzen liegen bei $f < 1\text{kHz}$. Dies liegt daran, daß die Dauer eines Aktionspotentials in der Größenordnung von 1ms liegt [41].
- Der Kopf kann durch einen schichtweise homogenen Leiter modelliert werden. Für gewöhnlich werden drei bzw. vier (mit Liquor) Schichten verwendet, deren Leitfähigkeiten in Tabelle 3.1 dargestellt sind. Bei den angegebenen Werten handelt es sich lediglich um Näherungen. Die das Hirn versorgenden Blutgefäße zum Beispiel weisen eine höhere Leitfähigkeit auf als das sie umgebende Gewebe. Eine genauere Bestimmung der Leitfähigkeiten im Hirn ist schwierig und stellt mathematisch modelliert ein für sich inverses Problem dar. Postmortal ändern sich die Leitfähigkeiten schnell, so daß gemessene Werte wiederum nur grobe Näherungen darstellen.

Die Empfindlichkeit der inversen Quellsuche auf Leitfähigkeitsänderungen im FE-Kopfmodell wurde untersucht (Pohlmeier et al. [45]). Leitfähigkeitsänderungen der Knochenschicht um ca. 30% haben kaum Auswirkungen auf das Ergebnis der inversen Quellsuche.

Für die Abschätzungen in diesem Kapitel wird mit einer Leitfähigkeit von $\sigma = 0.2 \cdot 10^{-3} 1/[\Omega \cdot \text{mm}]$ gerechnet.

- Die magnetischen Eigenschaften von biologischem Gewebe können vernachlässigt werden, so daß für die Permeabilität $\mu\mu_0$ die des Vakuums ($\mu = 1, \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$) eingesetzt werden kann.

Kapazitive Effekte:

Der Term $(\sigma + i\omega\epsilon\epsilon_0)$ in Gleichung (2) beschreibt die Leiteigenschaften des Volumenleiters. Der Anteil $i\omega\epsilon\epsilon_0$ resultiert aus Verschiebungsströmen. Zum Vergleich der beiden Anteile wird nun der Quotient $\frac{\omega\epsilon\epsilon_0}{\sigma}$ betrachtet. In der folgenden Tabelle sind Werte für verschiedene Frequenzen aufgelistet (Schwan et al. [49]):

Gewebe	$\omega\epsilon\epsilon_0/\sigma$			
	10Hz	100Hz	1kHz	10kHz
Lunge	0.15	0.025	0.05	0.14
Fett		0.01	0.03	0.15
Leber	0.2	0.035	0.06	0.2
Herzmuskel	0.1	0.04	0.15	0.32

Ein biologischer Volumenleiter kann in guter Näherung als ohmsch angesehen werden [49].

Ausbreitungseffekt:

Die Potentiale lassen sich bestimmen (Pesch [40],[41]):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \frac{\dot{\mathbf{J}}_p(\mathbf{y}) e^{i(\omega t - kR)}}{R} d\mathbf{y} \\
 \Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi(\sigma + i\omega\epsilon\epsilon_0)} \int \frac{-\nabla \cdot (\dot{\mathbf{J}}_p(\mathbf{y})) e^{i(\omega t - kR)}}{R} d\mathbf{y}
 \end{aligned}$$

Hier ist k die komplexe Wellenzahl

$$k^2 = -i \left(1 + \frac{i\omega\epsilon\epsilon_0}{\sigma} \right) \mu\mu_0\omega\sigma$$

und R der Abstand des Meßpunktes zur Quelle. Skalares Potential Φ und Vektorpotential \mathbf{A} hängen vom Phasenfaktor $e^{i(\omega t - kR)}$ ab. Dieser Faktor beschreibt die Ausbreitung der Wellenfront. Das bedeutet, daß die elektromagnetischen Felder einer zeitlichen Veränderung der Quellen mit einer Verzögerung folgen, die vom Abstand R zum Ort der Quellen abhängt. Unter Berücksichtigung dieses Effektes ist es sehr schwer, die bei einem EEG gemessene Potentialverteilung zu deuten. Schließlich trifft die Information über die

Veränderung der elektrischen Aktivität einer Quelle an den unterschiedlichen Ableitelektroden zu verschiedenen Zeitpunkten ein.

Für R kann ein Wert von $R_{\max} = 0.5\text{m}$ angenommen werden. Durch Einsetzen der oben genannten Zahlenwerte erhält man ([40],[41])

$$(k \cdot R_{\max}) \approx 0.0063(1 - i).$$

Der Faktor e^{-ikR} kann also mit einem Fehler von weniger als 1% vernachlässigt werden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Felder im biologischen Gewebe ist also so groß, daß sich zeitliche Änderungen überall im Volumenleiter gleichzeitig bemerkbar machen.

Induktionseffekte:

Der Term $(\nabla\Phi + i\omega\mathbf{A})$ in Gleichung (2) besagt, daß sich das elektrische Feld \mathbf{E} nicht nur aus einem skalaren Potential Φ ableitet, sondern ein Teil durch ein zeitlich veränderliches Vektorpotential \mathbf{A} induziert wird. Es kann gezeigt werden ([40], [41]), daß

$$\frac{|\omega\mathbf{A}|}{|\nabla\Phi|} = |k \cdot R|^2,$$

so daß mit einem Fehler in der Größenordnung 10^{-4} ein induktiver Effekt vernachlässigt werden kann.

Randbedingungen:

Da die Gesamtstromdichte \mathbf{j} insgesamt quellenfrei ist ($0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{j}$), muß die Normalkomponente von \mathbf{j} an der Grenzfläche stetig sein:

$$\sigma E_n = \tilde{\sigma} \tilde{E}_n$$

Bezeichnet $\tilde{\sigma}$ die Leitfähigkeit der Luft ($\tilde{\sigma} \approx 0$), dann folgt $E_n \approx 0$ ([40],[41]). Die Feldlinien des elektrischen Feldes laufen also nahe der Kopfhautoberfläche parallel zu ihr.

Zusammenfassung:

Die Abschätzung einzelner Effekte, die mit zeitlich veränderlichen Quellen verbunden sind, hat gezeigt, daß die quasistatische Näherung im betrachteten Frequenzbereich in biologischem Gewebe ein sinnvolles Modell darstellt. Zusammenfassend erhält man in der quasistatischen Formulierung:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla\Phi) = \nabla \cdot \mathbf{j}_p \quad (3.3)$$

Das elektrische Feld kann über

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$$

berechnet werden. Mit der Randbedingung an Grenzflächen

$$\sigma E_n = \tilde{\sigma} \tilde{E}_n \quad (3.4)$$

läßt sich die Berechnung der Potentialverteilung auch auf inhomogene Volumenleiter ausdehnen. Die Folge der Gültigkeit der quasistatischen Formulierung ist, daß man auch bei zeitlich veränderlicher elektrischer Aktivität jeden Zeitpunkt für sich betrachten kann. Man kann also eine Reihe von „Momentaufnahmen“ der Potentialverteilung machen und diese dann getrennt voneinander analysieren.

3.2 Modellierung des Volumenleiters

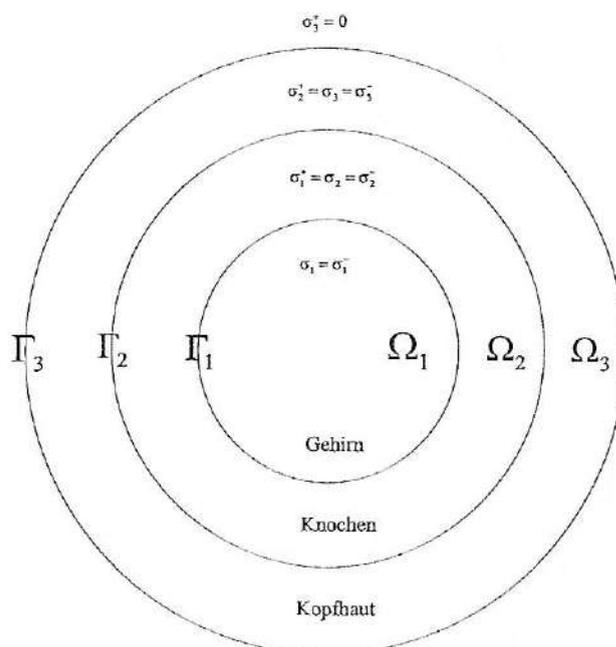


Abbildung 3.1: Dreischichtmodell des Volumenleiters.

Das Mehrschalen- oder Mehrschichtmodell beschreibt den Kopf als schichtweise homogenen Leiter. Als Schichten bieten sich Hirn, Liquor, Knochen und Kopfhaut an. Im Dreischichtmodell wird auf den Liquor verzichtet (Abbildung 3.1). Die i -te Schicht Ω_i wird von der inneren Oberfläche Γ_{i-1} und der äußeren Oberfläche Γ_i begrenzt. Das Hirn besitzt nur eine äußere Grenzfläche Γ_1 (Cortexoberfläche). Die Leitfähigkeit σ_i jeder einzelnen Schicht wird als konstant angenommen (Tabelle 3.1). Im weiteren werden die Bezeichnungen $\sigma_{i-1}^+ = \sigma_i = \sigma_i^-$ verwendet.

3.3 Modellierung der Primärstromdichte

Physiologisch sinnvoll ist die Modellierung eines aktivierten Neuronenverbands über einen Zylinder um einen Vektor \mathbf{a} (siehe Abbildung 3.2). Die Primärstromdichte \mathbf{j}_p ist parallel zu \mathbf{a} ausgerichtet und besitzt innerhalb des Zylinders konstante Amplitude, außerhalb ist sie Null. An den Grundflächen des Zylinders wird ein Strom I eingeleitet bzw. ausgeleitet. Der Vektor \mathbf{a} ist von der stromausleitenden zur stromeinleitenden Grundfläche gerichtet (Fender [15], Nunez [37], Wieringa [60], Okada [38]). Bezeichne Ω_{Zyl} den Zylinder und $|\Omega_{\text{Zyl}}|$ das Zylindervolumen des aktivierten Neuronenverbands und sei

$$\delta(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\text{Zyl}} \\ 0, & \forall \mathbf{x} \notin \Omega_{\text{Zyl}} \end{cases}$$

Es ergibt sich als Modell für einen aktivierten Neuronenverband der sogenannte physikalische Dipol

$$\mathbf{j}_p(\mathbf{x}) = -I \mathbf{a} \frac{\delta(\mathbf{x})}{|\Omega_{\text{Zyl}}|}. \quad (3.5)$$

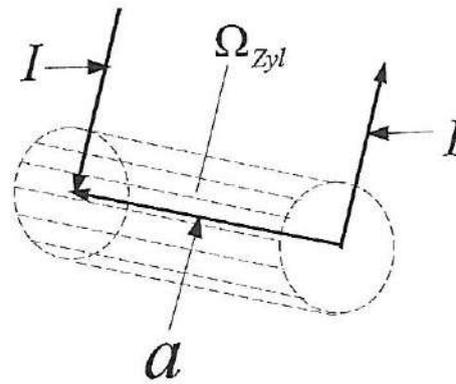


Abbildung 3.2: Modell des physikalischen Dipols.

Wird der Radius des Zylinders immer kleiner, so nähert sich der physikalische Dipol einer aus zwei Monopolen bestehenden Quellenordnung, einer Senke und einer Quelle, die einen sehr geringen Abstand $|a|$ voneinander haben. Die Feldverteilung eines solchen Modells verhält sich in der Fernzone wie ein reines Dipolfeld, wie über eine Taylorentwicklung gezeigt werden kann (Nolting [36], Seite 88). Mit dem Grenzübergang

$$M := \lim_{|a| \rightarrow 0} I a$$

ergibt sich das üblicherweise in der Literatur benutzte Modell des Stromdipols

$$\mathbf{j}_p = M \delta_{\mathbf{x}_0} \quad (3.6)$$

(Hämäläinen [21], Ilmoniemi [25], Okada [38]). \mathbf{x}_0 ist hier der Ort der Quelleinspeisung, die Amplitude wird über eine Dirac-Delta-Distribution (stetiges lineares Funktional auf $D(\Omega)$, Jantscher [26]) modelliert.

Die neuronalen Grundlagen von evozierten Magnetfeldern wurden anhand eines isolierten Schildkrötengehirns studiert (Okada [38]). Aus diesen Messungen wurde deutlich, daß das Feld bereits in einer Entfernung der Größe der aktivierten Hirnregion als dipolar anzusehen ist. Eine synchrone Aktivität in 1mm^3 Nervengewebe führte auf ein magnetisches Feld von $0.1 \cdot 10^{-12}\text{T} = 0.1\text{pT}$.

Es sei angemerkt, daß die Primärstromdichte im Hirn sicherlich eine beschränkte Amplitude besitzt und auch die Annahme einer Quelleinleitung in nur einem Punkte lediglich eine Hilfsvorstellung ist, die aber im Hinblick auf die in der Fernzone betrachtete Feldverteilung sinnvoll ist.

3.4 Berechnung des magnetischen Flusses

In der quasistatischen Näherung lautet die dritte Maxwellgleichung

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Mit Hilfe der Coulomb-Eichung ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) erhält man die Grundaufgabe der Magneto-
statik

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{=0} - \Delta \mathbf{A}$$

und damit

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} + c = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{y}) \nabla \Phi(\mathbf{y}) - \mathbf{j}_p(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} + c.$$

Der magnetische Fluß Ψ durch eine Leiterschleife Υ berechnet sich über das Integral der magnetischen Induktion über eine von der Leiterschleife aufgespannte Fläche F und mit dem Satz von Stokes über das Integral des magnetischen Vektorpotentials entlang der Leiterschleife

$$\Psi = \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = \oint_{\Upsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.7)$$

Ist also die Potentialverteilung im Volumenleiter bekannt (Lösung des direkten Problems über die Methode der finiten Elemente), kann der magnetische Fluß durch eine MEG-Leiterschleife berechnet werden.

Modelliert man den Volumenleiter über das Mehrschichtmodell und ist die Potentialverteilung nur auf den Grenzschichten bekannt (Lösung des direkten Problems über die BE-Methode), kann die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ für einen Punkt \mathbf{x} außerhalb des Volumenleiters wie im folgenden beschrieben berechnet werden. Startpunkt ist das Gesetz von Biot-Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \times \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y},$$

welches die dritte und vierte Maxwellgleichung erfüllt. Mit Gleichung (1) und $\mathbf{E} = -\sigma \nabla \Phi$ wird aus dieser Gleichung

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^p \sigma_j \int_{\Omega_j} \nabla \Phi(\mathbf{y}) \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \quad (3.6)$$

mit

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{j}_p(\mathbf{y}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y}.$$

Es gilt (Bronstein [6], S.574)

$$\nabla \Phi(\mathbf{y}) \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \nabla \times \left(\Phi(\mathbf{y}) \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \quad (3.8)$$

und für ein im Gebiet G mit geschlossener Berandung Γ stetiges Vektorfeld \mathbf{u} mit stetigen beschränkten ersten partiellen Ableitungen die Folgerung des Gaußschen Satzes (Bronstein [6], S.579)

$$\int_G \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = - \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{y}) \times \mathbf{n}(\mathbf{y}) d\Gamma. \quad (3.9)$$

Mit \mathbf{n} sei die äußere Normale der Oberfläche Γ bezeichnet. Das Vektorfeld $\Phi(\mathbf{y}) \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$ ist für $\mathbf{x} \notin \Omega$ im ganzen Gebiet genügend glatt und beschränkt, so daß

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p \sigma_j \int_{\Omega_j} \nabla \Phi(\mathbf{y}) \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \stackrel{(8),(9)}{=} \\ & - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} \Phi(\mathbf{y}) \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \times \mathbf{n}_j(\mathbf{y}) d\Gamma_j \end{aligned}$$

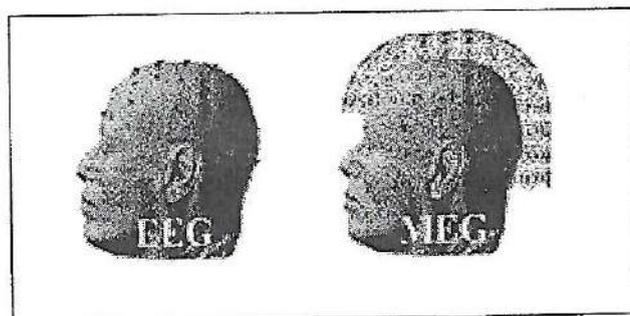


Abbildung 3.3: Position der Meßabnehmer bei EEG und MEG (aus Buchner et al. [10]).

gilt. Zur Berechnung der magnetischen Induktion erhält man die Formel von Geselowitz

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} \Phi(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \times \mathbf{n}_j(\mathbf{y}) d\Gamma_j. \quad (3.10)$$

3.5 Einfluß radialer Quellen auf die magnetische Induktion

Ist der Volumenleiter kugelsymmetrisch $\Omega = \Theta$, können analytische Formeln zur Berechnung der magnetischen Induktion hergeleitet werden (Ilmoniemi [25], Hämäläinen [21]). Es ist einfach zu sehen, daß die Anteile der Volumenströme in der Kugelgeometrie keinen Einfluß auf die radiale Feldkomponente B_r haben, denn mit $B_r = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ und

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{n}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = 0$$

fällt der Volumenstromanteil in Gleichung (10) weg und man erhält

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Theta} \mathbf{j}_p(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} d\mathbf{r}'. \quad (3.11)$$

Da außerhalb des Volumenleiters $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ gilt, kann die magnetische Induktion über ein magnetisches skalares Potential U dargestellt werden: $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla U$. Das Potential U ist eine harmonische Funktion ($0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \Delta U$). U ist eindeutig bestimmt über die Normalableitung B_r auf der Kugeloberfläche und die Bedingung $U(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. Ist der eingeleitete Primärstrom radial, folgt aus Gleichung (11) $B_r = 0$, somit ist das skalare Potential identisch 0 und damit auch die magnetische Induktion. Da die Geometrie des Kopfes in erster Näherung durch eine Kugelgeometrie beschrieben wird, kann in bezug auf die Messung der magnetischen Induktion am Kopf (MEG) davon ausgegangen werden, daß radiale Quellen einen sehr geringen Beitrag zum magnetischen Fluß liefern.

3.6 Kombinierte Erfassung von EEG und MEG

Die Beschaffenheit des quellinduzierten elektrischen Feldes unterscheidet sich von der Beschaffenheit des magnetischen Feldes bei Betrachtung derselben Quellverteilung.

Wie in Unterkapitel 3.5 beschrieben erzeugen radiale Quellen ein kaum meßbares magnetisches Feld, im elektrischen Potential Φ spiegeln sie sich aber wieder.

Die Leitfähigkeiten der einzelnen Schichten des Kopfmodells sind bis heute nur approximativ bekannt. Die schlecht leitende Knochenschicht hat aber auf die Verteilung des elektrischen Potentials an der Kopfoberfläche großen Einfluß. Es ergibt sich im realistischen Kopfmodell im Vergleich zum homogenen Kugelmodell mit Leitfähigkeit Kopfhaut eine abgeschwächte und breitere Verteilung des Potentials. Betrachtet man den Volumenstromanteil in Formel (10) zur Berechnung der magnetischen Induktion, so sieht man, daß die Potentialwerte innerhalb der Knochenschicht den entscheidenden Beitrag zur außen gemessenen magnetischen Induktion leisten. Im magnetischen Fall haben die Leitfähigkeiten der einzelnen Schichten nur die Funktion von Wichtungsfaktoren. Der außen gemessene magnetische Fluß wird weniger stark durch die Knochenleitfähigkeit beeinträchtigt.

Aus diesen Überlegungen wird deutlich, daß eine kombinierte Erfassung und Auswertung der EEG- und MEG-Signale anzustreben ist. In Abbildung 3.3 werden die Positionen der Ableitelektroden (EEG) und der Detektoren zur Messung des magnetischen Flusses (MEG) dargestellt.

- [10]).

Howitz

(3.10)

ktion

Berech-

n [21]).

keinen

(3.11)

on über

potential

nt über

Ist der

skalare

trie des

zug auf

werden,

der Be-

Kapitel 4

Die Methode der finiten Elemente

In der quasistatischen Formulierung wird die Potentialverteilung für das p -Schichtmodell über die partielle Differentialgleichung

$$\nabla \cdot [\sigma(\mathbf{x}) \nabla \Phi(\mathbf{x})] = \nabla \cdot \mathbf{j}_p(\mathbf{x}) =: J_p(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

von elliptischem Typ mit den Übergangsbedingungen

$$\sigma_i^- \frac{\partial}{\partial n} \Phi^- = \sigma_i^+ \frac{\partial}{\partial n} \Phi^+ \quad \forall i = 1, \dots, p-1 \quad (4.2)$$

und den Neumann-Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\sigma_p \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_p} = 0 \quad (4.3)$$

beschrieben. Im weiteren soll die Existenz und die Eindeutigkeit des in die Variationsformulierung überführten Problems gezeigt werden. Über die Methode der finiten Elemente kann das Variationsproblem dann auf einem Volumengitter des Kopfes approximativ gelöst werden.

4.1 Variationsformulierung, Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung

Für weitere Überlegungen wird der Funktionenraum $L_2(\Omega)$ benötigt. Dieser Raum besteht aus allen Funktionen, deren Quadrat innerhalb des Volumenleiters Lebesgue-integrierbar ist. Durch das Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, v)_0 := \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\Omega$$

wird $L_2(\Omega)$ zu einem Hilbertraum mit der Norm

$$\|u\|_0 := \sqrt{(u, u)_0}.$$

Es sei im weiteren davon ausgegangen, daß die Quelleinleitung über den physikalischen Stromdipol (3.5) modelliert wird, so daß die Stromquellendichte J_p im Raum $L_2(\Omega)$ liegt.

Definition 4.1.1 (Klassische Lösung) Φ heißt klassische Lösung der Randwertaufgabe (1), (3), falls $\Phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ diese Gleichungen punktweise erfüllt.

Gleichung (1) läßt sich nur unter der Bedingung $\sigma(x) \in C^1(\Omega)$ im klassischen Sinne verstehen (Einschichtmodell). Beim p-Schichtmodell sind die Leitfähigkeiten auf den einzelnen Schichten konstant, es gilt aber $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$ ($\forall i = 1, \dots, p-1$). Physikalisch sinnvoll sind die Voraussetzungen, daß das gesuchte Potential eine stetige Funktion im Volumenleiter

$$\Phi \in C^0(\bar{\Omega}) \quad (4.4)$$

darstellt und innerhalb der homogen leitenden Schichten stetig differenzierbar ist

$$\Phi \in C^1(\Omega_i) \quad \forall i = 1, \dots, p. \quad (4.5)$$

Für dieses Modell ist die Variationsformulierung anzuwenden. Man sucht eine schwache Lösung im Sobolevraum $H^1(\Omega)$ (Definition 4.1.3). Im folgenden soll die theoretische Grundlage für die Existenz und Eindeutigkeit einer physikalisch sinnvollen, schwachen Lösung des vorgestellten Problems geliefert werden.

Definition 4.1.2 (Schwache Ableitung) $\Phi \in L^2(\Omega)$ besitzt die schwache Ableitung $v = \partial^\alpha \Phi$, falls $v \in L^2(\Omega)$ und

$$(u, v)_0 := (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha u, \Phi)_0 \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt.

Definition 4.1.3 (Sobolevräume) Für ganzzahliges $m \geq 0$ bezeichne $H^m(\Omega)$ die Menge aller Funktionen Φ in $L^2(\Omega)$, die schwache Ableitungen $\partial^\alpha \Phi$ für alle $|\alpha| \leq m$ besitzen. In $H^m(\Omega)$ wird durch

$$(\Phi, v)_{H^m(\Omega)} = (\Phi, v)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha \Phi, \partial^\alpha v)_0$$

ein Skalarprodukt mit zugehöriger Norm

$$\|\Phi\|_m := \sqrt{(\Phi, \Phi)_m}$$

erklärt. Daneben ist die Seminorm

$$|\Phi|_m := \sqrt{\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha \Phi\|_0^2}$$

von Bedeutung.

Mit der Norm $\|\cdot\|_m$ ist $H^m(\Omega)$ vollständig und damit ein Hilbertraum.

Definition 4.1.4 (Kegelbedingung) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und habe einen stückweise glatten Rand. Ω erfüllt die Kegelbedingung, falls die Innenwinkel an den Ecken positiv sind und man einen Kegel mit positivem Scheitelwinkel so in Ω verschieben kann, daß er die Ecken berührt.

Satz 4.1.1 (Variante der Friedrichsschen Ungleichung) Sei Ω ein sternförmiges Gebiet mit Rauminhalt $\mu(\Omega)$, das in einem Würfel mit Kantenlänge s enthalten ist. Dann ist

$$\|\Phi\|_0 \leq |\bar{\Phi}| \mu(\Omega)^{1/2} + 2s \|\Phi\|_1 \quad \forall \Phi \in H^1(\Omega)$$

mit

$$\bar{\Phi} = \int_{\Omega} \Phi(x) d\Omega / \mu(\Omega).$$

Beweis: Braess [5], 1.14

Es soll nun gezeigt werden, wie das Ausgangsproblem (1) mit Neumann-Randbedingungen (3) in ein Variationsproblem überführt werden kann. In dieser Formulierung ist dann der Nachweis einer eindeutig existierenden schwachen Lösung möglich.

Satz 4.1.2 (Charakterisierungssatz) Sei V ein linearer Raum und $a : V \times V \rightarrow \mathcal{R}$ eine symmetrische und positive Bilinearform, d.h.

$$a(\Phi, \Phi) > 0 \quad \forall \Phi \in V, \Phi \neq 0,$$

Ferner sei $l : V \rightarrow \mathcal{R}$ ein lineares Funktional. Die Größe

$$\text{Var}(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle l, v \rangle$$

nimmt in V ihr eindeutiges Minimum genau dann in Φ an, wenn

$$a(\Phi, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V$$

gilt.

Beweis: Braess [5], Satz 2.2

Es soll nun die Bilinearform a und das Funktional l für diese Anwendung formuliert werden:

$$\begin{aligned} a(\Phi, v) &:= \int_{\Omega} \sigma(\nabla \Phi) \cdot (\nabla v) d\Omega \\ l(v) = \langle l, v \rangle &:= \int_{\Omega} J_p v d\Omega \end{aligned} \tag{4.6}$$

Definition 4.1.5 (Stetige Bilinearform) Sei H ein Hilbertraum. Eine Bilinearform $a : H \times H \rightarrow \mathcal{R}$ heißt stetig, wenn es ein $C > 0$ gibt, so daß

$$|a(\Phi, v)| \leq C \|\Phi\|_H \|v\|_H \quad \forall \Phi, v \in H$$

Die Stetigkeit der Bilinearform a aus (6) auf $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ läßt sich unter Zuhilfenahme der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung nachweisen:

$$|a(\Phi, v)| = \left| \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \sigma \partial_i \Phi \partial_i v d\Omega \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} |\partial_i \Phi \partial_i v| d\Omega \\
&\stackrel{\text{C.-S.}}{\leq} \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{i=1}^3 \left[\int_{\Omega} (\partial_i \Phi)^2 d\Omega \int_{\Omega} (\partial_i v)^2 d\Omega \right]^{1/2} \\
&\leq c \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} |\Phi|_1 |v|_1 \\
&\leq c \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Phi\|_1 \|v\|_1
\end{aligned}$$

Definition 4.1.6 (H-Elliptizität) Eine symmetrische, stetige Bilinearform a heißt H-elliptisch, wenn mit einem $\alpha > 0$ gilt:

$$a(\Phi, \Phi) \geq \alpha \|\Phi\|_H^2 \quad \forall \Phi \in H$$

Satz 4.1.3 (Lax-Milgram) Sei V eine abgeschlossene, konvexe Menge in einem Hilbertraum H und $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine elliptische Bilinearform. Für jedes $l \in V'$ hat das Variationsproblem

$$\text{Var}(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \langle l, v \rangle \rightarrow \min! \quad (4.7)$$

genau eine Lösung in V .

Beweis: Braess [5], Satz 2.5

Zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit werden folgende Unterräume benötigt:

$$\begin{aligned}
C_U^{\text{klass}} &:= \{v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \int_{\Omega} v d\Omega = 0\} \\
H_U^1 &:= \{v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} v d\Omega = 0\}
\end{aligned}$$

Elliptizität der Bilinearform a ergibt sich auf dem Unterraum H_U^1 von $H^1(\Omega)$ mit s und $\bar{\Phi}$ aus der Variante der Friedrichsschen Ungleichung 4.1.1, denn mit $\beta = \min_{i \in \{1, \dots, p\}} \{\sigma_i\}$ gilt

$$\begin{aligned}
a(\Phi, \Phi) &\geq \beta |\Phi|_1^2 \\
&= \frac{\beta}{1+4s^2} (|\Phi|_1^2 + 4s^2 |\Phi|_1^2) \\
&= \frac{\beta}{1+4s^2} (|\Phi|_1^2 + \underbrace{\{\bar{\Phi} \mu(\Omega)^{1/2} + 2s |\Phi|_1\}^2}_{=0}) \\
&\stackrel{\text{F.U.}}{\geq} \frac{\beta}{1+4s^2} (|\Phi|_1^2 + \|\Phi\|_0^2) \\
&= \frac{\beta}{1+4s^2} \|\Phi\|_1^2.
\end{aligned}$$

Das Funktional l in (6) ist auf $H^1(\Omega)$ beschränkt, denn

$$\|l\|_{(H^1(\Omega))'} \stackrel{\text{Def.}}{=} \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{|l(v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |J_p v| d\Omega}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \\
&\stackrel{\text{C.-S.}}{\leq} \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{[\int_{\Omega} (J_p)^2 d\Omega \int_{\Omega} (v)^2 d\Omega]^{1/2}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \\
&\stackrel{J_p \in L^2(\Omega)}{<} \infty
\end{aligned}$$

und damit gilt ebenfalls $l \in (H^1_{\Gamma})'$.

Satz 4.1.4 (Spursatz) Das Gebiet Ω sei beschränkt und erfülle die Kegelbedingung, Γ sei stückweise glatter Rand. Dann gibt es eine beschränkte, lineare Abbildung

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \|\gamma(\Phi)\|_{0,\Gamma} \leq c \|v\|_{1,\Omega},$$

so daß $\gamma(v) = v|_{\Gamma}$ für alle $v \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt.

Beweis: Braess [5], Satz 3.1

Aus dem Spursatz folgt, daß auch für eine Neumann-Bedingung $\frac{\partial}{\partial n} \Phi = g$ mit $g \in L^2(\Gamma)$ das Funktional $l(v) := \int_{\Omega} J_p v d\Omega + \int_{\Gamma} g v d\Gamma$ für alle $v \in H^1(\Omega)$ wohldefiniert und beschränkt ist.

Aus dem Beweis des Spursatzes wird zudem ersichtlich, daß die erste Greensche Formel auch für Funktionen $u, v \in H^1(\Omega)$ gilt [5]:

$$\int_{\Omega} v \partial_i u d\Omega = - \int_{\Omega} u \partial_i v d\Omega + \int_{\Gamma} v u n_i d\Gamma \quad (4.8)$$

Hier bezeichne n_i die i -te Komponente der äußeren Normalen \mathbf{n} an Γ .

Satz 4.1.5 (Kompatibilitätsbedingung) Ω sei Normalgebiet. Die Gleichung (1) mit der Neumann-Randbedingung (3) ist genau dann lösbar, wenn

$$\int_{\Omega} J_p(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}} = 0.$$

Existiert eine Lösung Φ , so ist auch $\Phi + \text{const}$ eine Lösung.

Beweis: Anwendung der Greenschen Formel (8), Braess [5], Seite 45/46 und Hackbusch [17], Beispiel 7.4.8

Für das Primärstromdichtemodell (5) gilt, falls $S(\Omega_{Zyl})$ die Oberfläche von Ω_{Zyl} bezeichne

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} J_p(\mathbf{x}) d\Omega &= \int_{\Omega_{Zyl}} J_p(\mathbf{x}) d\Omega \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{S(\Omega_{Zyl})} \mathbf{j}_p(\mathbf{x}) \cdot d\Gamma \\
&= - \frac{I}{|\Omega_{Zyl}|} \int_{S(\Omega_{Zyl})} \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle d\Gamma = 0,
\end{aligned}$$

denn auf dem Zylindermantel ist $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = 0$ und die Integrale über die beiden Stirnflächen eliminieren sich. Mit diesen Voraussetzungen lassen sich nun folgende Sätze beweisen:

Satz 4.1.6 (Existenz und Eindeutigkeit) Das Gebiet Ω sei beschränkt und erfülle die Kegelbedingung, Γ sei stückweise glatter Rand. Dann hat die Variationsaufgabe (7) genau eine Lösung $\Phi \in H_U^1$.

Beweis: Da a eine H_U^1 -elliptische Bilinearform ist und $l \in (H_U^1)'$, folgt die Existenz einer eindeutigen Lösung $\Phi \in H_U^1$ aus dem Satz von Lax-Milgram. Insbesondere ist Φ durch

$$a(\Phi, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in H_U^1 \quad (4.9)$$

charakterisiert (Charakterisierungssatz). Wegen der Kompatibilitätsbedingung gilt Gleichung (9) auch für $v = \text{const}$ und damit für alle $v \in H^1(\Omega)$.

q.e.d.

Satz 4.1.7 Das Gebiet Ω sei beschränkt und erfülle die Kegelbedingung, Γ sei stückweise glatter Rand. Die Lösung der Variationsaufgabe (7) ist genau dann in C_U^{klass} enthalten, wenn eine klassische Lösung der Aufgabe (1) mit Randbedingung (3) existiert (Einschichtmodell). Die beiden Lösungen sind dann identisch.

Beweis: (Braess [5], Satz 3.2)

Satz 4.1.8 Sei $\sigma(\mathbf{x}) \in C^1(\Omega_i)$, $\forall i = 1, \dots, p$. Erfüllt die schwache Lösung Φ des Variationsproblems (7) in Ω die Voraussetzungen (4) und (5), so ist sie klassische Lösung der Differentialgleichung (1) in $\bigcup_{i=1}^p \Omega_i$. Außerdem erfüllt sie neben den Übergangsbedingung (2) die Neumann-Randbedingung (3).

Beweis: Partielle Integration der Bilinearform a in (6), (Hackbusch [17], Unterkapitel 10.1.1)

Korollar 4.1.1 Sind die Leitfähigkeiten unstetig, so gehört die Lösung Φ der Gleichung (7) im allgemeinen nicht zu $C^2(\Omega)$, sondern hat unstetige Ableitungen auf den Grenzflächen Γ_i $\forall i = 1, \dots, p$. Lediglich die Tangentialableitungen entlang der Grenzflächen können stetig sein.

Beweis: Hackbusch [17], Unterkapitel 10.1.1

4.2 Ritz-Galerkin-Verfahren

Folgendes Problem ist gegeben: Suche $\Phi \in V$, so daß

$$a(\Phi, v) = l(v) \quad \forall v \in V. \quad (4.10)$$

Für die numerische Lösung bietet sich an, einen endlichdimensionalen Teilraum $V_n \subset V$ mit der Dimension $\dim V_n = n$ zu wählen. V_n sei durch die Basis h_1, \dots, h_n erzeugt, d.h. $V_n = \text{span}\{h_1, \dots, h_n\}$. Man versucht die Lösung Φ auf diesem Raum möglichst gut zu approximieren und macht den Ansatz nach Ritz-Galerkin:

Suche $\Phi^n \in V_n$, so daß

$$a(\Phi^n, v) = l(v) \quad \forall v \in V_n. \quad (4.11)$$

Für jeden Koeffizientenvektor $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)^{tr}$ definiere man $P : \mathcal{R}^n \rightarrow V_n$ mit

$$\Phi^n = P\Phi := \sum_{i=1}^n \Phi_i h_i.$$

Bemerkung 4.2.1 P ist ein Isomorphismus zwischen \mathcal{R}^n und V_n . Die inverse Abbildung $P^{-1} : V_n \rightarrow \mathcal{R}^n$ ist somit auf V_n wohldefiniert.

Das diskretisierte Variationsproblem (11) kann in ein Gleichungssystem

$$A\Phi = \mathbf{b} \tag{4.12}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{ij} &:= a(h_i, h_j) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n \\ b_i &:= l(h_i) \quad \forall 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

überführt werden.

4.2.1 Fehlerabschätzungen

Satz 4.2.1 [5] Die Bilinearform a sei V -elliptisch mit der Elliptizitätskonstanten α aus Definition 4.1.6. Dann gilt unabhängig von der Wahl des Unterraums V_n von V für die Lösung Φ^n des diskretisierten Variationsproblems (11)

$$\|\Phi^n\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{H^1(\Omega)'}$$

Beweis: Aus der V -Elliptizität von a ergibt sich

$$\alpha \|\Phi^n\|_{H^1(\Omega)} \leq a(\Phi^n, \Phi^n) = l(\Phi^n) = \langle l, \Phi^n \rangle \leq \|l\|_{H^1(\Omega)'} \|\Phi^n\|_{H^1(\Omega)},$$

woraus die Behauptung folgt.

q.e.d.

Satz 4.2.2 (Céa) [5] Die Bilinearform a sei V -elliptisch. Ferner seien Φ bzw. Φ^n die Lösungen der Variationsaufgaben (10) in V bzw. (11) in V_n . Dann ist

$$\|\Phi - \Phi^n\|_1 \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v \in V_n} \|\Phi - v\|_1$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} a(\Phi, v) &= l(v) \quad \forall v \in V \\ a(\Phi^n, v) &= l(v) \quad \forall v \in V_n. \end{aligned}$$

Wegen $V_n \subset V$ folgt $a(\Phi - \Phi^n, v) = 0 \quad \forall v \in V_n$. Sei $v^n \in V_n$. Mit $v = v^n - \Phi^n$ folgt $a(\Phi - \Phi^n, v^n - \Phi^n) = 0$ und damit

$$\begin{aligned} \alpha \|\Phi - \Phi^n\|_1^2 &\leq a(\Phi - \Phi^n, \Phi - \Phi^n) \\ &= a(\Phi - \Phi^n, \Phi - v^n) + \underbrace{a(\Phi - \Phi^n, v^n - \Phi^n)}_{=0} \\ &\leq C \|\Phi - \Phi^n\|_1 \|\Phi - v^n\|_1. \end{aligned}$$

q.e.d.

Die Wahl des Unterraums ist somit für die numerische Methode entscheidend. Je näher die Lösung Φ am Unterraum V_n liegt, desto kleiner ist auch der Diskretisierungsfehler. Hier soll noch folgender Satz zitiert werden:

Satz 4.2.3 $V_i := V_{n_i} \subset V$ ($i \in \mathcal{N}$) sei eine Folge von Unterräumen mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(\Phi, V_i) = 0 \quad \forall \Phi \in V. \quad (4.13)$$

a sei eine stetige und V -elliptische Bilinearform. Dann konvergiert die Ritz-Galerkin-Lösung $\Phi^i := \Phi^{n_i}$ gegen Φ :

$$\|\Phi - \Phi^i\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Hinreichend für (13) ist

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \text{ dicht in } V.$$

Beweis: Hackbusch [17], Satz 8.2.2 und Lemma 6.5.7

4.2.2 Finite Elemente

Zur numerischen Realisierung wird der Volumenleiter Ω in kleine Volumenelemente T_i , $1 \leq i \leq t$, die sogenannten finiten Elemente, zerlegt. An das Volumennetz werden folgende Bedingungen gestellt:

Definition 4.2.1 $\tau := \{T_1, \dots, T_t\}$ heißt eine zulässige Triangulation von Ω , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die T_i sind offene Tetraeder.
2. Die T_i sind disjunkt, d.h. $T_i \cap T_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
3. $\bigcup_i \overline{T_i} = \overline{\Omega}$
4. Für $i \neq j$ ist $\overline{T_i} \cap \overline{T_j}$ entweder
 - leer oder
 - eine gemeinsame Ecke oder
 - eine gemeinsame Seite oder
 - eine gemeinsame Kante.

Als Unterraum $W_n \subset H^1(\Omega)$ kann als ein Beispiel der Unterraum der stückweise linearen Funktionen gewählt werden:

$$W_n := \{\Phi \in C^0(\overline{\Omega}); \Phi \text{ linear auf jedem Tetraeder } T_i\} \quad (4.14)$$

Als Basis ergeben sich dann die Hutfunktionen h_i ($1 \leq i \leq n$) mit $h_i(\mathbf{x}^i) = 1$, $h_i(\mathbf{x}^j) = 0$ ($\forall i \neq j$). Der Träger von h_i besteht aus allen Tetraedern, die \mathbf{x}^i als Eckpunkt besitzen. Die Dimension $n = \dim W_n$ ist die Anzahl der Knotenpunkte des Volumennetzes.

4.2.3 Behandlung der Nebenbedingung

Im Falle der Neumann-Randbedingungen wird $V = H_U^1(\Omega)$ gewählt. H_U^1 ist Unterraum eines einfach zu diskretisierenden Raumes $H^1(\Omega) \supset H_U^1(\Omega)$. Sei W_n wie in (14) mit linearen Ansatzfunktionen h_i definiert. Als Finite-Elemente-Raum für V wird $V_n := W_n \cap V$ mit $\dim V_n = \dim W_n - 1 = n - 1$ gewählt. V_n sei durch die Nebenbedingung

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} h_j(\mathbf{x}) d\Omega w_j \right) = 0$$

beschrieben. Betrachte nun die Aufgabe:

Bestimme $\Phi \in \mathcal{R}^n$ und $\lambda \in \mathcal{R}$ mit

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} h_j(\mathbf{x}) d\Omega \Phi_j \right) = 0 \quad (4.15)$$

und

$$a(P\Phi, P\mathbf{w}) + \lambda \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} h_j(\mathbf{x}) d\Omega w_j \right) = l(P\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{R}^n. \quad (4.16)$$

Dann gilt:

Satz 4.2.4 Die Variationsaufgaben (11) und (15), (16) sind im folgenden Sinne äquivalent. Ist Φ, λ ein Lösungspaar des Variationsproblems (16) mit Nebenbedingung (15), so löst $P\Phi$ das Ausgangsproblem (11). Ist umgekehrt $\Phi^n = P\Phi$ eine Lösung des Ausgangsvariationsproblems (11), so existiert genau ein $\lambda \in \mathcal{R}$, so daß Φ und λ die Aufgabe (16) mit Nebenbedingung (15) lösen.

Beweis: Hackbusch [17], Satz 8.3.23

Bemerkung 4.2.2 A und \mathbf{b} seien wie in (12) definiert. Ferner sei

$$\mathbf{c} := \left(\int_{\Omega} h_1(\mathbf{x}) d\Omega, \dots, \int_{\Omega} h_n(\mathbf{x}) d\Omega \right)^{tr}.$$

Dann ist das Variationsproblem (16) mit Nebenbedingung (15) äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^{tr} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Beweis: Hackbusch [17], Bemerkung 8.3.24

In dieser Weise kann die Ritz-Galerkin-Lösung Φ^n im Unterraum $V_n \subset V$ berechnet werden. Es ist nach Satz 4.2.3 gesichert, daß bei feiner werdendem Netz und damit besserer Annäherung des Raumes V_n an die eindeutig existierende Lösung Φ auch die Ritz-Galerkin-Lösung konvergiert.

Bei der Messung des EEG's ist eine der Elektroden eine Referenzelektrode. Dem zur Referenzelektrode zugeordneten Finite-Elemente-Netzknoten Φ_j^n wird der Dirichlet-Wert 0 vorgeschrieben. Man könnte nun Φ^n durch Lösen des Gleichungssystems (17) ermitteln und in der Weise eine Konstante dazuaddieren, daß der Knotenwert der Referenzelektrode das Potential 0 erhält. In der Praxis kann die Berechnung von Φ^n auf einem vom Rechenaufwand günstigerem Wege ermittelt werden (Schwarz [50], Kapitel 3.1.3). Das Variationsproblem (10) wird für $V = H^1(\Omega)$ zunächst ohne Berücksichtigung des Dirichlet-Werts durch $W_n \subset H^1$ diskretisiert. Es genügt dann, in der entstehenden Matrix A (Steifigkeitsmatrix) die j -te Zeile und Spalte durch Nullelemente zu ersetzen, das Diagonalelement a_{jj} anschließend gleich 1 zu setzen und weiter die j -te Komponente in \mathbf{b} durch eine Null zu ersetzen.

4.2.4 Quantitative Konvergenzaussagen

Bei den Finite-Elemente-Approximationen ist man an Abschätzungen für die Lösung $\Phi^n \in V_n$ der Form

$$\|\Phi - \Phi^n\| \leq O(h^k)$$

mit möglichst großer Fehlerordnung k interessiert. h bezeichne die Kantenlänge eines finiten Elements. Im allgemeinen hängt die Ordnung von der Regularität der Lösung, vom Grad der Polynome in den finiten Elementen, von der gewählten Sobolevnorm und von der Approximationsgüte der Triangulation an die Geometrie ab.

Definition 4.2.2 (Quasiuniforme Gitter) Sei h_T die längste Seite von $T \in \tau$. $h := \max\{h_T : T \in \tau\}$ ist die größte in $\tau =: \tau_h$ auftretende Kantenlänge. Mit ρ_T sei der Radius des Innenkreises von $T \in \tau$ bezeichnet. Das Verhältnis h_T/ρ_T geht genau dann gegen unendlich, wenn der kleinste Innenwinkel gegen null strebt. Falls

$$\max\{h_T/\rho_T : T \in \tau\} \leq \text{const}$$

für eine Familie von Triangulationen abgeschätzt werden kann, nennt man diese quasiuniform.

Beim Einschichtmodell lassen sich folgende Aussagen treffen:

Satz 4.2.5 (Quantitative Fehlerordnung für das Einschichtmodell) Sei τ_n eine Folge von quasiuniformen, zulässigen Triangulationen. Die Bilinearform a sei stetig und V -elliptisch. Es gelte $\Phi \in H^2(\Omega)$. $\Phi^n \in V_n$ (V_n Raum der linearen Ansatzfunktionen) sei die Ritz-Galerkin-Lösung. Dann gibt es eine von Φ , h und n unabhängige Konstante C mit

$$\|\Phi - \Phi^n\|_1 \leq Ch\|\Phi\|_2$$

Beweis: Hackbusch [17], Kapitel 8.5.1, Satz 8.4.6

Satz 4.2.6 (Aubin-Nitsche) Es gelten die Voraussetzungen von Satz 4.2.5. Dann gibt es eine von Φ und n unabhängige Konstante C_2 , so daß

$$\|\Phi - \Phi^n\|_0 \leq C_2 h^2 \|\Phi\|_2$$

Beweis: Hackbusch [17], Kapitel 8.5.1, Satz 8.4.11

Beim p-Schichtmodell ist die Leitfähigkeit auf den Schichtübergängen unstetig und es kann im allgemeinen nur $\Phi \in H^1(\Omega)$ angenommen werden. Nach Hackbusch [17], Kapitel 10.1.2 kann man aber darauf hoffen, daß sich die üblichen Fehlerschranken $\|\Phi - \Phi^n\|_1 = O(h)$ und $\|\Phi - \Phi^n\|_0 = O(h^2)$ durch an die Geometrie angepaßte, d.h. isoparametrische finite Elemente, erreichen lassen.

4.3 Finite Elemente Lösung im Programmsystem CAUCHY

Im Programmsystem CAUCHY (Buchner et al. [9]) wurde ein Finite-Elemente-Modell zur Vorwärtzlösung der Gleichung (1) im Volumenleiter Kopf realisiert.

4.3.1 Vergitterung des Kopfes

Anhand einer Sequenz von Kernspinresonanz-Tomographie-Bildern kann der Kopf in ein Finite-Elemente-Netz vergittert werden (Programmsystem CURRY). Es läßt sich ein aus Tetraedern oder kubischen Elementen bestehendes Netz erzeugen. Kantenlängen dieser Elemente liegen im Durchschnitt bei ca. 4 – 6mm. Die Grenzschichten weiße Substanz zu grauer Substanz, Cortexoberfläche, Knochen innen und außen und Kopfhaut werden in guter Näherung gefunden. Jedem Element kann eine tensorwertige Leitfähigkeit zugeordnet werden, um auch Anisotropie modellieren zu können.

4.3.2 Quelleinleitung in CAUCHY

Dem Quellmodell (3.5) folgend sollte unter Kenntnis der Lage und Ausdehnung des Zylinders Ω_{Zyl} die rechte Seite des Gleichungssystems (12) durch Auswertung des Funktionals l ermittelt werden.

Physiologische Untersuchungen haben gezeigt, daß hauptsächlich der Dipolanteil einer Quelle in der Fernzone (Kopfoberfläche) beobachtet werden kann. Vom praktischen Standpunkt und im Hinblick auf die inverse Quellsuche ist es anzustreben, eine Quelleinleitung auf einen Netzknoten (innerhalb der grauen Substanz) bezogen zu definieren. So kann bisher in CAUCHY eine Quelle als vektorwertige Größe an einem Netzknoten eingeleitet werden (Dipoleinleitung), die dem Prinzip von Saint Venant folgend in der Weise auf die umliegenden Netzknoten (als Monopolquellen) verteilt wird, daß das Dipolmoment möglichst gut erfüllt wird. Für eine Kugel mit homogener Leitfähigkeit existiert unter Quelleinleitung durch einen Stromdipol eine analytische Formel für die Potentialverteilung (Smythe [52]). Um das implementierte Quellmodell zu testen, wurde eine Kugel mit Radius R und Oberfläche Γ in ca. 7000 kubische finite Elemente vergittert und die Korrelation

$$C = \frac{\int_{\Gamma} \Phi^{FE} \Phi^{ANA} d\Gamma}{\int_{\Gamma} (\Phi^{ANA})^2 d\Gamma}$$

zwischen dem analytisch berechneten und dem numerisch angenäherten Oberflächenpotential ermittelt (Buchner et al. [9]). Es wurden radiale Dipole mit wachsendem Abstand r vom Kugelmittelpunkt getestet. Für ein Verhältnis r/R bis ca. 0.8 ergab sich eine Korrelation von nahezu 1. Für $r/R > 0.8$ wurde die Korrelation sehr schlecht, da nur noch wenige finite Elemente zwischen dem Ort der Einleitung und der Oberfläche der Kugel lagen. Für die Anwendung wird diese Differenz aber nicht kritisch, da zwischen dem Ort der Einleitung und den Meßabnehmern einige Schichten finiter Elemente liegen werden.

4.3.3 Lösung des Gleichungssystems

Die Steifigkeitsmatrix $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ des Gleichungssystems (12) ist eine dünnbesetzte Matrix (pro Zeile ca. 30 Einträge) mit n Unbekannten. Bei Vergitterung des Kopfes mit finiten Elementen der Kantenlänge 5mm wird n im Bereich von ca. 17000 liegen. Direkte Verfahren können hier nicht mehr als effizient eingestuft werden, da die Dünnbesetztheit der Matrix nicht dementsprechend genutzt wird und sich die Matrix beim direkten Lösen füllt.

Selbst bei linearen Problemen wie in dieser Anwendung ist man auf iterative Verfahren angewiesen.

Für sehr große Gleichungssysteme mit dünnbesetzten, positiv definiten Matrizen haben sich zwei Verfahren durchgesetzt, die Methode der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung und die Mehrgitterverfahren. Ist die Bilinearform a V -elliptisch, dann führt die Diskretisierung durch finite Elemente zu positiv definiten, symmetrischen Matrizen. Es kann nun ausgenutzt werden, daß die Lösung der Gleichung (12) gerade das Minimum von

$$J(\Phi) = \frac{1}{2} \Phi^{tr} A \Phi - \mathbf{b}^{tr} \Phi$$

ist, was auf die Gradientenverfahren führt. In CAUCHY wird das Gleichungssystem (12) iterativ über die Methode der konjugierten Gradienten mit Skalierung und ICC-Vorkonditionierung (Incomplete Cholesky decomposition) gelöst. Das einmalige Lösen des Gleichungssystems erfordert bei ca. 17000 Unbekannten auf einer IBM RS/6000, Modell 375 ca. 25 Sekunden und das Speichern der von Null verschiedenen Matrixeinträge von A zusammen mit der Vorkonditionierungsmatrix benötigt weniger als 3MB Hauptspeicher.

Kapitel 5

Randelementmethode

Bei Modellierung des Kopfes durch einen schichtweise homogenen, isotropen Leiter kann die Differentialgleichung (4.1) auf analytischem Wege weiter behandelt werden. Als Integralgleichungsmethode bezeichnet man die Überführung einer partiellen Differentialgleichung mit d Raumvariablen in eine Integralgleichung über einer $(d-1)$ -dimensionalen Oberfläche. Die entstehende Integralgleichung kann dann über die Randelement- oder BE-Methode numerisch gelöst werden.

5.1 Integralgleichungsmethode

Die im schwachen Sinne zu verstehende partielle Differentialgleichung (4.1) mit Neumann-Randbedingungen (4.3) soll im weiteren über die Integralgleichungsmethode in eine Randintegralgleichung überführt werden. Es gelten die folgenden physikalisch sinnvollen Voraussetzungen:

- Das Potential ist stetig im betrachteten Gebiet:

$$\Phi \in C(\Omega) \quad (5.1)$$

- Die Normalkomponente der Volumenstromdichte ist stetig über die Grenzflächen:

$$\sigma < \mathbf{n}, \nabla \Phi > \in C(\Gamma_i) \quad (5.2)$$

- Das Potential ist zweifach stetig differenzierbar innerhalb der Schichten:

$$\Phi \in C^2(\bar{\Omega}_i) \quad \forall i = 1, \dots, p$$

- Die Grenzflächen Γ_i sind genügend glatt und ohne Ecken.

Für die Herleitung der Integralgleichung benötigt man die sogenannte Singularitätenfunktion, welche für das vorliegende Problem speziell als

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

gewählt wird (Hackbusch [17] (2.2.1a)).

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, die Differentialgleichung (4.1) in eine Integralgleichung zu überführen. Im weiteren wird die Herleitung über das sogenannte Doppelschichtpotential gewählt (siehe Hackbusch [18]), welches die Normalableitung der Singularitätenfunktion nach dem zweiten Argument \mathbf{y} benutzt. Man betrachte zunächst das

Einschichtmodell mit Γ als Oberfläche.

Als Dipolkern bezeichnet man die Funktion

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := 2 \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{y}}} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2 \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_{\mathbf{y}} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma.$$

Der mit dem Dipolkern k gebildete Integraloperator sei mit K bezeichnet und lautet

$$(K\Phi)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Für die speziell gewählte Singularitätenfunktion ergibt sich als Kern

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma, \quad (5.3)$$

und als Integraloperator

$$(K\Phi)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (5.4)$$

Der Integrand des Integraloperators besitzt in $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ eine starke Singularität, die Existenz dieses Integrals ist somit zu zeigen.

Lemma 5.1.1 Sei $\Gamma \in C^{1+\mu}$ für ein $\mu > 0$ und $\Phi \in L^{\infty}(\Gamma)$ beschränkt. Dann existiert das Integral (4) für alle $\mathbf{x} \in \Gamma$ als uneigentliches Integral.

Beweis: Hackbusch [18] Lemma 8.2.2

Damit ist $(K\Phi)(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \Gamma$ definiert. Für \mathbf{x} außerhalb von Γ ist der Integrand regulär. Im weiteren kann gezeigt werden:

Satz 5.1.1 (Kompaktheit) Sei $0 < \mu < 1$. Unter der Voraussetzung $\Gamma \in C^{1+\mu}$ gilt:

- (a) $K \in L(L^{\infty}(\Gamma), C(\Gamma))$
- (b) $K \in K(C(\Gamma), C(\Gamma))$

Beweis: Hackbusch [18] Satz 8.2.5

Satz 5.1.2 Sei $\Phi \in L^{\infty}(\Gamma)$ beschränkt und im Punkt $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ stetig, dann gilt

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\Gamma} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} = -\Phi(\mathbf{x}_0) + (K\Phi)(\mathbf{x}_0)$$

Beweis: Hämäläinen [21]

Nach Bronstein [6] gilt

Satz 5.1.3 (2. Greensche Formel) Ω sei Normalgebiet, u und v seien mit ihren zweiten partiellen Ableitungen in Ω stetig und \mathbf{n} sei die äußere Normale an Γ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [u(\mathbf{x}) \Delta v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{x})] d\Omega = \\ \int_{\Gamma} [u(\mathbf{x}) \langle \mathbf{n}, \nabla v(\mathbf{x}) \rangle - v(\mathbf{x}) \langle \mathbf{n}, \nabla u(\mathbf{x}) \rangle] d\Gamma. \end{aligned}$$

Es soll nun die Integralgleichung für das gesuchte Potential Φ hergeleitet werden. Sei zunächst $\mathbf{x} \in \Omega_i$, ($i \in \{1, \dots, p\}$). In Ω_i ist die Singularitätenfunktion s im Punkte $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ nicht differenzierbar. Man definiere deshalb

$$K_\epsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathcal{R}^3 : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \epsilon\},$$

wobei ϵ so klein gewählt wird, daß $\overline{K_\epsilon} \subset \Omega_i$. Auf den Schichten $\Omega_j \setminus K_\epsilon(\mathbf{x})$ ($\forall j = 1, \dots, p$) ist die Singularitätenfunktion s nun zweimal stetig differenzierbar und die zweite Greensche Formel kann angewendet werden.

Man beachte, daß $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ die äußere Normale auf Γ_j bezeichnet. Bei Anwendung der 2. Greenschen Formel auf das Gebiet Ω_j mit innerer Berandung Γ_{j-1} und äußerer Berandung Γ_j erhält man somit zwei Oberflächenintegrale und das Integral über Γ_{j-1} erhält ein negatives Vorzeichen. Auf Ω_i ergibt sich das zusätzliche Oberflächenintegral über ∂K_ϵ , welches ebenfalls ein negatives Vorzeichen besitzt. σ_p^+ bezeichnet die Leitfähigkeit außerhalb des Kopfes und kann deshalb gleich 0 gesetzt werden. Die Indizes $-$ und $+$ kennzeichnen Werte innerhalb bzw. außerhalb der jeweiligen Grenzschicht.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \int_{\Omega_j \setminus K_\epsilon(\mathbf{x})} [s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma_j \Delta \Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{y}) \sigma_j \Delta_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y})] d\Omega_y = \\ \sum_{j=1}^p \int_{\Gamma_j} [\sigma_j^- (\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^-(\mathbf{y}) \rangle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \Phi^-(\mathbf{y})) - \\ \sigma_j^+ (\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^+(\mathbf{y}) \rangle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \Phi^+(\mathbf{y}))] d\Gamma_y \\ - \int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} \sigma_i (\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi(\mathbf{y}) \rangle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \Phi(\mathbf{y})) d\Gamma_y \quad (5.5) \end{aligned}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung fällt der zweite Summand des Integranden wegen $\Delta_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ im Gebiet $\Omega \setminus K_\epsilon(\mathbf{x})$ direkt weg.

Nun wird das Oberflächenintegral über $\partial K_\epsilon(\mathbf{x})$ für ϵ gegen Null bestimmt. Die Stromdichte $\sigma_i < \mathbf{n}, \nabla \Phi \rangle$ ist auf ∂K_ϵ beschränkt und mit

$$\int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} d\Gamma_y = 4\pi\epsilon^2$$

strebt $\int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_y$ mit der Ordnung $O(\epsilon)$ gegen 0. Damit gilt

$$\int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} \sigma_i \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi(\mathbf{y}) \rangle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_y \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Da K_ϵ eine Kugel ist, ist die Normalenrichtung radial und unter Verwendung von Polarkoordinaten mit Zentrum in \mathbf{x} und $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \epsilon$ wird $\frac{\partial s}{\partial n}$ zu $\frac{\partial s}{\partial r}$. Man erhält $\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon^2}$. Damit läßt sich der zweite Teil berechnen:

$$\int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} \sigma_i \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_y = -\sigma_i \Phi(\mathbf{x}).$$

Es folgt

$$\int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} \sigma_i (\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi(\mathbf{y}) \rangle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \Phi(\mathbf{y})) d\Gamma_y \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \sigma_i \Phi(\mathbf{x})$$

Aus Gleichung (5) wird nach Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sigma_i \Phi(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \int_{\Omega_j} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma_j \Delta \Phi(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = \\ \sum_{j=1}^p \int_{\Gamma_j} [\sigma_j^- (< \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^-(\mathbf{y}) > s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_{\mathbf{y}} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \Phi^-(\mathbf{y})) \\ - \sigma_j^+ (< \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^+(\mathbf{y}) > s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_{\mathbf{y}} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \Phi^+(\mathbf{y}))] d\Gamma_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Da das Potential nach Voraussetzung (1) stetig ist, gilt $\Phi^- = \Phi^+$. Aus der Voraussetzung (2) und der Neumann-Randbedingung ($\sigma_p^+ = 0$) folgt

$$\sigma_j^- < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^-(\mathbf{y}) > = \sigma_j^+ < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^+(\mathbf{y}) > .$$

Wird nun noch auf der linken Seite der Gleichung die Differentialgleichung (4.1) eingesetzt, dann erhält man eine Integralgleichung für das Potential Φ für $\mathbf{x} \notin \Gamma_j$ ($\forall j = 1, \dots, p$)

$$\sigma_i \Phi(\mathbf{x}) = \Phi^\infty(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_j \quad (5.6)$$

mit

$$\Phi^\infty(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J_p(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}.$$

Um die Integralgleichung für das Potential auf den Schichtgrenzen Γ_i zu erhalten, läßt man \mathbf{x} gegen die Oberfläche Γ_i laufen und unter Verwendung von Satz 5.1.2 erhält man für $\mathbf{x} \in \Gamma_i$ die Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art für das Potential Φ unter Verwendung des Doppelschichtpotentials:

$$(\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi(\mathbf{x}) = 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_j \quad (5.7)$$

Die Randintegralgleichung (7) soll nun numerisch gelöst werden. Galerkin- und Kollokationsverfahren verwenden Ansatzräume mit Funktionen, für die sich Basisfunktionen mit kleinem Träger als vorteilhaft erwiesen haben. Solche Basisfunktionen heißen finite Elemente, die Kombination der Randintegralmethode mit der Diskretisierung durch finite Elemente bezeichnet man als Randelementmethode.

5.2 Das Einschichtmodell

Zunächst wird das Einschichtmodell betrachtet:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{2}{\sigma} \Phi^\infty(\mathbf{x}) - (K\Phi)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (5.8)$$

Da die Quellen im Innenraum von Ω liegen, ist es eine sinnvolle Annahme, $\Phi^\infty(\Gamma)$ als stetige, beschränkte und mehrfach differenzierbare Funktion auf dem Rand anzusehen. Für kompakte Gebiete gilt $C^1(\Gamma) \subset C_L(\Gamma) \subset C^\lambda(\Gamma)$ (Hackbusch [18], S.16/17). Die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung dieser Gleichung wird somit durch die folgenden Sätze gesichert.

Satz 5.2.1 (Eindeutigkeit) Sei $\Phi^\infty \in L^\infty(\Gamma)$, $\Gamma \in C_0^{1+\mu}$ für ein $\mu > 1/2$. Dann unterscheiden sich zwei Lösungen der Gleichung (8) nur um eine Konstante.

Beweis: (Hackbusch [18], Anmerkung S.327 und Satz 8.2.18)

Lemma 5.2.1 Um die Aufgabe (8) eindeutig zu machen, kann die Zusatzbedingung

$$\int_{\Gamma} \Phi d\Gamma = 0 \quad (5.9)$$

an das gesuchte Potential gestellt werden.

Beweis: (Hackbusch [18], Anmerkung S.327 und Zusatz 8.2.20)

Satz 5.2.2 (Lösbarkeit) Sei $\Phi^\infty \in C^\lambda(\Gamma)$, $\Gamma \in C_0^{1+\mu}$ für ein $0 \leq \mu \leq 1$. Dann hat die Gleichung (8) in Kombination mit (9) für das Innenraumproblem eine eindeutige Lösung $\Phi \in C(\Gamma)$, die zudem zu $C^\lambda(\Gamma)$ gehört.

Beweis: (Hackbusch [18] Anmerkung S.327 und Satz 8.2.21)

Da das Potential auf den Grenzflächen stetig ist, sei im folgenden $X = C(\Gamma)$ der zugrundeliegende Banachraum. Für die numerische Berechnung des Potentials Φ auf dem Rand Γ wird die Kollokationsmethode gewählt. Die Interpolation wird durch disjunkte Stützstellen

$$\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \subset \Gamma$$

festgelegt. $X_k \subset X$ sei der Unterraum, in dem die interpolierenden Funktionen (Ansatzfunktionen) liegen sollen. Für die numerische Realisierung ist die geeignete Repräsentierung von X_k durch eine Basis h_1, \dots, h_k mit

$$X_k = \text{span}\{h_1, \dots, h_k\}$$

von entscheidender Bedeutung. Die Interpolation einer Funktion $\Phi \in X$ durch $\Phi_k \in X_k$ mit

$$\Phi_k(\xi_m) = \Phi(\xi_m) \quad \forall 1 \leq m \leq k \quad (5.10)$$

existiert und ist eindeutig, wenn die Matrix $(h_n(\xi_m))_{m,n=1,\dots,k}$ regulär ist. Unter dieser Voraussetzung definiert die Interpolation die Projektion

$$\Pi_k : \Phi \in X \rightarrow \Phi_k \in X_k.$$

Indem nun die Kollokationspunkte in die auf X_k projizierte Integralgleichung eingesetzt werden, erhält man die Kollokationsgleichung

$$(-1)\Phi_k(\xi_m) = -\frac{2}{\sigma}\Phi^\infty(\xi_m) + (K\Phi_k)(\xi_m). \quad (5.8)$$

Die Integralgleichung wird also nur noch in den Kollokationspunkten erfüllt.

Die weitere numerische Aufgabe besteht in der Bestimmung der Koeffizienten a_j des in der Basis des Raums X_k dargestellten Potentials

$$\Phi_k = \sum_{n=1}^k a_n h_n.$$

Man erhält das Gleichungssystem $Aa = ((-1)C - D)a = b$ mit dem Vektor

$$b = (b_m)_{m=1, \dots, k} = \left(-\frac{2}{\sigma} \Phi^\infty(\xi_m) \right)_{m=1, \dots, k},$$

und den Matrizen $C = (c_{mn})_{m,n=1, \dots, k}$ und $D = (d_{mn})_{m,n=1, \dots, k}$ mit Einträgen

$$c_{mn} = h_n(\xi_m) \quad (5.11)$$

$$d_{mn} = (Kh_n)(\xi_m). \quad (5.12)$$

Bemerkung 5.2.1 Wenn die Basis (h_1, \dots, h_k) aus den Lagrange-Hutfunktionen gebildet wird (d.h. $h_n(\xi_m) = \delta_{mn}$, stückweise linear), so ist $C = I$, die Hauptarbeit steckt also in der Berechnung der k^2 Integrale

$$d_{mn} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \xi_m \rangle}{|\mathbf{y} - \xi_m|^3} h_n(\mathbf{y}) d\Gamma_y.$$

Zur numerischen Berechnung dieser Integrale wird die Oberfläche Γ in Dreiecke $\{\Delta_m\}_{m=1}^M$ zerlegt, deren Eckpunkte $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^N$ auf Γ liegen.

Im folgenden werden zwei verschiedene Kollokationsansätze verglichen. Beim Ansatz mit auf den Dreiecken konstanten Basisfunktionen werden die Massenzentren der Dreiecke als Kollokationspunkte gewählt. Beim linearen Ansatz sind die Kollokationspunkte die Eckpunkte der Dreiecke.

Diese beiden Verfahren werden nun ausführlich studiert.

5.2.1 Kollokation mit stückweise konstanter Interpolation

Die Kollokationspunkte sind hier die Massenzentren $\{\mathbf{c}_m\}_{m=1}^M$ der Dreiecke $\{\Delta_m\}_{m=1}^M$. Die konstanten Ansatzfunktionen haben die Gestalt

$$h_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & : \mathbf{x} \in \Delta_n \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.13)$$

Die Matrixeinträge d_{mn} lassen sich über den sogenannten Raumwinkel berechnen (Schaum [53]). Es sei dS ein Oberflächenelement. Man verbindet alle Punkte des Randes von dS mit dem Ursprung und erhält einen Kegel. Diesen Kegel schneidet man mit der Einheitskugel um den Ursprung $\mathbf{0}$. Der Raumwinkel, der durch dS in $\mathbf{0}$ gebildet wird (Bezeichnung $\Omega(dS; \mathbf{0})$), entspricht dann der Oberfläche jenes Teils der Einheitskugel um den Ursprung, der durch den Kegel abgeschnitten wird. Für die geschlossene Oberfläche Γ gilt

$$\Omega(\Gamma; \mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} d\Gamma_y = \begin{cases} 0 & : \mathbf{x} \text{ außerhalb } \Gamma \\ 2\pi & : \mathbf{x} \text{ auf } \Gamma \\ 4\pi & : \mathbf{x} \text{ innerhalb } \Gamma \end{cases} \quad (5.14)$$

Nach Van Oosterom [56] kann der Raumwinkel des Dreiecks Δ_{123} mit Eckpunkten $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ und \mathbf{y}_3 aus der Sicht des Ursprungs berechnet werden:

$$\begin{aligned} \Omega(\Delta_{123}; \mathbf{0}) &= \int_{\Delta_{123}} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &= 2 \arctan \frac{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_3 \rangle}{|\mathbf{y}_1| |\mathbf{y}_2| |\mathbf{y}_3| + |\mathbf{y}_1| \langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3 \rangle + |\mathbf{y}_3| \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle + |\mathbf{y}_2| \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_3 \rangle} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Unter diesen Voraussetzungen können nun die Matrixeinträge d_{mn} berechnet werden:

$$\begin{aligned} d_{mn} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \int_{\Delta_l} \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{c}_m, \mathbf{n}(\mathbf{y}) \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m|^3} h_n(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_n} \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{c}_m, \mathbf{n}(\mathbf{y}) \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \Omega(\Delta_n; \mathbf{c}_m) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Mit der Definition $B := (-1)D$ muß jetzt noch die Fixpunktgleichung $a = Ba + b$ gelöst werden, um die Potentialwerte in den Massenzentren zu erhalten.

5.2.2 Kollokation mit stückweise linearer Interpolation

Bei linearer Interpolation werden die Eckpunkte der Dreiecke als Kollokationspunkte gewählt. Δ_{kin} habe die Eckpunkte $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l$ und \mathbf{x}_n , die linearen Lagrange-Ansatzfunktionen haben die Gestalt

$$h_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l, \mathbf{x})}{\det(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l, \mathbf{x}_n)} & : \mathbf{x} \in \Delta_{kin} \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.17)$$

Die Matrixeinträge d_{mn} der in Dreiecke zerlegten Oberfläche lassen sich analytisch berechnen (de Munck, [12]). Die Vorgehensweise soll nun erläutert werden.

Sei zunächst $n \neq m$. Die Lagrange-Hutfunktion h_n ist nur auf den Dreiecken von Null verschieden, die \mathbf{x}_n als Eckpunkt besitzen. $\frac{\mathbf{n}}{A_{kin}}$ sei der normierte Normalenvektor auf dem Dreieck Δ_{kin} , welches den Flächeninhalt $A_{kin}/2$ habe. Es ergibt sich

$$d_{mn} = -\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{\Delta_{kin}} \frac{1}{A_{kin}} \int_{\Delta_{kin}} \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}_m, \mathbf{n} \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_m|^3} h_n(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \right). \quad (5.18)$$

Um das Schriftbild zu vereinfachen, wird der durch Dreieck Δ_{kin} und den Betrachtungspunkt \mathbf{x}_m gebildete Kegel in den Ursprung verschoben. Die Ecken des verschobenen Dreiecks werden mit $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ und \mathbf{y}_3 bezeichnet, wobei der Umlaufsinn von $\mathbf{y}_1 \rightarrow \mathbf{y}_2 \rightarrow \mathbf{y}_3$ um den Normalenvektor \mathbf{n} die „Rechte-Hand-Regel“ erfülle. \mathbf{x}_n wird in \mathbf{y}_i überführt, wobei i je nach Wahl den Wert 1, 2 oder 3 annehmen kann:

$$d_{mn} = -\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{\Delta_{123}} \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle}{|\mathbf{y}|^3} H_i(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \right), \quad (5.19)$$

mit

$$H_i(\mathbf{y}) = \frac{\det(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_{i+1})}{\det(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.20)$$

$\mathbf{y}_4 \equiv \mathbf{y}_1$ und $\mathbf{y}_0 \equiv \mathbf{y}_3$.

Das Skalarprodukt $\langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle$ wird geometrisch als Projektion von \mathbf{y} auf \mathbf{n} gedeutet. Wie man sich leicht veranschaulicht, ist dieser Wert für $\mathbf{y} \in \Delta_{123}$ konstant

$$d := \langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle \quad (5.21)$$

und man erhält

$$d_{mn} = -\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{\Delta_{123}} \frac{d}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{1}{|\mathbf{y}|^3} H_i(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \right). \quad (5.22)$$

Mit der Definition

$$\mathbf{z}_i := \mathbf{y}_{i+1} \times \mathbf{y}_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.23)$$

($\mathbf{y}_4 \equiv \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0 \equiv \mathbf{y}_3$) schreibt sich der Normalenvektor \mathbf{n} ($|\mathbf{n}| = A_{klm}$) als Summe der \mathbf{z}_i :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \mathbf{z}_k &\stackrel{(23)}{=} \mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_3 \times \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2 \\ &= (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \times \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_2 \\ &= (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \times \mathbf{y}_3 - (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \times \mathbf{y}_2 \\ &= (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \times (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2) \\ &= (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2) \times (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \\ &= \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Jedes $\mathbf{y} \in \Delta_{123}$ läßt sich darstellen als

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y})(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y})(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1), \quad (5.25)$$

wobei $b(\mathbf{y}), c(\mathbf{y}) \in [0, 1]$ und $b(\mathbf{y}) + c(\mathbf{y}) \leq 1$.

Mit der Berechnung der Determinante dreier Vektoren

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \rangle,$$

erhält man somit

$$\begin{aligned} d &\stackrel{(21)}{=} \langle \mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle \\ &\stackrel{(24)+(25)}{=} \left\langle \sum_{k=1}^3 \mathbf{z}_k, \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y})(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y})(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Def.}(23)}{=} \langle \mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_3 \times \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y})(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y})(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - b(\mathbf{y}) - c(\mathbf{y})) \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_3 \rangle + b(\mathbf{y}) \langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3 \times \mathbf{y}_1 \rangle + c(\mathbf{y}) \langle \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2 \rangle \\
 &= (1 - b(\mathbf{y}) - c(\mathbf{y})) \det(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) + b(\mathbf{y}) \det(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y}) \det(\mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \\
 (5.20) \quad &= \det(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3).
 \end{aligned}
 \tag{5.26}$$

Wie

Man findet eine einfachere Schreibweise für H_i

$$\begin{aligned}
 (5.21) \quad H_i(\mathbf{y}) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\det(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_{i+1})}{\det(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)} \\
 &= \frac{1}{d} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}_{i+1} \times \mathbf{y}_{i-1} \rangle \stackrel{\text{Def. (23)}}{=} \frac{1}{d} \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_i \rangle,
 \end{aligned}
 \tag{5.27}$$

(5.22)

und wenn dieses Ergebnis in (22) eingesetzt wird,

$$(5.23) \quad d_{mn} = -\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{\Delta_{123}} \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_i \rangle}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \right).$$

er \mathbf{z}_i :

Mit der Definition

$$\Omega_i := \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_i \rangle}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}}
 \tag{5.28}$$

erhält man schließlich

$$d_{mn} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\Delta_{123}} \Omega_i.
 \tag{5.29}$$

(5.24)

Es soll nun eine Formel für die Berechnung der Ω_i hergeleitet werden. Über das Biot-Savartsche Gesetz der Magnetostatik kann die im Ursprung gemessene durch eine konstante Stromdipolverteilung auf dem Dreieck Δ_{123} erzeugte magnetische Induktion berechnet werden. Folgende Formel entspricht bis auf eine Konstante diesem B-Feld:

(5.25)

$$\tilde{\mathbf{B}} = \int_{\Delta_{123}} \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{y}|} \times d\Gamma_{\mathbf{y}}
 \tag{5.30}$$

Hier bezeichnet $d\Gamma_{\mathbf{y}} = \frac{n}{A_{123}} d\Gamma_{\mathbf{y}}$.

Diese Formel wird nun auf zwei verschiedenen Wegen ausgewertet, die beide $\tilde{\mathbf{B}}$ als Linearkombination von \mathbf{y}_1 , \mathbf{y}_2 und \mathbf{y}_3 darstellen. Der Koeffizientenvergleich wird dann eine Berechnungsmöglichkeit für die gesuchten Ω_i liefern.

Auf dem ersten Weg wertet man den Gradienten aus. Dazu wird das Zwischenresultat

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{z}_k, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}_k &\stackrel{(25)}{=} \langle \mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y})(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y})(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1) \rangle \mathbf{y}_1 \\
 &\quad + \langle \mathbf{y}_3 \times \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y})(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y})(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1) \rangle \mathbf{y}_2 \\
 &\quad + \langle \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y})(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y})(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1) \rangle \mathbf{y}_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - b(\mathbf{y}) - c(\mathbf{y})) \det(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y}) \det(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1) \mathbf{y}_2 \\
&\quad + c(\mathbf{y}) \det(\mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \mathbf{y}_3 \\
&\stackrel{(26)}{=} d((1 - b(\mathbf{y}) - c(\mathbf{y})) \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y}) \mathbf{y}_2 + c(\mathbf{y}) \mathbf{y}_3) \\
&\stackrel{(25)}{=} d\mathbf{y}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

benötigt. Der Vektor \mathbf{n} ist auf einem Dreieck konstant und man erhält

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{B}} &= \frac{\mathbf{n}}{d} \times \left(-\frac{d}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{y}|} d\Gamma_{\mathbf{y}} \right) = \frac{\mathbf{n}}{d} \times \left(\frac{d}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \right) \\
&= \frac{\mathbf{n}}{d} \times \left(\frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\mathbf{y}d}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \right) \stackrel{(31)}{=} \frac{\mathbf{n}}{d} \times \left(\frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \sum_{k=1}^3 \frac{\langle \mathbf{z}_k, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}_k}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \right) \\
&= \frac{\mathbf{n}}{d} \times \left[\sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\langle \mathbf{z}_k, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \right) \mathbf{y}_k \right] \stackrel{\text{Def.}(28)}{=} \frac{\mathbf{n}}{d} \times \sum_{k=1}^3 \Omega_k \mathbf{y}_k
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Die zweite Möglichkeit der Auswertung von (30) benutzt eine Folgerung des Stokesschen Satzes:

Satz 5.2.3 (Satz von Stokes für skalare Felder) *Es sei Γ ein ebenes Gebiet mit der Randkurve $\partial(\Gamma)$, die so orientiert sei, daß Γ zur Linken liege, $\varphi \in C^1(\Gamma)$ sei ein stetig differenzierbares skalares Feld, dann gilt:*

$$\int_{\Gamma} \nabla_{\mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) \times d\Gamma_{\mathbf{y}} = - \oint_{\partial(\Gamma)} \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Beweis: Bronstein [6] S. 580, Nolting [36] S. 30

Die Anwendung dieses Satzes auf die magnetische Induktion (30) ergibt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{B}} &= - \oint_{\partial(\Delta_{123})} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \\
&= - \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{y}_i \rightarrow \mathbf{y}_{i+1}} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \\
&= - \sum_{i=1}^3 \int_0^1 \frac{1}{|\mathbf{y}_i + s(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i)|} (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) ds \\
&= \sum_{i=1}^3 (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i+1}) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{y}_i + s(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i), \mathbf{y}_i + s(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) \rangle}} ds \\
&= \sum_{i=1}^3 (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i+1}) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s^2 |\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i|^2 + 2s \langle \mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i \rangle + |\mathbf{y}_i|^2}} ds.
\end{aligned}$$

Mit $X = as^2 + bs + c$ handelt es sich um ein Integral der Form $\int ds/\sqrt{X}$ mit $a > 0$ und $\Delta = 4ac - b^2 = 0$. Es ergibt sich $\frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2as + b)$ (Bronstein [6], S. 49) und nach weiteren Umformungen erhält man für die magnetische Induktion (30)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}} &= \sum_{i=1}^3 (\gamma_{i-1}^0 - \gamma_i^0) \mathbf{y}_i \\ \gamma_i^0 &= \frac{-1}{|\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i|} \ln \left(\frac{|\mathbf{y}_i| |\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i| + \langle \mathbf{y}_i, (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) \rangle}{|\mathbf{y}_{i+1}| (|\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i| + \langle \mathbf{y}_{i+1}, (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) \rangle)} \right). \end{aligned} \quad (5.33)$$

γ_i^0 kann physikalisch als Potential im Ursprung interpretiert werden, welches durch eine homogene Ladungsverteilung auf dem Liniensegment $\mathbf{y}_i \rightarrow \mathbf{y}_{i+1}$ erzeugt wurde.

Aus (30) und den beiden Auswertungen (32) und (33) erhält man folgende Gleichung:

$$\sum_{k=1}^3 (\gamma_{k-1}^0 - \gamma_k^0) \mathbf{y}_k = \frac{\mathbf{n}}{d} \times \sum_{k=1}^3 \Omega_k \mathbf{y}_k \quad (5.34)$$

Der Koeffizientenvergleich der Vektoren \mathbf{y}_k liefert schließlich drei Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten Ω_k . Man kann zeigen, daß aufgrund von $\sum_{k=1}^3 (\gamma_{k-1}^0 - \gamma_k^0) = 0$ das erhaltene Gleichungssystem singulär ist. Zur Bestimmung der Ω_k wird somit eine weitere Gleichung benötigt.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \Omega_i &\stackrel{(28)}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\langle \mathbf{z}_i, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &= \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{z}_i, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &\stackrel{(24)}{=} \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &= \int_{\Delta_{123}} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &\stackrel{(15)}{=} \Omega(\Delta_{123}; \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Das Gleichungssystem ist nun regulär und kann zur Bestimmung der Ω_i gelöst werden:

$$\Omega_i = \frac{1}{A_{123}^2} \left(\Omega(\Delta_{123}; \mathbf{0}) \langle \mathbf{z}_i, \mathbf{n} \rangle + d(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_{i-1}) \cdot \sum_{k=1}^3 \gamma_k^0 (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k+1}) \right) \quad (5.36)$$

(de Munck [12], S. 988)

Nun müssen noch die verbleibenden Hauptdiagonalelemente der Matrix A bestimmt werden. Die Summe der Hutfunktionen ist für alle \mathbf{y}

$$\sum_{n=1}^N h_n(\mathbf{y}) = 1. \quad (5.37)$$

Die Matrix A besitzt einen Eigenvektor $(1, \dots, 1)^t$ zum zugehörigen Eigenwert 0, denn

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N A_{mn} &= -1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \xi_{\mathbf{m}} \rangle}{|\mathbf{y} - \xi_{\mathbf{m}}|^3} \sum_{n=1}^N h_n(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \\
 &= -1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x}_{\mathbf{m}} \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_{\mathbf{m}}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \\
 &\stackrel{(15)}{=} -1 + \frac{1}{2\pi} \Omega(\Gamma; \mathbf{x}_{\mathbf{m}}) \\
 &\stackrel{(14)}{=} 0.
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Die Hauptdiagonalelemente können also durch die negative Summe aller weiteren Elemente einer Zeile berechnet werden:

$$A_{mm} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N A_{mn} \tag{5.39}$$

5.3 p -Schichtmodell

Zur numerischen Berechnung des Potentials Φ werden p Grenzflächen in Dreiecke zerlegt. Die Eckpunkte der Dreiecke auf der l -ten Grenzfläche ($1 \leq l \leq p$) seien mit $\mathbf{x}_{\mathbf{m}}^l$ bezeichnet ($1 \leq m \leq N(l)$). $\mathbf{c}_{\mathbf{m}}^l$ sei das Massenzentrum des Dreiecks $\Delta_{\mathbf{m}}^l$ der l -ten Schicht ($1 \leq m \leq M(l)$). Nach der Wahl der Kollokationspunkte $\xi_{\mathbf{m}}^l$ ($1 \leq m \leq k(l)$) und der Basis h_n^l ($1 \leq n \leq k(l)$) besteht die numerische Aufgabe in der Bestimmung der Koeffizienten α_n^l der Darstellung

$$\Phi_k^p = \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{k(l)} \alpha_n^l h_n^l.$$

Die Kollokationsgleichung für das p -Schichtmodell lautet ($1 \leq i \leq p; 1 \leq m \leq k(i)$)

$$\begin{aligned}
 &(\sigma_i^- + \sigma_i^+) \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{k(l)} \alpha_n^l h_n^l(\xi_{\mathbf{m}}^i) \\
 &= 2\Phi^\infty(\xi_{\mathbf{m}}^i) - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\xi_{\mathbf{m}}^i, \mathbf{y}) \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{k(l)} \alpha_n^l h_n^l(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}}.
 \end{aligned}$$

5.3.1 Kollokation mit stückweise konstanter Interpolation

Beim Ansatz mit konstanten Basisfunktionen

$$h_n^l(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & : \mathbf{x} \in \Delta_n^l \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \tag{5.40}$$

wählt man als Kollokationspunkte wieder die Massenzentren der Dreiecke. Es ergibt sich die Kollokationsgleichung ($1 \leq i \leq p; 1 \leq m \leq M(i)$)

$$\alpha_m^i = \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Phi^\infty(\mathbf{c}_m^i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \int_{\Gamma_j} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i|^3} \sum_{n=1}^{M(l)} \alpha_n^j h_n^j(\mathbf{y}) d\Gamma_y.$$

Nach der Zerlegung der Grenzschichten in Dreiecke erhält man daraus

$$\begin{aligned} \alpha_m^i &= \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Phi^\infty(\mathbf{c}_m^i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \sum_{r=1}^{M(j)} \int_{\Delta_r^j} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i|^3} \sum_{n=1}^{M(l)} \alpha_n^j h_n^j(\mathbf{y}) d\Gamma_y \\ (5.38) \quad &= \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Phi^\infty(\mathbf{c}_m^i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \sum_{r=1}^{M(j)} \int_{\Delta_r^j} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i|^3} d\Gamma_y \alpha_r^j \end{aligned}$$

Elemente

(5.39)

$$\begin{aligned} &\stackrel{(15)}{=} \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Phi^\infty(\mathbf{c}_m^i) + \sum_{j=1}^p \sum_{r=1}^{M(j)} \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Omega(\Delta_r^j; \mathbf{c}_m^i) \alpha_r^j \\ &=: b_m^i + \sum_{j=1}^p \sum_{r=1}^{M(j)} B_{mr}^{ij} \alpha_r^j. \end{aligned}$$

Durch das Lösen dieser Fixpunktgleichung $a = Ba + b$ werden die Potentialwerte in den Massenzentren bestimmt.

zerlegt.
zeichnet
ht ($1 \leq$
Basis h_n^l
nten α_n^l

5.3.2 Kollokation mit stückweise linearer Interpolation

Kollokationspunkte sind die Eckpunkte der Dreiecke, als Basiselemente werden die Lagrange-Hutfunktionen h_n^l gewählt ($h_n^l(\mathbf{x}_m^i) = \delta_{li} \delta_{mn}$, ansonsten linear). Damit erhält man die Kollokationsgleichung ($1 \leq i \leq p; 1 \leq m \leq N(i)$)

$$\begin{aligned} &(\sigma_i^- + \sigma_i^+) \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{N(l)} \alpha_n^l h_n^l(\mathbf{x}_m^i) \\ &= 2\Phi^\infty(\mathbf{x}_m^i) - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}_m^i, \mathbf{y}) \sum_{n=1}^{N(j)} \alpha_n^j h_n^j(\mathbf{y}) d\Gamma_y, \end{aligned}$$

welche als Gleichungssystem

$$\sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{N(l)} \{(\sigma_i^- + \sigma_i^+) \delta_{il} \delta_{mn} + (\sigma_l^- - \sigma_l^+) d_{mn}^{il}\} \alpha_n^l = 2\Phi^\infty(\mathbf{x}_m^i),$$

d.h. $Aa = b$ geschrieben werden kann. Wie für das Einschichtmodell läßt sich

$$d_{mn}^{il} = \int_{\Gamma_l} k(\mathbf{x}_m^i, \mathbf{y}) h_n^l(\mathbf{y}) d\Gamma_y$$

für in Dreiecke zerlegte Grenzschichten und für $i \neq l$ oder $m \neq n$ analytisch berechnen. Mit $\sigma_i^+ = \sigma_{i+1}^-$, $\sigma_p^+ = 0$,

$$\sum_{n=1}^{N(l)} h_n^l(\mathbf{y}) = 1 \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma_l \quad (5.41)$$

und der Berechnung des Raumwinkels

$$\Omega(\Gamma_l; \mathbf{x}_m^i) = \int_{\Gamma_l} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i|^3} d\Gamma_y = \begin{cases} 0 & : l < i \\ 2\pi & : l = i \\ 4\pi & : l > i \end{cases} \quad (5.42)$$

ergibt sich wie beim Einschichtmodell für die Matrix A ein Eigenwert 0 mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^t$:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{N(l)} \left\{ (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \delta_{il} \delta_{mn} - \frac{(\sigma_l^- - \sigma_l^+)}{2\pi} \int_{\Gamma_l} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i|^3} h_n^l(\mathbf{y}) d\Gamma_y \right\} \\ &= (\sigma_i^- + \sigma_i^+) - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^p (\sigma_l^- - \sigma_l^+) \int_{\Gamma_l} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i|^3} \sum_{n=1}^{N(l)} h_n^l(\mathbf{y}) d\Gamma_y \\ (41) \quad & \stackrel{=}{=} (\sigma_i^- + \sigma_i^+) - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^p (\sigma_l^- - \sigma_l^+) \int_{\Gamma_l} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i|^3} d\Gamma_y \\ (42) \quad & \stackrel{=}{=} (\sigma_i^- + \sigma_i^+) - (\sigma_i^- - \sigma_i^+) - 2 \sum_{l=i+1}^p (\sigma_l^- - \sigma_l^+) \\ &= 2\sigma_i^+ - 2(\sigma_{i+1}^- - \sigma_p^+) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Durch das Lösen dieses Gleichungssystems erhält man die Potentialwerte in den Dreieckseckpunkten.

5.4 Quelleinleitung im BE-Modell

Wie in Kapitel 3.3 erläutert stellt der physikalische Stromdipol (3.5) (Abbildung 3.2) ein physiologisch sinnvolles Quellmodell dar. Die Grenzflächen, auf denen der Primärstromanteil Φ^∞ ausgewertet wird, liegen im Vergleich zur Ausdehnung der zylinderförmigen Quelle in der Fernzone, so daß die Verwendung des Stromdipolmodells (3.6) physikalisch und numerisch zu vertreten ist. Man kann die im weiteren vorgestellte Methode zur Quelleinleitung auch als simple Quadraturformel für das Quellmodell des physikalischen Stromdipols ansehen. Sei \mathbf{x}_0 der Ort der Quelleinspeisung durch den Stromdipol. Man definiere:

$$\Phi_n(\mathbf{x}) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \nabla \cdot \{M\delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)\} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\Omega_y.$$

Hier seien die Funktionen $\delta_n \in C_0^\infty(\Omega)$, es gelte

$$Tr(\delta_n(\mathbf{x})) = \{|\mathbf{x}| \leq \frac{1}{n}\}$$

und $\int_{\Omega} \delta_n d\Omega = 1 \forall n$. Die Funktionenfolge $\{\delta_n\}_n$ konvergiert gegen die Dirac-Delta-Distribution (Jantscher [26]).

Nach Bronstein ([6], S. 577) gilt für ein skalares Feld δ_n und ein konstantes Vektorfeld \mathbf{M}

$$\nabla \cdot (\mathbf{M} \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)) = \mathbf{M} \nabla \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0).$$

Mit partieller Integration (1. Greensche Identität) (wieder wird eine Kugel $K_\epsilon(\mathbf{x})$ um die Singularität herausgenommen, deren Integral mit ϵ gegen 0 geht) erhält man unter Vernachlässigung der Randterme ($\delta_n|_{\Gamma_\epsilon} = 0$ für genügend große n)

$$\begin{aligned} \Phi_n(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\Omega_y \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \underbrace{\int_{\Omega} \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) d\Omega_y}_{=1} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \left\{ \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} - \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \right\} d\Omega_y \end{aligned}$$

Der Integrand des zweiten Summanden besitzt den Träger $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| < \frac{1}{n}$. Es ist

$$\sup_y \left\{ \left| \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} - \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \right| \right\} < \epsilon(n), \quad \forall y \text{ mit } |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| < \frac{1}{n}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \left\{ \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} - \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \right\} d\Omega_y \\ &< \frac{\epsilon(n)}{4\pi} \underbrace{\int_{\Omega} \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) d\Omega_y}_{=1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Wird der Primärstromanteil Φ^∞ mit $\mathbf{j}_p = \mathbf{M} \delta_{\mathbf{x}_0}$ ausgewertet, so erhält man

$$\Phi^\infty(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}. \quad (5.44)$$

5.5 Lösen der entstehenden Gleichungssysteme

Wie in (38) für das Einschichtmodell und in (43) für das p -Schichtmodell gezeigt wurde, ist das aus dem linearen Ansatz hervorgegangene Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ singulär, da die Matrix \mathbf{A} einen Eigenwert 0 mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{e} := (1, \dots, 1)^{tr}$ besitzt. Die Matrix $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ der Fixpunktgleichung $\mathbf{a} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{a} + \mathbf{b}$ besitzt somit einen Eigenwert $\lambda = 1$ mit zugehörigem Eigenvektor \mathbf{e} .

Das gesuchte Potential ist nach Satz 5.2.1 nur bis auf eine Konstante genau bestimmt. Es ist somit die Einführung der Zusatzbedingung möglich, daß die Summe über alle zu bestimmenden Potentialwerte an den Kollokationspunkten 0 ergibt (siehe Lemma 5.2.1) Sei dazu $\mathbf{p} := (1/N, \dots, 1/N)^{tr}$. \mathbf{p} besitzt die Eigenschaften $\mathbf{p}^{tr}\mathbf{a} = 0$ und $\mathbf{p}^{tr}\mathbf{e} = 1$. Es ergibt sich die Fixpunktgleichung $\mathbf{a} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{e}\mathbf{p}^{tr})\mathbf{a} + \mathbf{b}$ mit der Iterationsmatrix $\mathbf{W} = (\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{e}\mathbf{p}^{tr})$, die wieder den Eigenwert 0 zum Eigenvektor \mathbf{e}

besitzt. Das beschriebene Verfahren wird Wieland-Deflation genannt.

Das entstehende reguläre Gleichungssystem $(A + \mathbf{e}\mathbf{p}^{tr})\mathbf{a} = \mathbf{b}$ kann über direkte Verfahren (z.B. LR-Zerlegung mit Pivotalisierung, QR-Zerlegung) gelöst werden. Im Hinblick auf die Erstellung der Einflußmatrix (Kapitel 6.1) bietet sich ein direkter Löser sogar an, da die Matrix nur von der Geometrie abhängt und eine einmal berechnete Zerlegung für verschiedene Quelleinleitungen (rechte Seite \mathbf{b}) immer wieder verwendet werden kann. Für die Kollokation in den Massenzentren der Dreiecke mit konstanten Ansatzfunktionen wurde die Beschaffenheit der Matrix B hinsichtlich iterativer Löser genauer untersucht.

Lemma 5.5.1 *B hat den Eigenwert $\lambda = 1$ der Vielfachheit 1 mit zugehörigem Eigenvektor \mathbf{e} .*

Beweis: Lynn und Timlake [28]

Satz 5.5.1 *Sei*

$$\lambda_j = \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_j^- + \sigma_j^+} \quad \forall j = 1, \dots, p.$$

λ_j ist Eigenwert der Matrix B ($\forall j = 1, \dots, p$).

Beweis: Lynn und Timlake [28]

Aus $\sigma_p^+ = 0$ folgt somit $\lambda_p = 1$. Dieser Eigenwert kann wie bereits beschrieben über eine Wieland-Deflation der Geometriematrix ($W = (B - \mathbf{e}\mathbf{p}^{tr})$) vermieden werden. Aus praktischen Erfahrungen geht man davon aus, daß alle weiteren Eigenwerte $\ll 1$ sind (Lynn und Timlake [28]) und somit Konvergenz erzielt wird (Spektralradius der Iterationsmatrix W kleiner als 1, Werner [59], S. 123). Der Eigenwert λ_m wird ebenfalls sehr nahe bei 1 liegen, wenn Ω_{m+1} die Knochenschicht mit im Vergleich zu den anderen Schichten geringer Leitfähigkeit σ_m^+ bezeichne. Hier bietet sich eine Multideflation der Iterationsmatrix an (Lynn und Timlake [28]). Diese Technik kann ebenfalls mit klassischen Iterationsverfahren wie Jakobi, Gauss-Seidel und SOR gekoppelt werden.

Am INSERM U280 de Lyon wurden verschiedene iterative Verfahren für die Kollokation im Massenzentrum getestet, unter anderem die klassischen Methoden wie Gauss-Seidel, Jakobi und SOR. Die Verfahren wurden mit einfacher Deflation und auch mit Multideflation kombiniert. Die Anwendung des Gauss-Seidel Verfahrens auf die durch einfache Deflation bestimmte Iterationsmatrix erzielte die besten Konvergenzergebnisse.

Für die Kollokation in den Dreieckseckpunkten mit stückweise linearer Interpolation, analytischer Berechnung der auftretenden Integrale und einfacher Deflation der Geometriematrix wurde ebenfalls eine gute Konvergenz mit dem Gauss-Seidel Verfahren erzielt. Im Hinblick auf das Erstellen der Einflußmatrix sollten aber direkte Verfahren vorgezogen werden.

5.6 Die Isolierung der schlecht leitenden Knochenschicht

Sei im folgenden die Knochenschicht die $(m + 1)$ -te Schicht Ω_{m+1} im p -Schichtmodell mit innerer Grenzfläche Γ_m und äußerer Grenzfläche Γ_{m+1} . Die Leitfähigkeit der Knochenschicht $\sigma_m^+ = \sigma_{m+1}^-$ beträgt nur ca. ein hunderstel der Leitfähigkeiten der anderen

Schichten (Tabelle 3.1).

Der Fehler, der durch die numerische Berechnung des Volumenterms gemacht wird, wird durch die geringe Leitfähigkeit des Knochens bei direktem Lösen der p -Schichtintegralgleichung

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi(\mathbf{x}) \\
 &= 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_y
 \end{aligned}$$

verstärkt (Meijs et al. [32]). Diese Fehlerverstärkung kann durch die Isolierung der Knochenschicht verhindert werden (Meijs et al. [33]). Dazu wird das Potential Φ als Summe zweier Komponenten geschrieben:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_i^0(\mathbf{x}) + \Phi_i(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i \tag{5.45}$$

Φ_i^0 ist das sogenannte isolierte Potential unter der Annahme, daß die Leitfähigkeit der Knochenschicht null ist ($\sigma_m^+ = \sigma_{m+1}^- = 0$). Die Annahme führt dazu, daß der Volumenstromanteil auf den Schichten außerhalb der Knochenschicht verschwindet, da die Quelleinleitung auf die Gehirnschicht beschränkt ist, so daß $\Phi_i^0(\mathbf{x}) = 0$ ($(m+1) \leq i \leq p$) gilt. Die Gleichung für das isolierte Potential lautet damit

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_i \Phi_i^0(\mathbf{x}) &= 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m \Delta\sigma_j \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_j^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y \tag{5.46} \\
 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m-1} \Delta\sigma_j \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_j^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y &= \\
 -\bar{\sigma}_i \Phi_i^0(\mathbf{x}) + 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - \sigma_m^- \int_{\Gamma_m} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_m^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y &
 \end{aligned}$$

mit $\bar{\sigma}_i = (\sigma_i^- + \sigma_i^+)$, $1 \leq i < m$, $\Delta\sigma_j = (\sigma_j^- - \sigma_j^+)$, $1 \leq j < m$ und $\bar{\sigma}_m = \sigma_m^-$, $\Delta\sigma_m = \sigma_m^-$. Das Restpotential Φ_i berechnet sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi_i(\mathbf{x}) = 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi_i^0(\mathbf{x}) \\
 & - \left\{ \sum_{j=1}^m (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_j^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y + \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_j(\mathbf{y}) d\Gamma_y \right\}
 \end{aligned}$$

Wird nun Gleichung (46) in diese Gleichung eingesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi_i(\mathbf{x}) = 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi_i^0(\mathbf{x}) + \bar{\sigma}_i \Phi_i^0(\mathbf{x}) - 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) \\
 & + \sigma_m^- \int_{\Gamma_m} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_m^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y - (\sigma_m^- - \sigma_m^+) \int_{\Gamma_m} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_m^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y \\
 & - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_j(\mathbf{y}) d\Gamma_y.
 \end{aligned}$$

Die Gleichung für das Restpotential lautet somit

$$(\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi_i(\mathbf{x}) = \Phi_i^\infty(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_j(\mathbf{y}) d\Gamma_y, \tag{5.47}$$

wobei sich Φ_i^∞ aus dem isolierten Potential ergibt:

$$\Phi_i^\infty(\mathbf{x}) = \sigma_m^+ \left\{ \int_{\Gamma_m} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_m^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y - \delta_{im} \Phi_m^0(\mathbf{x}) \right\} \quad (5.48)$$

Beide Gleichungen (46) und (47) sind Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art. Zunächst wird die Gleichung für das isolierte Potential (46) über die beschriebenen numerischen Verfahren gelöst. Damit kann Φ_i^∞ für die Gleichung des Restpotentials berechnet werden (nach (48)) und durch Lösen von (47) werden die Potentiale auf den äußeren Schichten bestimmt.

Durch diese Vorgehensweise kann der Fehler verringert werden. Zunächst enthält der Volumenleiter zur Berechnung des isolierten Potentials keine Schicht mehr mit geringer Leitfähigkeit.

Das Restpotential zeigt ebenfalls keine Fehlerverstärkung, denn der Quellterm Φ_i^∞ ist proportional zu σ_m^+ und das Restpotential auf den inneren Schichten Φ_i , $1 \leq i < m$ ist gering (einige Prozent des Gesamtpotentials Φ) und fällt mit σ_m^+ . Da also sowohl Quellterm als auch Volumenterm des Restpotentials mit σ_m^+ fallen, wird eine Fehlerverstärkung verhindert.

5.7 Konvergenz- und Fehlerbetrachtungen

Es sollen nun einige Aussagen zur Konvergenz der numerischen Methoden gemacht werden (Hackbusch [18], Kapitel 9.1.4 und die Kapitel 4.4 und 4.6). Die grundlegenden Definitionen der Konvergenz, Stabilität und Konsistenz können ebenfalls diesem Buch entnommen werden.

Satz 5.7.1 *X sei ein Banachraum, die Projektionsfolge $\{\Pi_n\}$ mit $\Pi_n \in L(X, X)$ sei konvergent, d.h.*

$$\Pi_n x \rightarrow x \quad \text{in } X \quad \forall x \in X$$

und K sei kompakt $K \in K(X, X)$. Dann konvergieren die Operatoren $K_n = \Pi_n K$ der semidiskreten Projektionsgleichung

$$\lambda f_n = g_n + K_n f_n \quad g_n := \Pi_n g \quad (5.49)$$

in der Operatornorm gegen K:

$$\|K_n - K\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

Wenn λ ein regulärer Wert ist, d.h. $(\lambda I - K)^{-1} \in L(X, X)$, ist die Diskretisierung (49) durch Projektion konvergent, stabil und konsistent. Die Projektionslösungen f_n erfüllen

$$f_n \rightarrow f = (\lambda I - K)^{-1} g \quad \text{in } X \quad (5.50)$$

Beweis: Hackbusch [18], Satz 4.3.11

Zur Beurteilung der Brauchbarkeit der numerischen Methode hat man außer der Konvergenz $f_n \rightarrow f$ auch die Konvergenzgeschwindigkeit in Betracht zu ziehen. Man versucht also, eine quantitative Abschätzung des Fehlers $(f_n - f)$ für einen festen Diskretisierungsparameter n zu erhalten. Folgender Satz gibt Aufschluß über die Ordnung der Konvergenz:

Satz 5.7.2 Sei $X = C(D)$. Die Integralgleichung $\lambda f = g + Kf$ habe eine Lösung $f \in C^\tau(D)$ mit $\tau > 0$. Die Diskretisierung (49) sei stabil und die Projektion Π_n erfülle

$$(5.48) \quad \|f - \Pi_n f\|_\infty \leq cn^{-\tau} \|f\|_{C^\tau(D)} \quad (5.51)$$

Dann ist die Projektionsmethode konvergent von der Ordnung τ :

$$\|f - f_n\|_\infty = O(n^{-\tau}) \quad (5.52)$$

Beweis: Hackbusch [18], Satz 4.3.15

Bezüglich der Konvergenzordnung werden somit Aussagen über die Glattheit der Lösung f von $\lambda f = g + Kf$ benötigt.

Für das Einschichtmodell liefert Satz 5.2.2 die Konvergenzordnung $O(n^{-\lambda})$ bezüglich der Maximumnorm.

Folgende Sätze sind nach Bemerkungen im Kapitel 9.1.4 [18] und nach Satz 4.4.7 [18] ebenfalls auf höherdimensionale Gebiete übertragbar und sollen zitiert werden:

Satz 5.7.3 (Fehlerordnung) f_n sei die Lösung der Kollokationsmethode mit stückweise linearer Interpolation in $\Omega = I = [a, b]$ und äquidistanten Stützstellen $\xi_m := a + (b-a)(m-1)/(n-1)$, $1 \leq m \leq n$. λ sei regulärer Wert des kompakten Operators K . Die Lösung f von $\lambda f = g + Kf$ gehöre zu $C_L^1(\Omega)$. Für hinreichend großes n_0 existieren die Lösungen f_n ($n \geq n_0$) und konvergieren von zweiter Ordnung in der Maximumsnorm, d.h.

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \text{const} \cdot h_n^2.$$

Beweis: Hackbusch [18], Satz 4.4.7

Für die stückweise konstanten Ansatzfunktionen kann für eindimensionale Gebiete die Konvergenz erster Ordnung in der Maximumsnorm nachgewiesen werden (Bemerkung 4.4.8 [18]).

Bessere Abschätzungen sind in schwächeren Normen, durch stärkere Regularitätsforderungen an die Lösung f oder speziell in den Kollokationspunkten möglich.

Nach Definition der Projektion Π_n beim Kollokationsverfahren gilt für alle Kollokationspunkte ξ $f(\xi) = (\Pi_n f)(\xi)$. Es entfällt in diesen Punkten der Fehler $(f - \Pi_n f)(\xi)$, so daß bleibt

$$f(\xi) - f_n(\xi) = (f - \Pi_n f)(\xi) + (\Pi_n f - f_n)(\xi) = (\Pi_n f - f_n)(\xi).$$

Dem folgenden Satz liegt eine eindimensionale Geometrie zugrunde, er kann aber wieder auf höherdimensionale Gebiete verallgemeinert werden:

Satz 5.7.4 (Konvergenz in den Kollokationspunkten) Sei λ kein Eigenwert des Integraloperators $K \in K(C(I), C(I))$.

1. Für das Kollokationsverfahren mit stückweise konstanten Ansatzfunktionen gilt für die Kollokationspunkte ξ

$$\max\{|f(\xi) - f_n(\xi)|\} \leq \text{const} \cdot h \cdot \|f\|_{H^1(I)} \quad \forall f \in H^1(I),$$

falls $K \in L(L^2(I), L^\infty(I))$ und

$$\max\{|f(\xi) - f_n(\xi)|\} \leq \text{const} \cdot h^2 \cdot \|f\|_{H^2(I)} \quad \forall f \in H^2(I),$$

falls $K \in L(H^1(I)', L^\infty(I))$, wobei $(H^1)'$ den Dualraum des H^1 bezeichne.

2. Für das Kollokationsverfahren mit stückweise linearen Ansatzfunktionen gilt für die Kollokationspunkte ξ

$$\max\{|f(\xi) - f_n(\xi)|\} \leq \text{const} \cdot h^2 \cdot \|f\|_{H^2(I)} \quad \forall f \in H^2(I),$$

falls $K \in L(L^2(I), L^\infty(I))$.

Beweis: Hackbusch [18], Satz 4.4.17

In den Kollokationspunkten kann also unter gewissen Voraussetzungen eine sogenannte Superkonvergenz nachgewiesen werden.

Im mehrdimensionalen Fall muß zusätzlich der geometrische Diskretisierungsfehler betrachtet werden, da die Oberflächengeometrie durch Dreiecke angenähert wird. Es ergibt sich ein zusätzlicher Fehler von

$$\|D - D_\Delta\|_\infty \leq O(h),$$

wobei D die Matrix (12) sei und D_Δ die zugehörige Matrix nach Diskretisierung der Oberfläche (Hackbusch [18], Kapitel 9.2.4).

Für weitere Konvergenz- und Fehleruntersuchungen sei auf die Literatur (Wendland [58]) verwiesen.

5.8 Programmierung und Auswertung

5.8.1 Programmierung

Zu Beginn der Arbeit lag am INSERM U280 de Lyon ein Programm zur Lösung des direkten Problems über die Randelementmethode mit Kollokation im Massenzentrum und stückweise konstanten Ansatzfunktionen vor (im folgenden Massenzentrumsmethode genannt). Von Interesse war ein Genauigkeitsvergleich mit der Kollokation in den Dreieckseckpunkten und stückweise linearer Interpolation auf den Oberflächenelementen mit analytischer Berechnung der auftretenden Integrale (Methode der linearen Interpolation). Im Programm sollte der Speicherbedarf dynamisch an gegebene Oberflächengitter angepaßt werden. In Lyon wurde unter dem Betriebssystem UNIX in der Programmiersprache C ein Einschichtmodell entwickelt, welches nach der Rückkehr nach Aachen in ein Dreischichtmodell erweitert wurde. Die Implementation des isolierten Problems wurde begonnen, wegen der Dringlichkeit der Weiterentwicklung der inversen Methoden im FE-Programmsystem CAUCHY aber nicht abgeschlossen.

Auf Kugelgeometrien existieren analytische Lösungen für das gesuchte Potential unter Monopol- und Dipolquelleinleitung (Zhang et al. [64], de Munck [13], Wieringa [60], Herleitung über Legendre-Polynome). An bereits implementierten analytischen Lösungen für ein Einschicht- und für ein Dreischichtkugelmodell sollte ein Vergleich der beiden Kollokationsmethoden durchgeführt werden. Es wurden radiale und tangential Dipole mit verschiedenen Exzentrizitäten, d.h. Entfernungen zum Kugelmittelpunkt, verwendet.

Die drei überlagerten Kugeln des Dreischichtkugelmodells haben die Radien 0.0783, 0.0828 und 0.09. Die Exzentrizität des Dipols sei definiert über die Dipolentfernung zum Ursprung im Verhältnis zum Radius der äußeren Kugel. Sie befindet sich somit im Bereich 0 bis $0.87 = \frac{0.0783}{0.09}$. Mit Exzentrizität 0.87 würde sich der Dipol somit auf der inneren Grenzfläche Γ_1 befinden. Auch beim Einschichtmodell bedeute eine Exzentrizität von 0.87

im weiteren Lage des Dipols auf der Kugeloberfläche.

Zwei verschieden feine Dreiecksdiskretisierungen der Kugeloberflächen wurden vom INSERM U280 zur Verfügung gestellt, 600 Dreiecke pro Oberfläche (300 Dreieckseckpunkte) bzw. 300 Dreiecke pro Oberfläche (153 Eckpunkte).

Bei der Massenzentrumsmethode wird für das Einschichtmodell ein Gleichungssystem $Aa = b$ der Größe $M \times M$ (M : Anzahl Dreiecke) gelöst, bei der Methode der linearen Interpolation ein Gleichungssystem der Größe $N \times N$ (N : Anzahl Eckpunkte). Die Matrizen sind rein geometrieabhängig, bei Änderung der Quelleinleitung wird nur der Vektor b verändert. Für die Berechnung der Geometriematrix stehen den $(36 \cdot M^2)$ Punktoperationen plus (M^2) Arcustangensauswertungen bei der Massenzentrumsmethode $(186 \cdot M \cdot N)$ Punktoperationen plus $(M \cdot N)$ Arcustangens- und $(M \cdot N \cdot 3)$ Logarithmusauswertungen für die lineare Interpolation gegenüber.

Zur Ermittlung der Einflußmatrix werden die Gleichungssysteme sehr häufig für verschiedene Dipole bei gleicher Geometrie gelöst. Somit rechtfertigt der Rechenaufwand einen Vergleich der Kollokation im Massenzentrum mit 300 Dreiecken pro Oberfläche mit der feineren Diskretisierung für die lineare Interpolation. Die Berechnung der Geometriematrix wird bei der linearen Interpolation und 600 Dreiecken mit 33.48 Millionen Punktoperationen, 180000 Arcustangens- und 540000 Logarithmusauswertungen gegenüber 3.24 Millionen Punktoperationen und 90000 Arcustangensauswertungen bei der Massenzentrumsmethode mit 300 Dreiecken mehr Rechenzeit benötigen (auf modernen Rechenanlagen einige Sekunden).

5.8.2 Fehlerkriterien

Bezeichne $\tilde{\Phi}$ die numerische und Φ die analytische Lösung des auf den Grenzflächen berechneten Potentials. Diese sollen nun auf der äußeren Kugeloberfläche verglichen werden. Φ_n sei das analytisch, $\tilde{\Phi}_n$ das numerisch berechnete Potential im Massenzentrum des Dreiecks Δ_n . Es wurden zwei Fehlerkriterien verwendet (Meijs [33]), der RDM (Relative difference measure) und der MAG (Magnification factor).

Der

$$\text{RDM} := \sqrt{\int_{\Gamma_p} \left(\frac{\Phi}{\sqrt{\int_{\Gamma_p} \Phi^2 d\Gamma}} - \frac{\tilde{\Phi}}{\sqrt{\int_{\Gamma_p} \tilde{\Phi}^2 d\Gamma}} \right)^2 d\Gamma},$$

ist ein Maß für den Fehler in der Topographie (Optimum RDM = 0), der

$$\text{MAG} := \frac{\sqrt{\int_{\Gamma_p} \tilde{\Phi}^2 d\Gamma}}{\sqrt{\int_{\Gamma_p} \Phi^2 d\Gamma}},$$

gibt Aufschluß über den Fehler in der Amplitude (Optimum MAG = 1).

5.8.3 Diskussion der Ergebnisse im Kugelmodell

Im Programm wurden simple Quadraturformeln zur Berechnung der Fehler implementiert. Der RDM wurde über

$$\text{RDM} = \sqrt{\sum_{n=1}^M \left(\frac{\Phi_n}{\sqrt{\sum_{n=1}^M \Phi_n^2 A(\Delta_n)}} - \frac{\tilde{\Phi}_n}{\sqrt{\sum_{n=1}^M \tilde{\Phi}_n^2 A(\Delta_n)}} \right)^2 A(\Delta_n)} \quad (5.53)$$

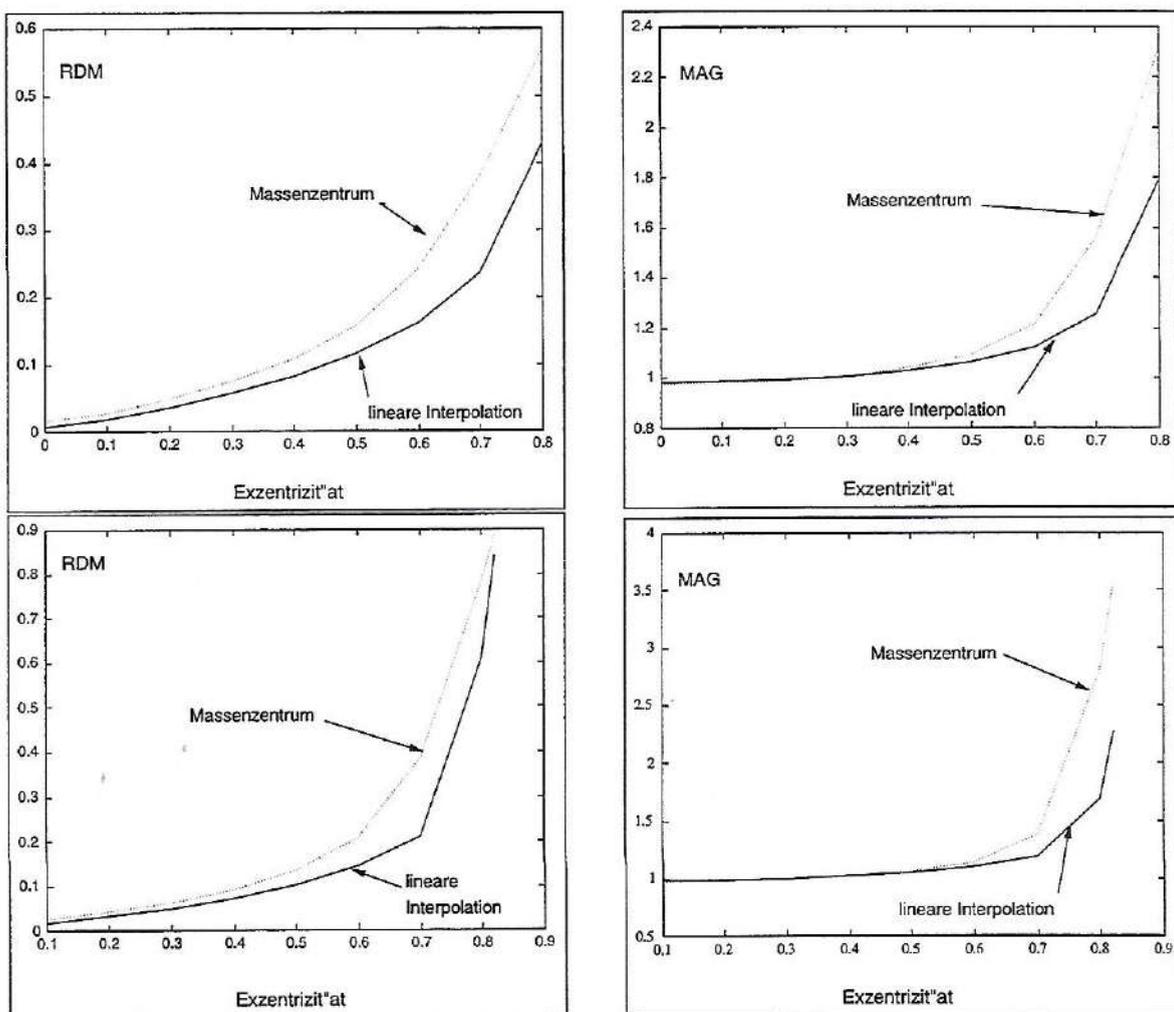


Abbildung 5.1: RDM und MAG für die Quellenleitung über einen Stromdipol im Einschichtmodell; oben radiale, unten tangentielle Ausrichtung.

bestimmt, der MAG über

$$\text{MAG} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^M \tilde{\Phi}_n^2 A(\Delta_n)}}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}_n^2 A(\Delta_n)}} \quad (5.54)$$

Seien die Eckpunkte des Dreiecks n mit \mathbf{x}_0^n , \mathbf{x}_1^n und \mathbf{x}_2^n und das zugehörige Massenzentrum mit \mathbf{x}_c^n bezeichnet.

Für die Methode der linearen Interpolation wurden aus den berechneten Potentialen auf den Dreieckseckpunkten über

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_c^n) &= \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_0^n) h_0^n(\mathbf{x}_c^n) + \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_1^n) h_1^n(\mathbf{x}_c^n) + \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_2^n) h_2^n(\mathbf{x}_c^n) \\ &= \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_0^n) \frac{\det(\mathbf{x}_c^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)}{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)} + \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_1^n) \frac{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_c^n, \mathbf{x}_2^n)}{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)} + \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_2^n) \frac{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_c^n)}{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)} \\ &= \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_0^n) \frac{\det(\mathbf{x}_c^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)}{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)} + \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_1^n) \frac{\det(\mathbf{x}_c^n, \mathbf{x}_2^n, \mathbf{x}_0^n)}{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)} + \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_2^n) \frac{\det(\mathbf{x}_c^n, \mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n)}{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)} \end{aligned}$$

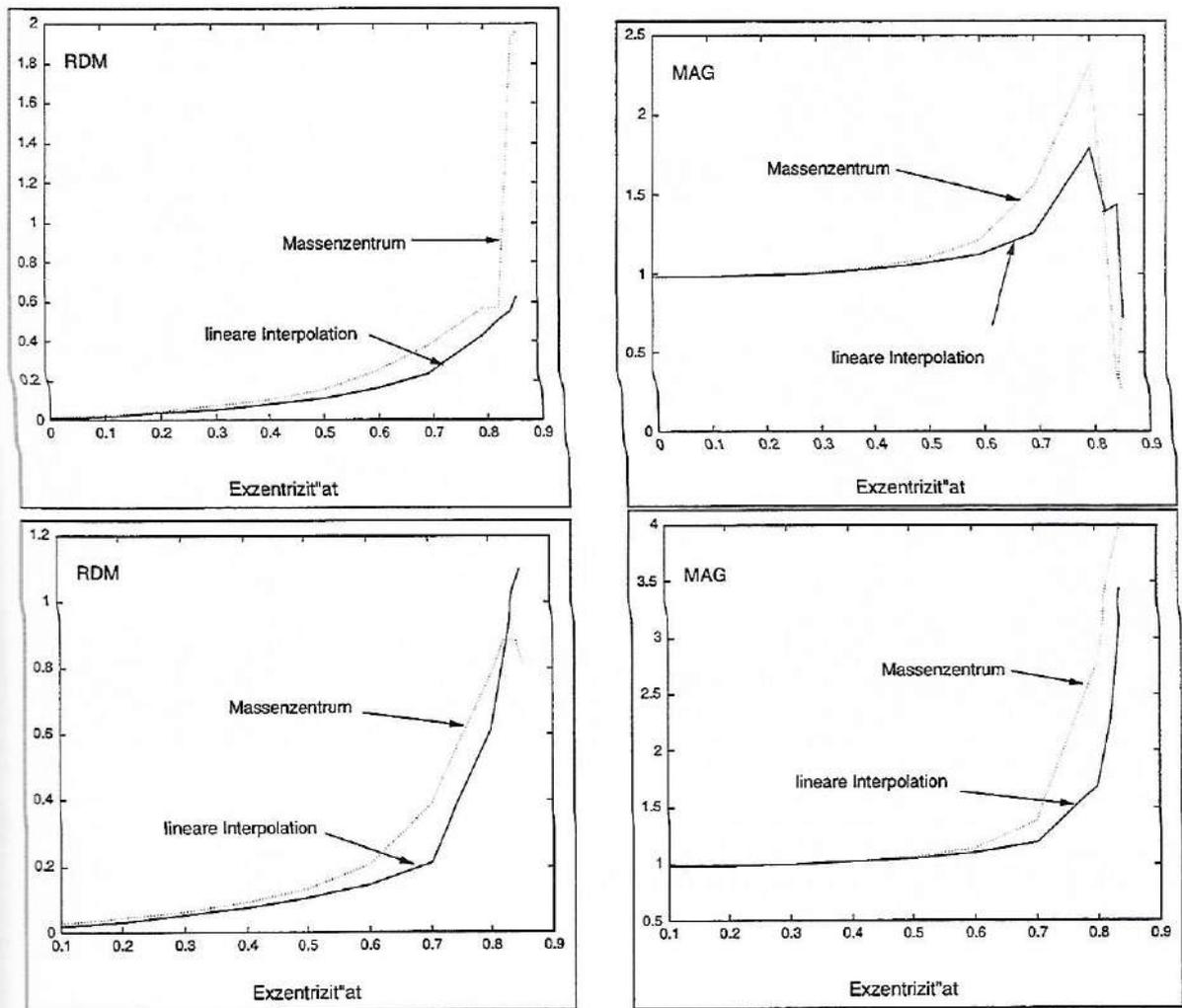


Abbildung 5.2: RDM und MAG für die Quelleinleitung über einen Stromdipol im Dreischichtmodell; oben radiale, unten tangentielle Ausrichtung.

$$= \sum_{i=0}^2 \tilde{\Phi}(x_i^n) \frac{\langle x_c^n, x_{(i+1) \bmod 3}^n \times x_{(i+2) \bmod 3}^n \rangle}{\langle x_0^n, x_1^n \times x_2^n \rangle} \tag{5.54}$$

die Potentiale im Massenzentrum berechnet.

Diese Vorgehensweise wird sich sicherlich zuungunsten der Methode der linearen Interpolation auswirken. In den Kollokationspunkten kann nach Kapitel 5.7 eine bessere Konvergenz erwartet werden, so daß die Methode der linearen Interpolation durch die Auswertung im Massenzentrum benachteiligt ist. $\tilde{\Phi}$ wird zudem für den linearen Ansatz nicht exakt integriert.

Die Abbildung 5.1 zeigt Topographie- und Amplitudenfehler bei radialer bzw. tangentialer Quelleinleitung durch einen Stromdipol für das Einschichtmodell. Trotz Benachteiligung der linearen Interpolation durch die Fehlerformeln erkennt man die bessere Approximation des gesuchten Potentials im Vergleich zur Massenzentrumsmethode. Mit steigender Exzentrizität des Dipols nimmt die Genauigkeit beider Kollokationsmethoden stark ab.

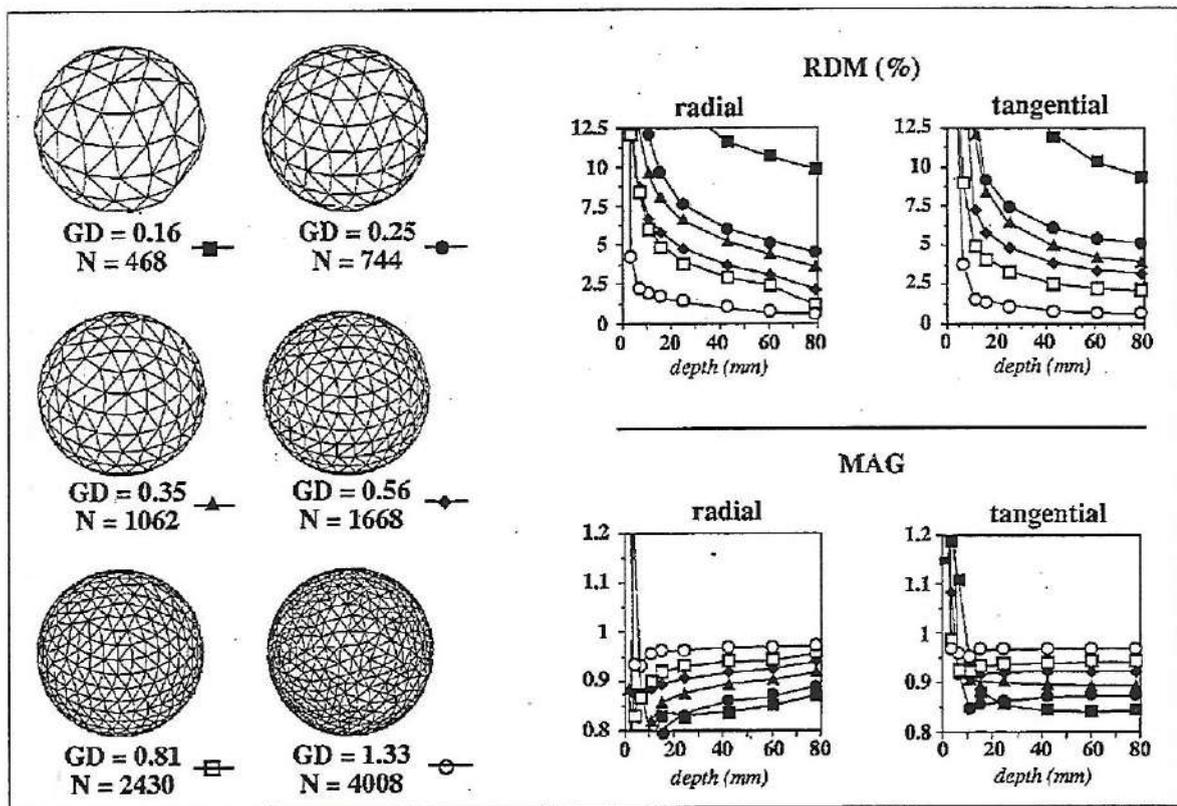


Abbildung 5.3: Einfluß der globalen Netzdicthe GD in Dreiecken/ cm^2 und Dipolexzentrität auf RDM und MAG im Dreischichtkugelmodell (aus Yvert et al. [62]).

Die grobe Vergitterung der Kugeloberfläche reicht nicht mehr aus.

Die Abbildung 5.2 zeigt Topographie- und Amplitudenfehler bei radialer bzw. tangentialer Quelleinleitung durch einen Stromdipol für das Dreischichtmodell ohne Isolation der Knochenschicht. Wie schon beim Einschichtmodell zeigen sich Vorteile der Kollokation mit linearen Ansatzfunktionen und analytischer Berechnung der Integrale. Tests mit Quadraturverfahren höherer Ordnung für das analytische Potential und exakter Integration von Φ sollten durchgeführt werden, da sie diese Vorteile stärker herausstellen werden. Im Vergleich Dreischichtmodell mit linearem Ansatz ohne Isolation der Knochenschicht gegen Kollokation im Massenzentrum mit isoliertem Knochen (ohne Abbildung) zeigt sich bei tangentialem Dipol mit einer Exzentrität von 0.8, wie wichtig die gesonderte Behandlung des Potentials auf den Schichtgrenzen innerhalb der Knochenschicht ist (RDM 0.755 gegen 0.7217, MAG 2.181 gegen 1.3426).

Für beide Methoden führt eine hohe Exzentrität zu großen numerischen Fehlern. Nähert sich eine Quelle der inneren Grenzschicht, so weist das Potential auf der Grenzfläche in der Nähe der Quelle einen großen Gradienten auf. Hier reicht die grobe Vergitterung der Kugeloberflächen nicht mehr aus und es ergeben sich größere Fehler.

Am INSERM U280 wurde die numerische Genauigkeit der Massenzentrumsmethode mit Isolation der Knochenschicht im Dreischichtkugelmodell anhand der analytischen Lösung für sechs verschiedene feine Oberflächenvernetzungen untersucht (Yvert et al. [62]). Es wurden globale Netzdichten (GD, Global Density) von GD= 0.16 bis GD= 1.33 Dreiecken pro

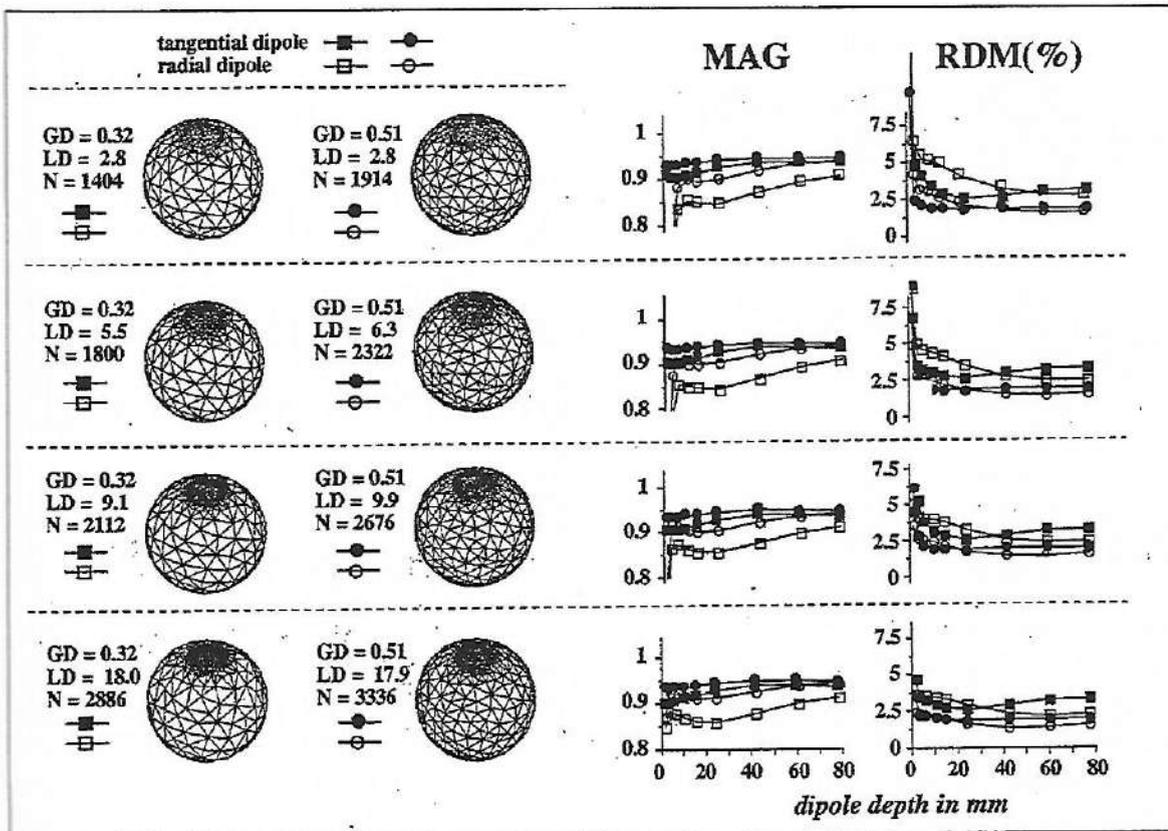


Abbildung 5.4: Einfluß der lokalen Netzverfeinerung LD im Dreischichtkugelmodell auf RDM und MAG für Dipole auf der z-Achse mit verschiedener Exzentrizität (aus Yvert et al. [62]).

Quadratmeter getestet, die zugehörige Anzahl Dreiecke wird mit N bezeichnet (Abbildung 5.3). Eine Dipoltiefe von 78.3 mm entspricht einer Exzentrizität 0, eine Dipoltiefe von 1.8 mm der Exzentrizität 0.85. Setzt man die Akzeptanzschwelle für den RDM-Fehler bei 5% an, so sieht man, daß selbst bei einer globalen Netzdicke von $GD = 1.33$ der Topographie-Fehler für oberflächennahe Quellen nicht zu akzeptieren ist.

Es wurden dann lokal verfeinerte Netze getestet [62]. Die Dipole wurden auf der z-Achse mit verschiedener Exzentrizität gesetzt. Die lokale Netzdicke (LD, Local Density) wurde von $LD = 2.8$ bis auf $LD = 18$ Dreiecke pro Quadratmeter erhöht. Bei einer lokalen Netzdicke von ca. 10 Dreiecken pro Quadratmeter blieb der Topographiefehler auch für stark exzentrische Dipole unter 5%. Der MAG bewegte sich für alle getesteten Exzentrizitäten zwischen 0.9 und 0.95 und scheint stärker von der globalen Netzdicke abzuhängen.

5.8.4 Numerische Tests in realer Geometrie

Anhand von Kernspinresonanz-Tomographie-Bildern wurden die Oberflächen von Kopfhaut, Knochen und Hirn rekonstruiert und vernetzt (siehe Abbildung 5.5). Da für die reale Geometrie keine analytische Berechnung des Potentials mehr möglich ist, wurden auf einem sehr feinen Gitter (globale Netzdicke 1.3 und lokale Netzdicke 15 Dreiecke

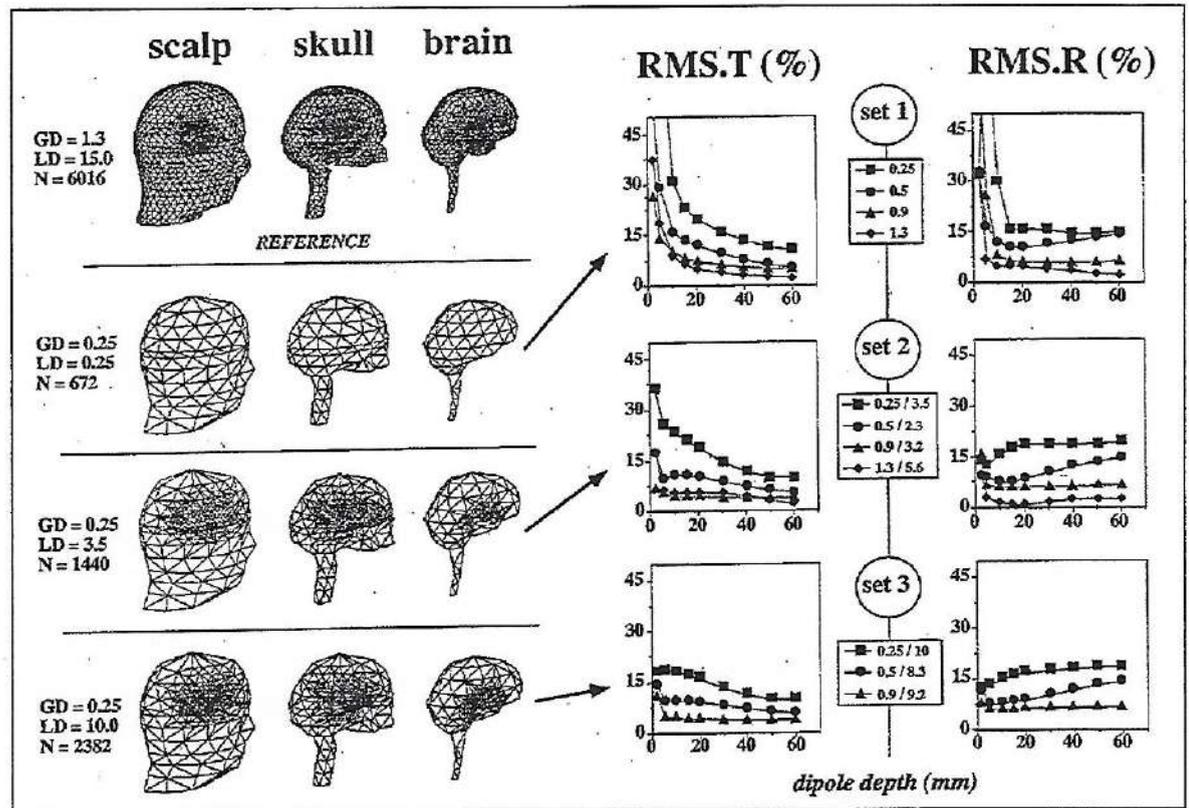


Abbildung 5.5: Test in realer Geometrie: Dipole mit verschiedener Exzentrizität in rechter temporaler Region und Vergleich der berechneten Potentialwerte an 66 Elektrodenorten; oben das Referenzmodell, darunter die am Referenzmodell getesteten Netze; rechts die Abweichungen von den Potentialwerten des Referenzmodells für tangentielle (RMS-T) und radiale Dipole (RMS-R) verschiedener Exzentrizität (aus Yvert et al. [62]).

pro cm^2 , insgesamt 6016 Dreiecke pro Oberfläche) für radiale und tangentielle Dipole Referenzlösungen an 66 Elektrodenpositionen (gemäß internationalem 10-20 System) ermittelt. Die Lösungen anhand von gröberen Gittern wurden dann an diesen 66 Punkten mit der Referenzlösung verglichen und der Fehler RMS ausgewertet. RMS.T steht für tangentielle, RMS.R für radiale Dipole. Die ersten getesteten Netze (set 1) wurden nicht lokal verfeinert. Es wurden die Potentialwerte an den Elektrodenpositionen bei globalen Netzdichten zwischen $\text{GD} = 0.25$ und $\text{GD} = 1.3$ Dreiecken pro Quadratzentimeter mit der Lösung des Referenzmodells verglichen. Für exzentrische Dipole ergaben sich wieder inakzeptable Abweichungen. Im weiteren wurden dann im temporalen Bereich verfeinerte Netze verwendet. Bei lokaler Verfeinerung im Bereich $\text{LD} = 3.2$ und globaler Netzdichte von $\text{GD} = 0.9$ konnte der RMS auch für exzentrische Quellen unter 15% gedrückt werden. Tiefe Quellen sind weniger problematisch.

Kapitel 6

Einflußmatrix und Vergleich der direkten Methoden

6.1 Die Einflußmatrix

Die dem direkten Problem zugrundeliegende quasistatische Differentialgleichung (3.1) ist linear; zwei Quellen erzeugen eine Potential- bzw. Flußverteilung, die sich als Summe der Verteilungen der einzelnen Quellen ergibt. Um rechentechnisch effiziente Algorithmen für das inverse Problem entwickeln zu können, wird diese Linearität in Form einer Einflußmatrix genutzt. In der Einflußmatrix werden spaltenweise die über eine direkte Methode (FE- oder BE-Methode) berechneten Potentialwerte an den Elektrodenorten bzw. magnetischen Flußwerte an den Detektororten gespeichert, die von einer im Einflußraum liegenden Referenzquelle normierter Quellstärke erzeugt werden. Der Einflußraum definiert sich dabei über diejenigen physiologischen Strukturen, die als Generatoren der gemessenen Feldgrößen in Frage kommen. Sinnvoll ist es zum Beispiel, eine Fläche innerhalb des Cortex in ein Netz zu vergittern und an den n_{inf} Knoten dieses Gitters (Einflußknoten) die Quelleinspeisung zuzulassen. Der Einflußraum setzt sich dann aus allen n_{inf} Einflußknoten zusammen. Auch tiefer liegende graue Substanz (z.B. Thalamus) kann zum Einflußraum gezählt werden. Läßt man zunächst zu, daß an jedem Einflußknoten eine Quelleinspeisung in jede Raumrichtung n_{rich} möglich ist, so ergibt sich eine Einflußmatrix E mit einer Anzahl $n_{\text{inf}} \cdot n_{\text{rich}}$ Spalten. Der Anzahl Zeilen von E entspricht die Anzahl m an Meßabnehmern (EEG und MEG). Der Vektor der Quellstärken an den verschiedenen Einflußknoten in Richtung der drei kartesischen Einheitsvektoren sei im weiteren mit s bezeichnet. Mit Hilfe der Einflußmatrix ergibt sich eine rechentechnisch effiziente Möglichkeit, den Vektor v der resultierenden Potentiale bzw. Flüsse an den Meßabnehmern für eine gegebene Quellverteilung zu berechnen:

$$Es = v. \quad (6.1)$$

Die Einflußmatrix wird durch $n_{\text{inf}} \cdot n_{\text{rich}}$ (in der Praxis ca. 3000 bis 12000) Vorwärtslösungen über eine direkte Methode bestimmt.

6.2 Vergleich von FE- und BE-Methode

In diesem Unterkapitel sollen die beiden vorgestellten direkten Methoden vom theoretischen und praktischen Standpunkt aus miteinander verglichen werden.

Bei der BE-Methode kann beim Übergang vom dreidimensionalen Volumenleiter auf die zweidimensionalen Leitfähigkeitsgrenzflächen eine Dimension gewonnen werden, innerhalb derer analytisch gerechnet wird. Stellt sich das Modell des schichtweise homogenen, isotropen Leiters für den Kopf auch in Zukunft als akzeptabel heraus, so kann die Transformation der Differentialgleichung (3.1) in die Integralgleichung (5.7) als theoretisch sinnvoller Ansatz bewertet werden. Die Differentialgleichung ist auch bei Anisotropie und inhomogener Leitfähigkeit innerhalb der Schichten gültig, wo die Transformation in eine Integralgleichung ihre Berechtigung verliert. In der medizinischen Anwendung sind Patienten interessant, deren Schädelknochen ein Loch aufweist. Das Loch führt zu veränderter Potentialverteilung (Bertrand [4]) und muß beachtet werden. Dieser Anwendungsfall ist über die Methode der finiten Elemente leicht zu modellieren, indem den finiten Elementen des Lochs die Leitfähigkeit der Kopfhaut zugewiesen wird.

Die Generierung einer Oberflächenvernetzung läßt sich im allgemeinen leichter durchführen als eine Volumenvernetzung. Allerdings müssen auch hier die Schichtgrenzen ermittelt werden, was eine nicht einfache Aufgabe darstellt.

Nach der Diskretisierung führt ein Kollokationsansatz bei der BE-Methode zu vollbesetzten, unsymmetrischen $m \times m$ -Matrizen. Beim FE-Ansatz erhält man große, aber dünnbesetzte, symmetrische und positiv definite $n \times n$ -Matrizen mit einer Bandbreite $\gamma \approx 30$. Somit kann ein entscheidender Vorteil der FE-Methode bezüglich des Speicheraufwands erzielt werden. Auch bei feinen Gittern ist die Vorwärtslösung ohne Auslagerung von Teilen der Geometriematrix durch das Betriebssystem (Paging oder Swapping) möglich, was im Hinblick auf das vielfache Lösen des Vorwärtsproblems beim Erstellen der Einflußmatrix einen entscheidenden Vorteil erbringt.

Bei Verwendung der konjugierten Gradienten werden in jedem Iterationsschritt $(\gamma + 5)n$ Multiplikationen und Additionen ausgeführt. Die Konvergenz des Verfahrens nach n Schritten ist gesichert, in der Praxis werden aber nach bereits $\beta(n) \cdot n$ Schritten ausreichende Genauigkeiten erzielt. Zur Konvergenz des CG-Verfahrens sei folgender Satz zitiert:

Satz 6.2.1 Für das CG-Verfahren gilt mit jedem Startvektor $\Phi_0 \in \mathcal{R}^n$

$$\|\Phi_k - \Phi\|_A \leq 2 \left(\underbrace{\frac{\sqrt{\text{cond}(A)} - 1}{\sqrt{\text{cond}(A)} + 1}}_{=:K} \right)^k \|\Phi_0 - \Phi\|_A,$$

wobei $\|\mathbf{x}\|_A := \sqrt{\mathbf{x}^{\text{tr}} \mathbf{A} \mathbf{x}}$ die Energienorm bezeichne.

Beweis: Braess [5], Satz 3.7

Zum Begriff der Kondition einer Matrix $\text{cond}(A)$ sei auf Definition 7.2.4 verwiesen. Mit feiner werdender Diskretisierung $h \rightarrow 0$ steigt die Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix für elliptische Probleme bei Verwendung stückweise linearer Elemente $\text{cond}(A) = O(h^{-2})$ (Hackbusch [17], Kapitel 8.8). Damit nähert sich der Konvergenzfaktor K im obigen Satz der 1 und die Konvergenz ist theoretisch kaum noch gesichert.

In der Praxis wurde für $n = 17000$ nach ca. 170 Schritten eine genügende Genauigkeit erzielt ($\beta(n) \approx 0.01$).

Bei der BE-Methode kann die Geometriematrix aufgrund der geringeren Größe über direkte Verfahren einmal zerlegt werden (QR-Zerlegung oder LR-Zerlegung mit Pivotisierung) und durch simples Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen kann dann das Gleichungssystem gelöst werden. Das Aufstellen der Einflußmatrix wird gegenüber der FE-Methode um einen Faktor 5 bis 10 beschleunigt, solange kein Paging nötig wird.

Ein entscheidender Nachteil der BE-Methode scheint die Notwendigkeit der lokalen Netzverfeinerung für exzentrische Quellen zu sein. Die FE-Methode reagiert scheinbar aufgrund der insgesamt höheren Zahl an finiten Elementen weniger empfindlich. Diese Vermutungen sollten allerdings durch Simulationen nachgewiesen werden. Ähnliche Überlegungen können bezüglich des Quellmodells durchgeführt werden. Die Grenzfläche Cortex/Liquor liegt nicht sehr weit von der Quelle entfernt, sodaß beim BE-Modell durch die vereinfachte Quelleinleitung des Stromdipols (3.6) Fehler auf den in der Umgebung der Quelle lokalisierten Cortexoberflächenelementen einhergehen. Aufgrund der insgesamt geringeren Zahl an Oberflächenelementen könnten sich diese fehlerhaften Potentialwerte stärker in der Potentialverteilung an den Referenzelektroden (Fernzone) und im magnetischen Fluß an den Detektororten auswirken. Beim FE-Ansatz wird eine ungenaue Quelleinleitung zwar in der Umgebung der Quelle ebenfalls Fehler in den Potentialwerten verursachen, wahrscheinlich aber fallen diese weniger stark ins Gewicht.

Kapitel 7

Das inverse Problem

Im Rahmen des inversen Problems werden Quellen gesucht, deren Summenpotential an den Elektrodenorten bzw. deren magnetischer Summenfluß an den Detektororten die gemessenen Potentiale (EEG) bzw. Flüsse (MEG) unter Einbeziehung des Rauschens „ideal“ approximieren. Die Lösung des inversen Problems, d.h. die Rekonstruktion der Quellverteilung aus der bekannten Feldverteilung, ist ohne Zusatzinformation nicht eindeutig lösbar (Helmholtz [20], Wang [57]). Erschwerend kommt hinzu, daß nur wenigen Meßkanälen eine Vielzahl an Einflußknoten gegenüberstehen. Radiale Quellen erzeugen zudem eine magnetisch kaum erfaßbare Feldverteilung (siehe Kapitel 3.5). Ein weiteres Problem ist das unvermeidbare Rauschen in den gemessenen Feldgrößen. Es ergibt sich folgendes Problem:

$$\|Es - \mathbf{v}^\epsilon\|_B^2 = (Es - \mathbf{v}^\epsilon)^{tr} B (Es - \mathbf{v}^\epsilon) \stackrel{!}{=} \min. \quad (7.1)$$

Im Vektor \mathbf{v}^ϵ werden die Meßwerte von EEG und MEG abgelegt. $B = C^{tr}C$ ist eine positiv definite Diagonalmatrix, welche eine Wichtung der Meßkanäle vornimmt. Aus dem Prästimulus kann die Varianz für jeden der Meßkanäle ermittelt werden. Damit ist es möglich, die einzelnen Kanäle zu gewichten. Die EEG-Kanäle mit ihrem durchschnittlichen Signal-Rausch-Verhältnis (SN, Signal to Noise) von $SN = 10$ werden ca. zehnfach schwächer gewichtet als die MEG-Kanäle, die ein durchschnittliches SN von 100 aufweisen. Bezeichnet man mit ϵ_i das Rauschen des Kanals i , so wird das SN über

$$SN := \sum_{i=1}^m \frac{|\mathbf{v}_i^\epsilon|}{|\epsilon_i|}$$

definiert.

7.1 Medizinische Zusatzbedingungen

Ohne Zusatzbedingungen ist das inverse Problem im allgemeinen stark unterbestimmt. Die Anzahl Unbekannter $n_{\text{inf}} * n_{\text{rich}}$ ist wesentlich größer als die Anzahl m an Meßwerten. Über physiologische und anatomische Überlegungen kann diese Überbestimmtheit zunächst gemindert werden.

- Vom Experiment abhängige physiologische Überlegung: Heutzutage wird der Cortex in primär motorische, primär sensorische, motorische und sensorische Regionen höherer Ordnung und in die assoziativen, d.h. unspezifischen Regionen aufgeteilt (siehe Abbildung 2.7). Je nach dem den Meßwerten zugrundeliegendem Experiment

kann eine starke Einschränkung des Einflußraums durch bereits bekannte funktionelle Topographie vorgenommen werden.

- Anatomische Zusatzinformation: Die apikalen Dendriten der inneren Pyramidenschicht liegen parallel zueinander und senkrecht zur Cortexoberfläche (siehe Abbildung 2.3). Die Richtung der Quelleinleitung an den Einflußknoten kann also als senkrecht zur lokalen Cortexoberfläche angenommen werden. Es ergibt sich $n_{\text{rich}} = 1$. Diese Annahme wird im weiteren mit NC (NormalenConstraint) bezeichnet, OC bezeichnet eine Quellsuche ohne diese anatomische Zusatzbedingung.
- Weitere physiologische Zusatzinformation: Für nahe beieinanderliegende Dendritenverbände A und B kann ein Stromfluß zur Cortexoberfläche hin innerhalb des Dendritenverbands A bei gleichzeitigem von der Cortexoberfläche weg in die Tiefe gerichtetem Fluß des Verbands B ausgeschlossen werden. Diese physiologische Überlegung führt auf das Konzept der später diskutierten Regularisierung.

Legt man den Schwerpunkt der Modellierung auf die Regularität der Quellverteilung, läßt sich ein beliebig unterbestimmtes System in einer Weise mit Zusatzinformation füllen, daß eine eindeutige Lösung von mathematischer Seite gewährleistet ist. Dieses Modell wird in Kapitel 7.3 diskutiert.

Schwerpunkt dieser Arbeit ist das Modell der scharfen inversen Quellsuche. Medizinisch interessant ist die Suche nach einigen wenigen Zentren fokaler Aktivität (Buchner et al. [7]). Trifft man die Annahme, daß weniger Quellen aktiv sind, als Meßkanäle zur Verfügung stehen (unter der Zusatzbedingung des NC), so führt diese Annahme auf ein mathematisch sinnvoll zu lösendes Modell.

7.2 Scharfe inverse Quellsuche

Für die scharfe inverse Quellsuche wird die Annahme gemacht, daß nur einige wenige Quellen n_{dip} aus dem Einflußraum mit n_{inf} Einflußknoten aktiv sind. Zunächst sollen einige Bezeichnungen eingeführt werden. Sei im folgenden

$$\text{Inf} := \{i_1, \dots, i_{n_{\text{inf}}}\}$$

die Menge der Einflußknoten und

$$Q := \{q = (q_1, \dots, q_{n_{\text{dip}}}) : \exists j \in [1, \dots, n_{\text{inf}}] : \forall k = 1, \dots, n_{\text{dip}} q_k = i_j \wedge \forall k \neq l q_k \neq q_l\}$$

die Menge aller n_{dip} -Quellorttupel aus der Menge Inf der Einflußknoten. Mit E_q sei die zum n_{dip} -Quellorttupel q korrespondierende Einflußmatrix bezeichnet. Es wird nun angenommen, daß $n := n_{\text{dip}} \cdot n_{\text{rich}}$ kleiner wird als die Anzahl m der Meßkanäle und das Gleichungssystem $CE_q s = C v^e$ mit $E_q \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $C \in \mathcal{R}^{m \times m}$, $s \in \mathcal{R}^n$ und $v^e \in \mathcal{R}^m$ überbestimmt ist. Bezeichnet man mit

$$R(E) := \{v \in \mathcal{R}^m : \exists s \in \mathcal{R}^n \text{ mit } Es = v\}$$

das Bild und mit

$$N(E) := \{s \in \mathcal{R}^n : Es = 0\}$$

den Kern des linearen Operators E , dann folgt aus der Annahme, daß die unverrauschten Meßwerte v dem n_{dip} -Quellorttupel $\tilde{q} \in Q$ entstammen: $v \in R(E_{\tilde{q}})$. Die n_{dip} Quellorte können dazu beliebig ohne Wiederholung der Menge Inf entnommen werden. Damit gilt

es, folgendes Problem zu lösen:

Finde das n_{dip} -Quellorttupel $q \in Q$ und den zu diesem Quellorttupel korrespondierenden Quellstärkevektor $s \in \mathcal{R}^n$, welche

$$F(q) = \|E_q s - v\| \stackrel{!}{=} \min \quad (7.2)$$

mit unverrauschten Meßwerten v lösen.

Dieses Minimierungsproblem beinhaltet zwei verschachtelte Probleme.

Zunächst muß ein medizinisch und mathematisch sinnvolles Modell für die Beschaffenheit des Graphen des Funktionals F entwickelt werden. Jede Funktionalauswertung beinhaltet das Aufstellen der zu q korrespondierenden Einflußmatrix E_q und die anschließende Ermittlung des Quellstärkevektors s , der das Problem $\|E_q s - v\| \stackrel{!}{=} \min$ löst. Die Meßdaten liegen aber nur im verrauschten Zustand v^e vor. Im Unterkapitel 7.2.2 werden Lösungsmöglichkeiten für dieses Problem vorgestellt.

Das zweite Problem besteht darin, mit praktikabler Rechenzeit aus der Menge Inf aller Einflußknoten das Quellorttupel zu ermitteln, welches F global minimiert.

7.2.1 Bestimmung der Quellorte

Theoretisch wäre es möglich, alle

$$\binom{n_{\text{inf}}}{n_{\text{dip}}} = \frac{n_{\text{inf}}!}{(n_{\text{inf}} - n_{\text{dip}})! n_{\text{dip}}!}$$

Kombinationen der Wahl von n_{dip} Quellorten ohne Wiederholung aus n_{inf} Einflußknoten auf den Wert ihres Funktionals zu testen, praktisch ist diese Methode aber aufgrund der Berechnungsdauer nicht zu gebrauchen. Aus der kombinatorischen Optimierung stammt ein Algorithmus, der die Suche nach dem globalen Minimum auf einem diskreten Gitter in akzeptabler Rechenzeit ermöglicht, das Simulated Annealing (SA). Es bildet den Prozeß des langsamen Ausglühens (Annealing) eines zuvor bis zur Schmelze aufgeheizten Festkörpers nach. Wird der Abkühlprozeß nur langsam genug vollzogen, so findet das Kristallgitter des Festkörpers am Ende des Annealingprozesses den regelmäßigsten und spannungsärmsten Zustand, das globale Energieminimum. Friert man den aufgeheizten Festkörper dagegen schnell ein, wird nur ein lokales Minimum erreicht und es bleiben Spannungen im Kristallgitter. Beim Simulated Annealing wird analog zu diesem Prozeß durch Steuerparameter der Endzustand eines Minimierungsprozesses bestimmt. Wird nur langsam genug abgekühlt, wird das globale Minimum des betrachteten Prozesses gefunden (Aarts [1]).

Bei hohen Temperaturen ist die Beweglichkeit der Atome im Festkörper und somit die Wahrscheinlichkeit einer Lageveränderung erhöht. Kühlt man langsam herunter, so ändert sich proportional zum Abkühlen auch die Beweglichkeit. Im Algorithmus des Simulated Annealing wird dieser Prozess über das Metropolis-kriterium ([35]) simuliert.

In Abbildung 7.1 wird die Übertragung des Simulated Annealing Algorithmus auf die scharfe inverse Quellsuche der Implementierung in CAUCHY (Beckmann[3]) folgend im Flußdiagramm dargestellt.

Bei jedem Durchlauf der inneren Schleife wird zu konstanter Temperatur t ein Quellort der aktuellen Kombination q_{akt} zufällig verändert und als temporäre Quellortkombination in q_{tmp} gespeichert. Zu q_{tmp} wird, wie in Unterkapitel 7.2.2 beschrieben, das Funktional

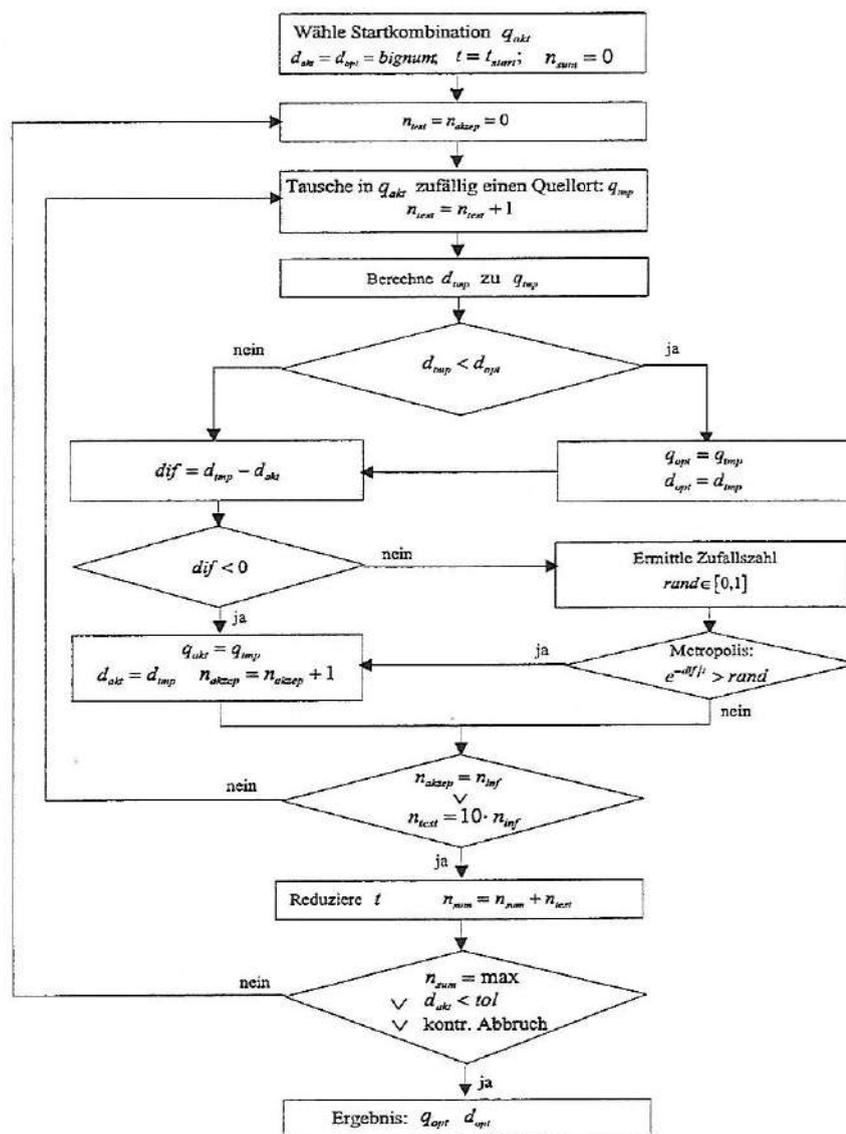


Abbildung 7.1: Flußdiagramm des Simulated Annealing Algorithmus.

$F(q_{tmp}) = d_{tmp}$ ausgewertet. Ist d_{tmp} kleiner als das bisher ermittelte Optimum d_{opt} , wird die Quellkonfiguration samt Meßwertdiskrepanz als optimale Anordnung abgelegt. Die temporäre Kombination wird zur aktuellen, wenn deren Defekt zu den Meßwerten geringer ist als d_{akt} . Gerade bei hoher Temperatur des Systems wird aber auch eine Verschlechterung bezüglich des Defekts in Kauf genommen. Die Kopplung der Akzeptanz schlechterer Quellortkonfigurationen an die Temperatur des Systems wird über das Metropolitkriterium gesteuert. Ist das Metropolitkriterium erfüllt, wird eine Defektverschlechterung und damit das temporäre Quellorttupel q_{tmp} akzeptiert. Zu Anfang werden bei hoher Temperatur Verschlechterungen häufig angenommen. Damit soll vermieden werden, in einem lokalen Minimum gefangen zu bleiben.

Die Temperatur wird gesenkt (um ca. 2-3%), wenn entweder die Anzahl akzeptierter Quellorttupel die Anzahl an Einflußpunkten erreicht oder die Anzahl aller getesteter Tupel größer wird als ein Vielfaches von n_{inf} . Der Algorithmus paßt sich somit der Größe des

Einflußraums an.

Simulated Annealing wird beendet, wenn ein Maximum an Quellorttupeln getestet wurde oder wenn der Defekt einer Quellortkonfiguration zu den Meßwerten unter eine Toleranzschränke fällt.

7.2.2 Berechnung der Quellparameter Richtung und Stärke

In jedem Schritt der kombinatorischen Optimierung muß die Aufgabe $\|E_{q_{\text{tmp}}}\mathbf{s} - \mathbf{v}\|$ zu einer gegebenen Quellortkombination q_{tmp} gelöst werden. Sei im weiteren $E := E_{q_{\text{tmp}}}$. Wählt man als Norm die Betragssummennorm $\|\cdot\|_1$ oder die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$, so läßt sich die Aufgabe auf eine lineare Optimierungsaufgabe zurückführen. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Defekt $\|E\mathbf{s} - \mathbf{v}\|$ in der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ gemessen. Man spricht von einem linearen Ausgleich nach der Methode der kleinsten Quadrate oder von einem linearen Ausgleichsproblem.

Die Meßdaten liegen nur im verrauschten Zustand vor. In Kombination mit einer sogenannten schlecht-konditionierten Einflußmatrix E kann ohne besondere Behandlung des Ausgleichsproblems die Lösung \mathbf{s}^ϵ des Problems

$$\|E\mathbf{s}^\epsilon - \mathbf{v}^\epsilon\|_2 \stackrel{!}{=} \min$$

extrem stark von der gesuchten Lösung \mathbf{s} abweichen.

Zunächst soll ein kurzer Überblick über die Lösungsmöglichkeiten von linearen Ausgleichsproblemen gegeben werden, die einführenden Büchern in die numerische Mathematik entnommen wurden (Hämmerlin [19], Werner [59]). Die Unterkapitel 7.2.2.2 und 7.2.2.3 zeigen Möglichkeiten auf, dem Rauschen in den Meßdaten in Kombination mit schlecht-konditionierten Einflußmatrizen zu begegnen.

7.2.2.1 Grundlagen zum Problem des linearen Ausgleichs

Satz 7.2.1 [59] Seien $E \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^m$ mit $m \geq n$ und das lineare Ausgleichsproblem

$$\|E\mathbf{s} - \mathbf{v}\|_2 \stackrel{!}{=} \min, \quad \mathbf{s} \in \mathcal{R}^n \quad (7.3)$$

gegeben. Dann gilt:

1. \mathbf{s}^* ist genau dann eine Lösung von (3), wenn die sogenannten Normalgleichungen, $E^{\text{tr}} E \mathbf{s}^* = E^{\text{tr}} \mathbf{v}$, erfüllt sind.
2. Die Menge L der Lösungen von (3) ist ein nichtleerer affiner Teilraum des \mathcal{R}^n , d.h. mit $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in L$ gilt $(1 - \lambda)\mathbf{s}_1 + \lambda\mathbf{s}_2 \in L$ für alle $\lambda \in \mathcal{R}$. Zusätzlich gilt $E\mathbf{s}_1 = E\mathbf{s}_2$ für $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in L$.
3. Problem (3) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\text{rang}(E) = n$ gilt.
4. Unter allen Lösungen von (3) gibt es genau eine Lösung \mathbf{s}^+ mit minimaler euklidischer Norm.

Beweis: 1.-3. siehe [59]

Zu 4.: Es ist zu zeigen, daß die Aufgabe

$$\|\mathbf{s}\|_2 \stackrel{!}{=} \min \text{ auf } L := \{\mathbf{s} \in \mathcal{R}^n : E^{\text{tr}} E \mathbf{s} = E^{\text{tr}} \mathbf{v}\}$$

eine eindeutige Lösung besitzt. L ist eine abgeschlossene, aber nicht notwendigerweise beschränkte (falls $\text{rang}(E) < n$) Menge. Man wähle nun ein beliebiges $s^* \in L$ und betrachte die Menge $U := \{s \in \mathcal{R}^n : \|s\|_2 \leq \|s^*\|_2\}$. U ist als abgeschlossene und beschränkte Menge auf dem endlichdimensionalen linearen normierten Raum \mathcal{R}^n kompakt. $L \cap U$ ist nun als Durchschnitt einer abgeschlossenen und einer kompakten Menge kompakt, so daß die stetige Funktion $\|\cdot\|_2$ auf $L \cap U$ ihr Minimum annimmt. Damit ist die Existenz einer Lösung bewiesen.

Es seien nun $s_1, s_2 \in L$ Lösungen minimaler Norm. Nach Teil 2. gilt $(s_1 + s_2)/2 \in L$ und aus der Normminimalität folgt $\|s_1\|_2 = \|s_2\|_2 \leq \frac{1}{2}\|s_1 + s_2\|_2$. Nach Dreiecksungleichung ist aber

$$\frac{1}{2}\|s_1 + s_2\|_2 \leq \frac{1}{2}(\|s_1\|_2 + \|s_2\|_2) = \|s_1\|_2 = \|s_2\|_2,$$

so daß $\frac{1}{4}\|s_1 + s_2\|_2^2 = \|s_1\|_2^2 = \|s_2\|_2^2$ folgt. Damit ist aber

$$\begin{aligned} \|s_1 - s_2\|_2^2 &= \|s_1\|_2^2 - 2 \langle s_1, s_2 \rangle + \|s_2\|_2^2 \\ &= \|s_1\|_2^2 - (\|s_1 + s_2\|_2^2 - \|s_1\|_2^2 - \|s_2\|_2^2) + \|s_2\|_2^2 \\ &= 2(\|s_1\|_2^2 + \|s_2\|_2^2) - \|s_1 + s_2\|_2^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

und somit $s_1 = s_2$, d.h. die Eindeutigkeit der Lösung minimaler Norm.

q.e.d.

Geht man zunächst davon aus, daß $\text{rang}(E) = n$ gilt, dann kann das Ausgleichsproblem (3) in der folgenden Weise gelöst werden: Durch sukzessive Multiplikation von E und v von links mit geeigneten Householderspiegelungen oder Givensrotationen [59] bestimmt man eine orthogonale Matrix $Q \in \mathcal{R}^{m \times m}$ derart, daß

$$Q^tr E = R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}m-n \end{matrix} \quad \text{und} \quad Q^tr v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}m-n \end{matrix}$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix $R_1 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ gilt. Es ist damit

$$\|Es - v\|_2^2 = \|Q^tr Es - Q^tr v\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} R_1 s \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \|R_1 s - c\|_2^2 + \|d\|_2^2$$

und durch Rückwärtseinsetzen läßt sich aus $R_1 s = c$ die eindeutige Lösung ermitteln. Gilt $v \in R(E)$, dann ist das Residuum $d = 0$. Man beachte, daß die Koeffizientenmatrix R des reduzierten Systems die gleiche Kondition besitzt wie die Einflußmatrix E , die QR -Zerlegung ist also konditionsstabil (siehe Unterkapitel 7.2.2.3 bzgl. der Kondition einer Matrix).

7.2.2.2 Die verallgemeinerte Inverse

Im allgemeinen kann nicht davon ausgegangen werden, daß die Einflußmatrix E vollen Rang besitzt.

Für die scharfe Lösung mit kombinatorischer Optimierung zur Ermittlung der Quellorttupel tritt allerdings eher das Problem einer annähernden linearen Abhängigkeit der Spalten der Einflußmatrix auf. Zudem können die Meßwerte nicht unverrauscht ermittelt werden. Die Kombination führt zu einem sogenannten schlecht gestellten Problem, für das „feinere“ Lösungsmethoden notwendig werden.

Definition 7.2.1 [19] Sei $E \in \mathcal{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $\text{rang}(E) = r$ eine reelle Matrix. Eine Zerlegung der Form

$$E = U \Sigma V^{\text{tr}},$$

in der $U \in \mathcal{R}^{m \times m}$ und $V \in \mathcal{R}^{n \times n}$ orthogonale Matrizen und die Matrix

$$\Sigma = \text{diag}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_r, 0, \dots, 0) \in \mathcal{R}^{m \times n}$$

Diagonalmatrix sind, heißt eine Singulärwertzerlegung der Einflußmatrix E .

Satz 7.2.2 (Satz über die Existenz einer Singulärwertzerlegung) [19]

Sei $E \in \mathcal{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $\text{rang}(E) = r$. Die Eigenwerte von $E^{\text{tr}} E$ seien bezeichnet durch

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n,$$

das zugehörige Orthonormalsystem von Eigenvektoren mit $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Dann ist $\mathbf{u}_i := \frac{1}{\varsigma_i} E \mathbf{v}_i$ mit $\varsigma_i := +\sqrt{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq r$ ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren von $E E^{\text{tr}}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Dieses System läßt sich zu einer Orthonormalbasis des \mathcal{R}^m ergänzen: $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$. Setzt man $V = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, $U = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ und

$$\Sigma = \text{diag}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_r, 0, \dots, 0) \in \mathcal{R}^{m \times n},$$

so besitzt E die Singulärwertzerlegung

$$E = U \Sigma V^{\text{tr}}.$$

Der Wert ς_i wird als i -ter Singulärwert von E bezeichnet.

Beweis: Hämmerlin [19]

Es sei bemerkt, daß die Singulärwerte einer Matrix und damit die Diagonalmatrix Σ eindeutig bestimmt sind. Für die Transformationsmatrizen U und V gilt das wegen der möglichen Vielfachheit der Eigenwerte von $E^{\text{tr}} E$ nicht.

Mit Hilfe einer Singulärwertzerlegung kann die Definition der Inversen einer regulären Matrix auf beliebige rechteckige Matrizen, insbesondere auf singuläre Matrizen übertragen werden.

Definition 7.2.2 Sei $E \in \mathcal{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $r := \text{rang}(E)$ eine reelle Matrix. Sei

$$U^{\text{tr}} E V = \Sigma$$

eine nach Satz 7.2.2 existierende Singulärwertzerlegung. Mit der $n \times m$ -Matrix

$$\Sigma^+ := \text{diag}(1/\varsigma_1, \dots, 1/\varsigma_r, 0, \dots, 0)$$

heißt

$$E^+ := V \Sigma^+ U^{\text{tr}} \in \mathcal{R}^{n \times m}$$

verallgemeinerte Inverse oder Pseudoinverse von E .

Die Wohldefiniertheit der verallgemeinerten Inversen ist noch unklar, da die Transformationsmatrizen U und V nicht eindeutig bestimmt sind. Dieses zeigt der folgende Satz:

Satz 7.2.3 (Wohldefiniertheit der verallgemeinerten Inversen) [59] Sei $E \in \mathcal{R}^{m \times n}$ mit $r := \text{rang}(E)$. Dann gilt:

1. Ist $E^+ \in \mathcal{R}^{n \times m}$ eine Pseudoinverse zu E , so gelten die Aussagen

$$EE^+ = (EE^+)^{tr}, \quad E^+E = (E^+E)^{tr}, \quad EE^+E = E, \quad E^+EE^+ = E^+.$$

2. Durch die Eigenschaften

$$EF = (EF)^{tr}, \quad FE = (FE)^{tr}, \quad EFE = E, \quad FEF = F$$

ist eine Matrix $F \in \mathcal{R}^{n \times m}$ eindeutig bestimmt. Insbesondere ist die verallgemeinerte Inverse einer Matrix wohldefiniert.

Beweis: Zu 1.: Sei $E = U\Sigma V^{tr}$ eine Singulärwertzerlegung der Einflußmatrix und $E^+ = V\Sigma^+U^{tr}$ eine zugehörige Pseudoinverse. Dann ist

$$EE^+ = U \underbrace{\Sigma V^{tr} V \Sigma^+}_{=I} U^{tr} = U \Sigma \Sigma^+ U^{tr}$$

wegen

$$\Sigma \Sigma^+ = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-r}) \in \mathcal{R}^{m \times m}$$

eine symmetrische Matrix, also $EE^+ = (EE^+)^{tr}$. Entsprechend zeigt man, daß E^+E symmetrisch ist. Ferner gilt

$$EE^+E = U \underbrace{\Sigma V^{tr} V}_{=I} \Sigma^+ \underbrace{U^{tr} U}_{=I} \Sigma V^{tr} = U \underbrace{\Sigma \Sigma^+}_{=\Sigma} V^{tr} = E$$

und entsprechend $E^+EE^+ = E^+$.

Zu 2.: Angenommen, $F, G \in \mathcal{R}^{n \times m}$ besitzen die genannten Eigenschaften. Dann ist

$$\begin{aligned} F &= FEF = F(EF)^{tr} = FF^{tr}E^{tr} = FF^{tr}E^{tr}G^{tr}E^{tr} = F(EF)^{tr}(EG)^{tr} \\ &= (FEF)EG = FEG = (FE)^{tr}G = (FE)^{tr}(GEG) = (FE)^{tr}(GE)^{tr}G = E^{tr}F^{tr}E^{tr}G^{tr}G \\ &= E^{tr}G^{tr}G = (GE)^{tr}G = GEG = G, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

q.e.d.

Mit Hilfe der Pseudoinversen der Einflußmatrix kann nun die eindeutige Lösung minimaler euklidischer Norm bestimmt werden. Um Teil 2. des folgenden Satzes beweisen zu können, sei an die Definition des Spektralradius einer Matrix und den Zusammenhang mit der euklidischen Norm dieser Matrix erinnert:

Definition 7.2.3 Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{R}$ die Eigenwerte von $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$. Dann heißt

$$\rho(A) := \max_{j=1, \dots, n} |\lambda_j|$$

der Spektralradius von A .

Lemma 7.2.1 [59] Es ist $\|A\|_2 = \rho(A^{tr}A)^{1/2}$, $\forall A \in \mathcal{R}^{m \times n}$.

Beweis: Werner [59], Lemma 2.8 und anschließende Bemerkung.

Satz 7.2.4 [59] Sei $E \in \mathcal{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$, $r := \text{rang}(E)$. Sei $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^m$ und $\mathbf{s}^+ := E^+\mathbf{v}$. Dann gilt:

1. \mathbf{s}^+ ist die eindeutige Lösung minimaler euklidischer Norm des linearen Ausgleichsproblems (3).
2. Sind $\varsigma_1 \geq \dots \geq \varsigma_r$ die singulären Werte von E , so ist $\|E\|_2 = \varsigma_1$ und $\|E^+\|_2 = \frac{1}{\varsigma_r}$.

Beweis: Zu 1.: Es ist

$$E^+\mathbf{v} = V\Sigma^+U^{tr}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\varsigma_i} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i.$$

Für beliebiges $\mathbf{s} \in \mathcal{R}^n$ gilt:

$$\|E\mathbf{s} - \mathbf{v}\|_2^2 = \|\underbrace{U^{tr}EV}_{=\Sigma}(V^{tr}\mathbf{s}) - U^{tr}\mathbf{v}\|_2^2 = \sum_{i=1}^r [\varsigma_i(V^{tr}\mathbf{s})_i - \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle]^2 + \sum_{i=r+1}^m \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle^2.$$

\mathbf{s} ist also genau dann eine Lösung von (3), wenn

$$(*) \quad V^{tr}\mathbf{s} = \left(\frac{1}{\varsigma_1} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle, \dots, \frac{1}{\varsigma_r} \langle \mathbf{u}_r, \mathbf{v} \rangle, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \right)^{tr} \text{ mit } \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in \mathcal{R}$$

und aus

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{s}\|_2^2 = \|V^{tr}\mathbf{s}\|_2^2 = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle}{\varsigma_i} \right)^2 + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i^2$$

folgt, daß die nach Teil 4. von Satz 7.2.1 eindeutig existierende Lösung \mathbf{s}^+ des linearen Ausgleichsproblems (3) durch

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^+ &= V \left(\frac{1}{\varsigma_1} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle, \dots, \frac{1}{\varsigma_r} \langle \mathbf{u}_r, \mathbf{v} \rangle, 0, \dots, 0 \right)^{tr} \\ &= \sum_{i=1}^r \frac{1}{\varsigma_i} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}_i \\ &= E^+\mathbf{v} \end{aligned}$$

gegeben ist.

Zu 2.: Nach Lemma 7.2.1 gilt

$$\|E\|_2 = \rho(E^{tr}E)^{1/2} = \rho(V\Sigma^{tr} \underbrace{U^{tr}U}_{=I} \Sigma V^{tr})^{1/2} = \rho(V\Sigma^{tr}\Sigma V^{tr})^{1/2} = \rho(\Sigma^{tr}\Sigma)^{1/2} = \varsigma_1$$

und

$$\|E^+\|_2 = \rho((E^+)^{tr}E^+)^{1/2} = \rho(U\Sigma^+ \underbrace{V^{tr}V}_{=I} \Sigma^+ U^{tr})^{1/2} = \rho(\Sigma^+\Sigma^+)^{1/2} = 1/\varsigma_r.$$

q.e.d.

7.2.2.3 Verbesserung der Kondition der Einflußmatrix durch Regularisierung

Bisher wurde davon ausgegangen, daß die Meßwerte rauschfrei ermittelt wurden. Dieses ist in der Praxis leider nicht der Fall. Im folgenden wird sich herausstellen, daß die Lösung minimaler Norm s_c^+ des Ausgleichsproblems (3) bei verrauschten Meßdaten v^c ohne Beachtung des Rauschens extrem von der gesuchten Lösung minimaler Norm s^+ abweichen kann. Zu einer solchen extremen Abweichung kann es kommen, wenn die Einflußmatrix schlecht-konditioniert ist. Es soll nun der für weitere Überlegungen wichtige Begriff der Kondition einer Matrix eingeführt werden.

Definition 7.2.4 (Kondition einer Matrix) Ist $E \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $r := \text{rang}(E)$ und sind $\varsigma_1 \geq \dots \geq \varsigma_r$ die singulären Werte von E , so heißt

$$\text{cond}_2(E) = \|E\|_2 \|E^+\|_2 = \frac{\varsigma_1}{\varsigma_r}$$

die Kondition von E bezüglich der Spektralnorm.

Satz 7.2.5 Seien $E \in \mathcal{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $\text{rang}(E) = r$, sowie $v, \Delta v \in \mathcal{R}^m$ und $v^c = v + \Delta v$ gegeben. Seien s^+ bzw. $s_c^+ = s^+ + \Delta s$ die eindeutigen Lösungen minimaler euklidischer Norm der linearen Ausgleichsprobleme zu den Daten (E, v) bzw. (E, v^c) . Dann ist

$$\frac{\|\Delta s\|_2}{\|s^+\|_2} \leq \text{cond}_2(E) \frac{\|\Delta v\|_2}{\|EE^+v\|_2}.$$

Beweis: Es ist zunächst

$$\|\Delta s\|_2 = \|E^+(v + \Delta v) - s^+\|_2 = \|E^+\Delta v\|_2 \leq \|E^+\|_2 \|\Delta v\|_2.$$

Für s^+ gilt aber

$$\|s^+\|_2^2 = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\varsigma_i^2} |\langle u_i, v \rangle|^2 \geq \varsigma_1^2 \sum_{i=1}^r |\langle u_i, v \rangle|^2 = \varsigma_1^2 \left\| \sum_{i=1}^r \langle u_i, v \rangle u_i \right\|_2^2 = \varsigma_1^2 \|EE^+v\|_2^2,$$

so daß sich die Behauptung ergibt.

q.e.d.

Ist somit die Kondition der Einflußmatrix gering, wird der Fehler in den Daten nicht verstärkt und der relative Fehler in der Lösung bleibt akzeptabel.

Eine schlechte Kondition der Einflußmatrix E kann aber den Datenfehler Δv extrem verstärken. Dieser Effekt soll an einem Beispiel gezeigt werden:

Beispiel 7.2.1 Seien

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.9 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.1\delta \\ 1.9\delta \end{pmatrix}.$$

Eine Singulärwertzerlegung der Matrix $E = U\Sigma V^{tr}$ ergibt

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4+2\delta^2}} & 0 & \frac{-\delta}{\sqrt{2+\delta^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\delta^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2+\delta^2}} \\ \frac{\delta}{\sqrt{4+2\delta^2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2+\delta^2}} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2+\delta^2} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Stört man die Daten mit $\Delta \mathbf{v} = \epsilon \sum_{i=1}^3 u_i$ und wählt $\delta = 10^{-3}$ und $\epsilon = 10^{-2}$, ergibt sich

$$s_c^+ = E^+ \mathbf{v}^\epsilon = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\zeta_i} \langle \mathbf{v}^\epsilon, u_i \rangle \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} 9.1761 \\ -5.1661 \end{pmatrix}$$

und damit bei $\text{cond}_2(E) \approx 1414$ eine Verstärkung des Datenfehlers um den Faktor 707.

Ohne Berücksichtigung der Schlechtgestellttheit des linearen Ausgleichsproblems kann die Lösung unbrauchbar sein. Im folgenden soll erläutert werden, wie man mit Hilfe sogenannter Regularisierungsverfahren eine Konditionsverbesserung erzielen kann. Ziel ist es, Algorithmen zu konstruieren, welche automatisch auf das Rauschen in den Meßdaten und auf schlechte Konditionszahlen der Einflußmatrizen E_{akt} beim Lösen der zahlreichen linearen Ausgleichsprobleme während der kombinatorischen Optimierung reagieren. Es sollen Lösungen ausgeschlossen werden, die physiologisch nicht sinnvoll sind, und es soll vermieden werden, daß das Rauschen zu starken Einfluß auf die zu bestimmenden Quellstärken und Richtungen nimmt.

Der folgende Theorieteil wurde hauptsächlich dem Buch von A.K.Louis [29] entnommen. Zunächst werden Hilberträume und Normen eingeführt, um die später entwickelten Verfahren vergleichen zu können und um eine Umgebung für benötigte Beweise herzustellen. Die Theorie wurde für kompakte Operatoren entwickelt, um nicht nur Problemen zu begegnen, die aufgrund schlecht-konditionierter Matrizen entstehen. So können zum Beispiel Integraloperatoren „stark schlecht gestellte“ Probleme erzeugen (Fredholmsche Integralgleichung 1. Art).

Der Operator T heißt selbstadjungiert, wenn $T = T^*$ gilt (im endlichdimensionalen, reellen Fall $T = T^{\text{tr}}$). Für selbstadjungierte kompakte Operatoren kann folgender Spektralsatz angegeben werden:

Satz 7.2.6 ([23]) Sei $T \in K(X, X)$ selbstadjungiert, λ_n seien die Eigenwerte und v_n die zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren. Dann gilt für jedes $x \in X$

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n.$$

Ist ψ eine reellwertige Funktion auf dem Spektrum von T ($\lambda(T)$, siehe Index), so kann unter der Voraussetzung, daß die Summe konvergiert, $\psi(T) : X \rightarrow X$ durch

$$\psi(T)x = \sum_n \psi(\lambda_n) \langle x, v_n \rangle v_n,$$

definiert werden. Betrachtet man Operatoren $A \in K(X, Y)$, so ist A^*A selbstadjungiert und es können die Eigenwerte in der Numerierung $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ und die Eigenvektoren v_n bestimmt werden. Setzt man

$$s_n := +\sqrt{\lambda_n}, \quad u_n := s_n^{-1} A v_n,$$

so gilt

$$A v_n = s_n u_n \quad \text{und} \quad A^* u_n = s_n v_n, \quad (7.4)$$

zudem ist $\{v_n\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für $\overline{R(A^*)} = N(A)^\perp$ und $\{u_n\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$.

Definition 7.2.5 Die Menge von Tripeln $\{\zeta_n, u_n, v_n\}_{n \geq 0}$ heißt *singuläres System des Operators A* , die ζ_n heißen *Singulärwerte*.

Ist die Funktion ψ eine Potenzfunktion, so gilt für den selbstadjungierten, kompakten Operator $A^*A : X \rightarrow X$ die Darstellung

$$(A^*A)^\mu f = \sum_n \zeta_n^{2\mu} \langle f, v_n \rangle v_n. \quad (7.5)$$

Die Endlichkeit dieses Ausdrucks kann nur über Wachstumsbedingungen an die Entwicklungskoeffizienten $\langle f, v_n \rangle$ ermöglicht werden.

Satz 7.2.7 [29] Ist $A \in K(X, Y)$, $\nu > 0$, dann gilt

$$R((A^*A)^{\nu/2}) = D((A^*A)^{-\nu/2}) \cap N(A)^\perp.$$

Beweis: Es ist zu zeigen, daß

$$f \in D((A^*A)^{-\nu/2}) \cap N(A)^\perp \Leftrightarrow \exists g \in X \text{ mit } f = (A^*A)^{\nu/2}g.$$

Zu "⇐": Angenommen, es existiere ein $g \in X$ mit $f = (A^*A)^{\nu/2}g$. Es ist $((A^*A)^{\nu/2})^* = (A^*A)^{\nu/2}$ und da $g \in X$, gilt $\sum_n |\langle g, v_n \rangle|^2 < \infty$. Damit sieht man, daß

$$\begin{aligned} \|(A^*A)^{-\nu/2}f\|^2 &= \sum_n \zeta_n^{-2\nu} |\langle f, v_n \rangle|^2 \\ &= \sum_n \zeta_n^{-2\nu} |\langle (A^*A)^{\nu/2}g, v_n \rangle|^2 \\ &= \sum_n \zeta_n^{-2\nu} |\langle g, (A^*A)^{\nu/2}v_n \rangle|^2 \\ &= \sum_n |\langle g, v_n \rangle|^2 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

und damit $f \in D((A^*A)^{-\nu/2})$. Da $\overline{R(A^*)} = N(A)^\perp$, gilt $f \in N(A)^\perp$.

Zu "⇒": Nun nehme man an, daß $f \in D((A^*A)^{-\nu/2}) \cap N(A)^\perp$. Man definiere

$$g := \sum_n \zeta_n^{-\nu} \langle f, v_n \rangle v_n.$$

Mit $f \in D((A^*A)^{-\nu/2})$ und $g = (A^*A)^{-\nu/2}f$ folgt $g \in X$. Zusätzlich gilt

$$\begin{aligned} (A^*A)^{\nu/2}g &= \sum_n \zeta_n^{-\nu} \langle f, v_n \rangle (A^*A)^{\nu/2}v_n \\ &= \sum_n \langle f, v_n \rangle v_n \\ &= f \end{aligned}$$

und damit $f \in R((A^*A)^{\nu/2})$.

q.e.d.

Nun können Hilberträume eingeführt werden.

Lemma 7.2.2 [29] *Auf*

$$X_\nu = \{f \in D((A^*A)^{-\nu/2}) \cap N(A)^\perp\} = R((A^*A)^{\nu/2})$$

ist

$$\langle f, g \rangle_\nu := \sum_n \zeta_n^{-2\nu} \langle f, v_n \rangle \langle g, v_n \rangle \quad (7.6)$$

ein Skalarprodukt und

$$\|f\|_\nu := (\langle f, f \rangle_\nu)^{1/2} = \left(\sum_n \zeta_n^{-2\nu} |\langle f, v_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \quad (7.7)$$

eine Norm.

Das Lemma läßt sich durch einfaches Nachrechnen beweisen. Für $\mu \geq 0$ gilt $X_\nu \supset X_{\nu+\mu}$, $\{X_\mu\}$ bildet also eine Prähilbertskala. Folgende Lemmata werden für spätere Beweise benötigt.

Lemma 7.2.3 [29] *Es ist $\|Af\| = \|f\|_{-1}$.*

Beweis: Es gilt

$$\|Af\|^2 = \left\langle \sum_n \zeta_n \langle f, v_n \rangle v_n, \sum_k \zeta_k \langle f, v_k \rangle v_k \right\rangle = \sum_n \zeta_n^2 |\langle f, v_n \rangle|^2.$$

Setzt man $\nu = -1$ in (7), folgt die Behauptung.

q.e.d.

Lemma 7.2.4 [29] *Für $f \in X_{\max(\nu, \mu)}$ und $\theta \in [0, 1]$ gilt*

$$\|f\|_{\theta\nu+(1-\theta)\mu} \leq \|f\|_\nu^\theta \|f\|_\mu^{1-\theta}.$$

Beweis: Die Höldersche Ungleichung mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ lautet

$$\sum_n a_n b_n \leq \left(\sum_n a_n^p \right)^{1/p} \left(\sum_n b_n^q \right)^{1/q}.$$

Setzt man $p = \frac{1}{\theta}$ und damit $q = \frac{1}{1-\theta}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \|f\|_{\theta\nu+(1-\theta)\mu}^2 &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_n \zeta_n^{-2(\theta\nu+(1-\theta)\mu)} |\langle f, v_n \rangle|^2 \\ &= \underbrace{\sum_n \left(\zeta_n^{-2\nu} |\langle f, v_n \rangle|^2 \right)^\theta}_{=: a_n} \underbrace{\left(\zeta_n^{-2\mu} |\langle f, v_n \rangle|^2 \right)^{1-\theta}}_{=: b_n} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_n \zeta_n^{-2\nu} |\langle f, v_n \rangle|^2 \right)^\theta \left(\sum_n \zeta_n^{-2\mu} |\langle f, v_n \rangle|^2 \right)^{1-\theta} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \|f\|_\nu^{2\theta} \|f\|_\mu^{2(1-\theta)}. \end{aligned}$$

q.e.d.

In Analogie zum Unterkapitel 7.2.2.2 werden nun lineare, stetige Operatoren $A : X \rightarrow Y$ auf den Hilberträumen X, Y betrachtet und es werden Lösungen der Operatorgleichung erster Art $Af = g$ gesucht. Falls $g \in R(A)$, dann existiert im klassischen Sinne eine Lösung der Operatorgleichung. Betrachtet man das Funktional $J(f) := \|Af - g\|$ und bezeichne $P_{\overline{R(A)}} : Y \rightarrow Y$ die orthogonale Projektion auf den Abschluß des Wertebereiches von A , dann ergibt sich für Elemente $g \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ das Minimum dieses Funktionals zu $\min_{f \in X} J(f) = \|g - P_{\overline{R(A)}}g\|$. Ist A injektiv, so ist f als Lösung der Gleichung $Af = P_{\overline{R(A)}}g$ eindeutig bestimmt. Andernfalls kann als Zusatzbedingung das f mit kleinster Norm gesucht werden, welches $J(f)$ minimiert und man gelangt wieder zur verallgemeinerten Lösung. Darüber läßt sich wieder die verallgemeinerte Inverse

$$A^+ : D(A^+) = R(A) \oplus R(A)^\perp \subset Y \rightarrow X$$

definieren. In Analogie zu den endlichdimensionalen Räumen (Unterkapitel 7.2.2.2) sollen einige Eigenschaften der verallgemeinerten Inversen auf Hilberträumen zusammengetragen werden:

Satz 7.2.8 [29] Sei $g \in D(A^+)$. $f^+ := A^+g$ ist die eindeutige Lösung der Normalgleichung

$$A^*Af^+ = A^*g$$

in $\overline{R(A^*)} = N(A)^\perp$.

Bemerkung 7.2.1 [29] Ist $A \in L(X, Y)$, so gilt

1. $N(A^+) = R(A)^\perp$
2. $R(A^+) = N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$
3. A^+ ist linear
4. A^+ ist stetig $\Leftrightarrow R(A)$ ist abgeschlossen

Satz 7.2.9 [29] Sei $A \in K(X, Y)$ mit singulärem System $\{\zeta_n, u_n, v_n\}$. Dann ist für $g \in D(A^+)$

$$A^+g = \sum_{\zeta_n > 0} \frac{1}{\zeta_n} \langle g, u_n \rangle v_n.$$

Korollar 7.2.1 [29] Für $g \in Y$ gilt

$$P_{\overline{R(A)}}g = \sum_n \langle g, u_n \rangle u_n.$$

Ist $g \in D(A^+)$, dann gilt

$$P_{\overline{R(A)}}g = AA^+g.$$

Gilt sogar $g \in R(A)$, dann ist

$$P_{\overline{R(A)}}g = g = AA^+g.$$

Die in Satz 7.2.9 angegebene Darstellung der verallgemeinerten Inversen mittels des singulären Systems bietet die Möglichkeit, schlecht gestellte Probleme zu klassifizieren. Zunächst sei bemerkt, daß zu kleinen Singulärwerten ς_n bei schlecht gestellten Operatoren stark oszillierende singuläre Funktionen u_n und v_n gehören [29]. Liegen verrauschte Daten $g^\epsilon = g + \Delta g$ vor und werden die Singulärwerte sehr klein, wird der Anteil u_n des Rauschens Δg mit dem Faktor $1/\varsigma_n$ verstärkt und kann so einen starken Einfluß auf das Ergebnis haben:

$$1/\varsigma_n \langle g^\epsilon, u_n \rangle v_n = \left(\underbrace{\frac{1}{\varsigma_n} \langle g, u_n \rangle}_{\text{Information}} + \underbrace{\frac{1}{\varsigma_n} \langle \Delta g, u_n \rangle}_{\text{Rauschen}} \right) v_n$$

Zu Beispiel 7.2.1: Eine schlechte Kondition von E konnte für dieses Beispiel durch die Wahl $\delta = 10^{-3}$ erzeugt werden. Durch die Wahl $\epsilon = 10^{-2}$ war ein gutes Signal-Rausch-Verhältnis von $SN \approx 405$ der Meßdaten \mathbf{v}^ϵ angenommen worden. Im Ergebnis wurde der hochfrequente Eigenvektor \mathbf{v}_2 allein durch das Rauschen mit dem Faktor

$$\frac{\langle \Delta \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\varsigma_2} = \frac{\epsilon}{\delta} = 10$$

belegt, wohingegen der Informationsanteil mit

$$\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\varsigma_2} = \frac{2.1\delta - 1.9\delta}{\sqrt{2}\delta} = 0.1\sqrt{2}$$

vernachlässigbar klein war. Die gesuchte Lösung \mathbf{s}^+ ist somit sehr glatt, in der Lösung \mathbf{s}_ϵ^+ verstärkten sich aber durch die schlechte Kondition von E die hohen Frequenzen \mathbf{u}_2 des Rauschens.

Die Klassifizierung eines schlecht gestellten Operators sollte somit einmal das Fallen der Singulärwerte berücksichtigen (Kondition des Operators), da damit eine mögliche und teils extreme Verstärkung von Anteilen der hochfrequenten Eigenvektoren am Rauschen ins Ergebnis einhergehen kann. Andererseits wäre eine Zusatzinformation in Form einer Glattheitsaussage über die Lösung f zu berücksichtigen. Eine solche Glattheitsaussage soll nun beschrieben werden durch

$$f \in X_\nu = R((A^*A)^{\nu/2}), \nu > 0.$$

Ist $f \in X_\nu$, so gilt

$$\|f\|_\nu^2 = \sum_n \varsigma_n^{-2\nu} |\langle f, v_n \rangle|^2 < \infty.$$

Die $\langle f, v_n \rangle$ müssen also genügend schnell fallen, damit die Reihe konvergieren kann. Je größer also das ν wird, desto kleiner müssen die Anteile der hohen Frequenzen v_n in f werden, d.h. desto glatter muß f werden. Diese Überlegungen führen zur folgenden Klassifizierung schlecht gestellter Probleme:

Definition 7.2.6 Sei $A \in K(X, Y)$ mit singulärem System $\{\varsigma_n, u_n, v_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ und habe A einen nicht endlichdimensionalen Bildbereich.

- Existiert ein $\alpha > 0$, so daß $\zeta_n = O(n^{-\alpha})$, dann wird der Operator A schlecht gestellt von der Ordnung α genannt.
- Ist der Operator schlecht gestellt von der Ordnung α und gilt für die Lösung des ungestörten Problems $f \in X_\nu$ mit $\nu = \frac{\beta}{\alpha}$, $\beta > 0$, so nennen man das Problem schlecht gestellt von der Ordnung (α, β) .
- Ist $\beta \ll \alpha$, so heißt das Problem stark schlecht gestellt.

Trotzdem Matrizen (endlichdimensionaler Bildbereich) nicht klassifiziert werden, wurde die Definition in die vorliegende Arbeit mit aufgenommen. In dieser Definition steckt eine wichtige Aussage, welche auf endlichdimensionale schlecht gestellte lineare Ausgleichsprobleme übertragen werden kann: Sind die gesuchten Lösungen s hochfrequent (β kann nur klein gewählt werden) und ist die Einflußmatrix E schlecht-konditioniert (großes α), so können bei verrauschten Meßwerten v^ϵ Probleme erwartet werden.

Bevor die Regularisierung schlecht gestellter Probleme vorgestellt wird, soll im folgenden der Begriff des „schlimmsten Fehlers“ definiert werden, da die sich anschließenden Sätze für spätere Beweise von Bedeutung sind.

Definition 7.2.7 Als schlimmsten Fehler bei der Lösung von $Af = g$ bezeichnet man

$$e_\nu(\epsilon, \rho) = \sup\{\|f\| : f \in N(A)^\perp, \|Af\| \leq \epsilon, \|f\|_\nu \leq \rho\}.$$

Satz 7.2.10 Für den schlimmsten Fehler gilt:

$$e_\nu(\epsilon, \rho) \leq \epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)}$$

Beweis: Mit $\theta = \frac{1}{\nu+1} \in [0, 1]$ und $\mu = -1$ erhält man aus Lemma 7.2.4

$$\|f\| = \|f\|_0 \stackrel{\text{Lemma 7.2.4}}{\leq} \|f\|_\nu^{1/(\nu+1)} \|f\|_{-1}^{\nu/(\nu+1)}.$$

Aus der Definition des schlimmsten Fehlers folgt damit

$$\begin{aligned} e_\nu(\epsilon, \rho) &\leq \|f\|_\nu^{1/(\nu+1)} \|f\|_{-1}^{\nu/(\nu+1)} \\ &\stackrel{\text{Lemma 7.2.3}}{=} \|f\|_\nu^{1/(\nu+1)} \|Af\|_{-1}^{\nu/(\nu+1)} \\ &\stackrel{\text{Def. } e_\nu}{\leq} \rho^{1/(\nu+1)} \epsilon^{\nu/(\nu+1)}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

q.e.d.

Satz 7.2.11 [29]

1. Sei $\epsilon > \|A\|^{\nu+1} \rho$. Dann gilt

$$e_\nu(\epsilon, \rho) = e_\nu(\|A\|^{\nu+1} \rho, \rho) = \|A\|^\nu \rho$$

2. Sei $\epsilon \leq \|A\|^{\nu+1}\rho$.

(a) Existiert ein ς_n mit $\varsigma_n = \left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{1/(\nu+1)}$, so gilt

$$e_\nu(\epsilon, \rho) = \epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)} = \varsigma_n^\nu \rho$$

(b) Ist $\varsigma_n \neq \left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{1/(\nu+1)}$ für alle n , so gilt

$$e_\nu(\epsilon, \rho) > \epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)} \frac{\varsigma_{n+1}}{\varsigma_n},$$

wobei n so gewählt ist, daß

$$\varsigma_{n+1} < \left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{1/(\nu+1)} < \varsigma_n.$$

Bevor dieser Satz bewiesen werden kann, wird ein weiteres Lemma benötigt.

Lemma 7.2.5 [29] Es sei $\nu \geq \mu$. Dann gilt

$$\|f\|_\mu \leq \|A\|^{\nu-\mu} \|f\|_\nu.$$

Beweis: Es ist zunächst $\|A\| = \varsigma_1$. Für $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ und endlichdimensionale Räume wurde das in Satz 7.2.4 bewiesen, für allgemeine Normen kann der Beweis in einführenden Büchern in die Funktionalanalysis ([23], [61]) nachgeschlagen werden. Es ist

$$\|f\|_\mu^2 \stackrel{\text{Def.}}{=} \varsigma_1^{-2\mu} \sum \left(\frac{\varsigma_n}{\varsigma_1}\right)^{-2\mu} |\langle f, v_n \rangle|^2.$$

Da $0 \leq \frac{\varsigma_n}{\varsigma_1} \leq 1$, ist $\left(\frac{\varsigma_n}{\varsigma_1}\right)^{-2\mu} \leq \left(\frac{\varsigma_n}{\varsigma_1}\right)^{-2\nu}$ und man erhält

$$\begin{aligned} \|f\|_\mu^2 &\leq \varsigma_1^{-2\mu} \sum \left(\frac{\varsigma_n}{\varsigma_1}\right)^{-2\nu} |\langle f, v_n \rangle|^2 \\ &= \varsigma_1^{2(\nu-\mu)} \sum \varsigma_n^{-2\nu} |\langle f, v_n \rangle|^2 \\ &= \varsigma_1^{2(\nu-\mu)} \|f\|_\nu^2 \\ &= \|A\|^{2(\nu-\mu)} \|f\|_\nu^2. \end{aligned}$$

q.e.d.

Jetzt kann Satz 7.2.11 bewiesen werden:

Beweis: Zu Teil 1.: Man betrachte die Menge

$$M_\nu(\epsilon, \rho) = \{f \in N(A)^\perp : \|Af\| \leq \epsilon, \|f\|_\nu \leq \rho\}.$$

Nach Voraussetzung ist $\|A\|^{\nu+1}\rho < \epsilon$ und damit $M_\nu(\|A\|^{\nu+1}\rho, \rho) \subseteq M_\nu(\epsilon, \rho)$. Wähle man nun ein beliebiges $f \in M_\nu(\epsilon, \rho)$. Für dieses f gilt

$$\|Af\| \stackrel{\text{Lemma 7.2.3}}{=} \|f\|_{-1} \stackrel{\text{Lemma 7.2.5}}{\leq} \|A\|^{\nu+1} \|f\|_\nu \leq \|A\|^{\nu+1}\rho,$$

damit $M_\nu(\|A\|^{\nu+1}\rho, \rho) = M_\nu(\epsilon, \rho)$ und so auch $e_\nu(\epsilon, \rho) = e_\nu(\|A\|^{\nu+1}\rho, \rho)$.

Man wähle nun $f := f_1 v_1$ mit $f_1^2 = \zeta_1^{2\nu} \rho^2$. Dieses f ist Element der Menge M_ν , denn es gilt

$$\|f\|_\nu^2 = \zeta_1^{-2\nu} f_1^2 = \rho^2$$

und

$$\|Af\|^2 \stackrel{\text{Lemma 7.2.3}}{=} \|f\|_{-1}^2 = \zeta_1^2 f_1^2 = \zeta_1^{2\nu+2} \rho^2 = \|A\|^{2(\nu+1)} \rho^2 \stackrel{\text{Vor.}}{<} \epsilon^2.$$

Im weiteren gilt für dieses f

$$\|f\|^2 = f_1^2 = \zeta_1^{2\nu} \rho^2 = \|A\|^{2\nu} \rho^2$$

und da mit Lemma 7.2.4, $\theta = 1/(\nu+1)$ und $\mu = -1$ (wie im Beweis von Satz 7.2.10)

$$e_\nu(\epsilon, \rho) \stackrel{\text{Lemma 7.2.4}}{\leq} \underbrace{\|f\|_\nu^{1/(\nu+1)}}_{\rho^{1/(\nu+1)}} \underbrace{\|f\|_{-1}^{\nu/(\nu+1)}}_{\|A\|^\nu \rho^{\nu/(\nu+1)}} = \rho^{\left(\frac{1}{\nu+1} + \frac{\nu}{\nu+1}\right)} \|A\|^\nu = \|A\|^\nu \rho,$$

folgt $e_\nu(\epsilon, \rho) = \|A\|^\nu \rho$ und damit Teil 1. des Satzes.

Zu Teil 2.(a): Sei nun $\zeta_n = \left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{1/(\nu+1)}$. Man wähle wieder ein spezielles f , in diesem Fall $f := f_n v_n$ mit $f_n := \zeta_n^{-2} \epsilon^2$ mit oben gewähltem ζ_n . Wieder gilt $f \in M_\nu(\epsilon, \rho)$, denn

$$\|f\|_\nu^2 = \zeta_n^{-2\nu} f_n^2 = \zeta_n^{-2(\nu+1)} \epsilon^2 \stackrel{\text{Vor.}}{=} \left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{-2} \epsilon^2 = \rho^2$$

und

$$\|Af\|^2 \stackrel{\text{Lemma 7.2.3}}{=} \|f\|_{-1}^2 = \zeta_n^2 f_n^2 = \epsilon^2.$$

Für die Norm von f gilt

$$\|f\|^2 = f_n^2 = \zeta_n^{2\nu} \rho^2$$

und somit

$$e_\nu(\epsilon, \rho) \geq \|f\| = \zeta_n^\nu \rho = \left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{\nu/(\nu+1)} \rho = \epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)}.$$

Mit Satz 7.2.10 gilt somit die Gleichheit.

Zu Teil 2.(b): Sei nun $\zeta_n \neq \left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{1/(\nu+1)} \forall n$. Aus

$$\epsilon \leq \|A\|^{\nu+1} \rho = \zeta_1^{\nu+1} \rho$$

folgt $(\epsilon/\rho)^{1/(\nu+1)} \leq \zeta_1$, so daß man ein n findet mit

$$(*) \quad \zeta_{n+1} < \left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{1/(\nu+1)} < \zeta_n.$$

Wählt man mit diesem n $f := f_n v_n$ mit $f_n := \zeta_n^{-2} \epsilon^2$, so gilt wieder $f \in M_\nu(\epsilon, \rho)$, denn

$$\|f\|_\nu^2 = \zeta_n^{-2\nu} f_n^2 = \zeta_n^{-2(\nu+1)} \epsilon^2 < \left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)^{\frac{2(\nu+1)}{\nu+1}} \epsilon^2 = \rho^2$$

und

$$\|Af\|^2 \stackrel{\text{Lemma 7.2.3}}{=} \|f\|_{-1}^2 = \zeta_n^2 f_n^2 = \epsilon^2.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 e_{\nu}^2(\epsilon, \rho) &\geq \|f\|^2 = f_n^2 = \zeta_n^{-2} \epsilon^2 \\
 &= \epsilon^2 \left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{-2/(\nu+1)} \left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^{2/(\nu+1)} \zeta_n^{-2} \\
 &= \left(\epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)}\right)^2 \left(\left[\frac{\epsilon}{\rho}\right]^{1/(\nu+1)} \zeta_n^{-1}\right)^2 \\
 &\stackrel{(*)}{>} \left(\epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)}\right)^2 \left(\frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_n}\right)^2
 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

q.e.d.

In späteren Anwendungen dieses Satzes wird ϵ die Norm des Datenfehlers sein. Ist also ρ so groß, daß für den schlimmsten Fehler die Bedingung $\|Af\| < \epsilon$ greift, so erhält man unter der Voraussetzung des Falles 2.(a), daß die Schranke angenommen wird. Für kompakte und polynomial schlecht gestellte Operatoren A liegt der Faktor $\frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_n}$ in der Nähe von 1, so daß die untere Schranke für den schlimmsten Fehler fast so groß ist wie die obere.

Es soll nun der Begriff der Regularisierung eingeführt werden:

Definition 7.2.8 Eine lineare Regularisierung von A^+ ist eine Familie von linearen Operatoren $\{T_{\gamma}\}_{\gamma>0}$, $T_{\gamma} : Y \rightarrow X$ mit folgender Eigenschaft: Es existiert eine Abbildung $\gamma : \mathcal{R}_+ \times Y \rightarrow \mathcal{R}_+$, so daß für alle $g \in D(A^+)$ und für alle $g^{\epsilon} \in Y$ mit $\|g^{\epsilon} - g\| \leq \epsilon$ gilt

$$\lim_{\substack{g^{\epsilon} \rightarrow g \\ \epsilon \rightarrow 0}} T_{\gamma(\epsilon, g^{\epsilon})} g^{\epsilon} = A^+ g.$$

γ wird Regularisierungsparameter genannt. Er wird so gewählt, daß

$$\lim_{\substack{g^{\epsilon} \rightarrow g \\ \epsilon \rightarrow 0}} \gamma(\epsilon, g^{\epsilon}) = 0$$

gilt. Hängt γ von g^{ϵ} ab, spricht man von einer a-posteriori, andernfalls von einer a-priori Parameterwahl.

Vergleicht man $T_{\gamma} g^{\epsilon}$ mit der verallgemeinerten Lösung $A^+ g$, so läßt sich der Gesamtfehler abschätzen durch

$$\|T_{\gamma} g^{\epsilon} - A^+ g\| \leq \|T_{\gamma} g^{\epsilon} - T_{\gamma} g\| + \|T_{\gamma} g - A^+ g\|.$$

Der erste Term wird Datenfehler, der zweite Regularisierungs- bzw. Filterfehler genannt. Werden die Daten immer exakter bereitgestellt, geht γ und damit der Filterfehler gegen Null. Im Weiteren ist γ so zu bestimmen, daß

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|T_{\gamma} g^{\epsilon} - T_{\gamma} g\| = 0.$$

Wird also das Signal-Rausch-Verhältnis in den Daten immer höher, konvergiert die Näherungslösung gegen die verallgemeinerte Lösung. Spezielle lineare Regularisierungen für

kompakte Operatoren erhält man nun ausgehend von der Spektralzerlegung des Operators A über

$$T_\gamma g = \sum_n \frac{1}{\varsigma_n} F_\gamma(\varsigma_n) \langle g, u_n \rangle v_n. \quad (7.8)$$

F_γ wird Filter genannt.

Definition 7.2.9 Das Filter F_γ heißt regularisierend, wenn

$$\sup_n |F_\gamma(\varsigma_n) \varsigma_n^{-1}| = c(\gamma) < \infty \quad (7.9)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} F_\gamma(\varsigma_n) = 1 \text{ punktweise in } \varsigma_n \quad (7.10)$$

$$|F_\gamma(\varsigma_n)| \leq c \quad \forall \gamma, \varsigma_n \quad (7.11)$$

Ohne Beweis soll folgender Satz zitiert werden:

Satz 7.2.12 [29] Die durch ein regularisierendes Filter erzeugten Operatoren T_γ sind Regularisierungen von A^+ mit $\|T_\gamma\| = c(\gamma)$.

Zu Beispiel 7.2.1: Ohne Regularisierung, d.h. durch die Wahl $T_\gamma = E^+$, ist der Gesamtfehler gleich dem Datenfehler:

$$\|T_\gamma v^\epsilon - E^+ v\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 9.17 \\ -5.16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.9 \end{pmatrix} \right\|_2 \approx 10$$

Später wird gezeigt, daß eine mögliche Regularisierung bzw. Konditionsverbesserung darin besteht, auf den zweiten Summanden der Pseudoinversen zu verzichten (abgeschnittene Singulärwertzerlegung). Damit wird sich der Gesamtfehler aus dem Datenfehleranteil

$$\|T_\gamma(\Delta v)\|_2 = \|T_\gamma(\epsilon \sum_{i=0}^3 u_i)\|_2 = \|\frac{\epsilon}{\varsigma_1} v_1\|_2 = \|\frac{0.01}{\sqrt{2+\delta^2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\|_2 \approx 0.00707$$

und dem Anteil des Filterfehlers

$$\|(E^+ - T_\gamma)v\|_2 = \|\frac{1}{\varsigma_2} \langle v, u_2 \rangle v_2\|_2 = \|\frac{0.1\sqrt{2}\delta}{\delta} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\|_2 = \sqrt{0.1^2 + 0.1^2} \approx 0.1414$$

zusammensetzen und man wird das Ergebnis

$$s_\gamma^+ = T_\gamma v^\epsilon = \frac{1}{\varsigma_1} \langle v^\epsilon, u_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 2.005 \\ 2.005 \end{pmatrix}$$

erhalten.

Die Kunst ist es nun, so geschickt zu regularisieren, daß der Gesamtfehler minimal wird. Abbildung 7.2 zeigt, wie sich Daten- und Filterfehler im allgemeinen für inverse und

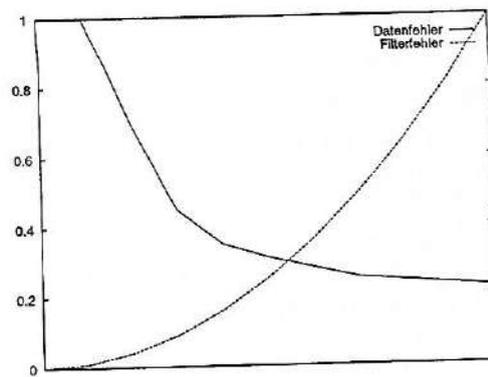


Abbildung 7.2: Daten- und Filterfehler, wie sie kennzeichnend für inverse und schlecht gestellte Probleme sind.

schlecht gestellte Probleme verhalten. Ohne Regularisierung ist der Datenfehler so groß, daß das Ergebnis nur noch wenig mit dem gesuchten Resultat gemein hat. Regularisiert man aber zu stark, wird zu viel Information verworfen, der Filterfehler wird also zu groß. Sei $T : Y \rightarrow X$ eine beliebige Abbildung. Man gehe weiterhin von der Glattheit der Lösung $f \in X_\nu$ und $\|f\|_\nu < \rho$ aus. Die Daten seien gegeben durch $\|\Delta g\| \leq \epsilon$. Definiert man

$$E_\nu(\epsilon, \rho, T) = \sup\{\|Tg^\epsilon - A^+g\| : \|\Delta g\| \leq \epsilon, \|A^+g\|_\nu \leq \rho\},$$

dann handelt es sich bei

$$E_\nu(\epsilon, \rho) := \inf_T E_\nu(\epsilon, \rho, T)$$

um den unvermeidbaren Fehler bei der Lösung des Problems $Af = g$ mit gestörten Daten g^ϵ und den Zusatzannahmen an die Lösung f . Mit dem folgenden Satz wird nun auch die Definition 7.2.7 des schlimmsten Fehlers in diesem Zusammenhang klar:

Satz 7.2.13 ([34], [29]) Für den schlimmsten Fehler $e_\nu(\epsilon, \rho)$ und den unvermeidbaren Fehler $E_\nu(\epsilon, \rho)$ gilt Gleichheit:

$$E_\nu(\epsilon, \rho) = e_\nu(\epsilon, \rho)$$

Nun ist es möglich, eine Klassifizierung der Regularisierungsverfahren anzugeben:

Definition 7.2.10 Das von γ abhängige Regularisierungsverfahren T_γ heißt optimal für ν , wenn es für alle $\epsilon > 0$ und für alle $\rho > 0$ einen Parameter $\gamma = \gamma(\epsilon, \rho)$ gibt, so daß

$$E_\nu(\epsilon, \rho, T_\gamma) \leq \epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)}$$

gilt.

Das Verfahren T_γ heißt ordnungsoptimal für ν , wenn es ein $c \in \mathcal{R}$ gibt, so daß für alle $\epsilon > 0$ und für alle $\rho > 0$ ein Parameter $\gamma = \gamma(\epsilon, \rho)$ existiert mit

$$E_\nu(\epsilon, \rho, T_\gamma) \leq c \epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)}.$$

Folgende Sätze zeigen, daß es unter der Glattheitsannahme $f \in X_\nu$ mit $\|f\|_\nu < \rho$ und Kenntnis von ρ möglich ist, den Regularisierungsparameter γ so zu wählen, daß ordnungsoptimale und sogar optimale Verfahren entstehen. Für unsere Anwendung ist ρ nicht bekannt. Aus diesem Grunde soll auf die Beweise verzichtet werden.

Satz 7.2.14 [29] Sei F_γ ein regularisierendes Filter mit

$$\sup_{0 < \zeta \leq \zeta_1} |\zeta^{-1} F_\gamma(\zeta)| \leq c\gamma^{-\alpha} \quad (7.12)$$

$$\sup_{0 < \zeta \leq \zeta_1} |(1 - F_\gamma(\zeta))\zeta^{\nu^*}| \leq c_{\nu^*} \gamma^{\alpha\nu^*} \quad (7.13)$$

für ein $\alpha > 0$. Dann ist die durch F_γ erzeugte Regularisierung mit der Parameterwahl

$$\gamma = \eta \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right)^{1/\alpha(\nu+1)}, \quad 0 < \eta \text{ fest}$$

ordnungsoptimal für alle ν mit $0 \leq \nu \leq \nu^*$. Die Schranke für den Fehler wird minimal mit

$$\gamma = \left(\frac{c}{\nu c_\nu} \frac{\epsilon}{\rho} \right)^{1/\alpha(\nu+1)},$$

und es gilt

$$\|T_\gamma g^\epsilon - A^+ g\| \leq (c\epsilon)^{\nu/(\nu+1)} (c_\nu \rho)^{1/(\nu+1)} (\nu+1) \nu^{-\nu/(\nu+1)}.$$

Auch Optimalität kann erzielt werden. Für die nun zitierten Sätze werden folgende Voraussetzungen benötigt:

- Das Filter F_γ gehe durch eine Dilatation aus einer Funktion Φ hervor, d.h.

$$F_\gamma(\zeta) = (\gamma^{-1}\zeta)^2 \Phi(\gamma^{-1}\zeta).$$

- Es gelte

$$\sup_{\zeta > 0} |(1 - F_\gamma(\zeta))\zeta^{\nu^*}| \leq c\gamma^{\nu^*}.$$

- Die Funktion $\psi(s) := 1 - s^2 \Phi(s)$ sei differenzierbar mit $\psi'(s) < 0$ für $s > 0$.

Die Funktion $H(s)$ sei folgendermaßen definiert:

$$H(s) := (\nu+1) \left\{ \left[\psi^{-1} \left(\frac{1}{\nu+1} \right) \right]^{-2\nu} s^{2\nu} \psi^2(s) + \frac{1}{\nu} \left[\psi^{-1} \left(\frac{1}{\nu+1} \right) \right]^2 s^2 \Phi^2(s) \right\}$$

Satz 7.2.15 [29] Unter den obigen Voraussetzungen und mit $H(s) \leq 1$ für alle $s \geq 0$ ist das durch F_γ erzeugte Verfahren T_γ mit der Parameterwahl

$$\gamma = \left(\psi^{-1} \left(\frac{1}{\nu+1} \right) \right)^{-1} \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right)^{1/(\nu+1)}$$

optimal für $\nu \leq \nu^*$.

Satz 7.2.16 [29] *Unter den obigen Voraussetzungen und mit $H(s) > 1$ für ein $s \geq 0$ ist das durch F_γ erzeugte Verfahren T_γ nicht optimal.*

Da es in der Praxis schwer sein wird, eine genaue Aussage über die Glattheit der Lösung f durch Angabe eines ν zu treffen und es nicht möglich erscheint, den Wert für ρ anzugeben, muß ein anderer Weg zur Wahl eines geeigneten Regularisierungsparameters γ gesucht werden. Das im folgenden vorgestellte Verfahren ist in der Literatur unter dem Begriff Diskrepanzprinzip zu finden (Louis [29], Vainikko [55], Hofmann [24], Friedrich [16]).

Algorithmus 7.2.1 *A-posteriori Parameterwahl des Diskrepanzprinzips für in γ stetige Abbildungen $|1 - F_\gamma(\zeta)|$:*

Es wird ausgegangen vom Verfahren (8) mit regularisierendem Filter F_γ , für das zusätzlich die Voraussetzungen

$$\sup_{0 < \zeta \leq \zeta_1} \zeta^{-1} |F_\gamma(\zeta)| \leq c\gamma^{-\alpha} \quad (7.14)$$

und

$$\sup_{0 < \zeta \leq \zeta_1} |(1 - F_\gamma(\zeta))\zeta^\nu| \leq c_\nu \gamma^{\alpha\nu} \quad (7.15)$$

mit $0 \leq \nu \leq \nu^*$ gelten. Es sei $\nu^* > 1$ und $g \in R(A)$.

Man wähle $1 < r \leq R$.

1. Ist $\|g^\epsilon\| \leq r\epsilon$, dann wähle man $\gamma = \infty$, so daß sich die Nulllösung für f ergibt. Die Daten liegen im Bereich des Rauschens und können nicht interpretiert werden.
2. Ist $\|g^\epsilon\| > r\epsilon$:

(a) Man wähle $\gamma \geq \epsilon^{1/\alpha}$ so, daß

$$r\epsilon \leq \|(I - AT_\gamma)g^\epsilon\| = \|g^\epsilon - Af_\gamma\| \quad (7.16)$$

und

$$R\epsilon \geq \|(I - AT_\gamma)g^\epsilon\| = \|g^\epsilon - Af_\gamma\|. \quad (7.17)$$

Ziel ist es also, eine gewisse Diskrepanz zu den Meßdaten zu lassen. Nähert sich der Defekt dem Rauschniveau, gibt man sich zufrieden. Bei schlecht gestellten Operatoren könnten hohe Frequenzen des Rauschens durch den Versuch der weiteren Defektminimierung die Lösung extrem verfälschen.

(b) Zusatzbedingung: Gibt es kein $\gamma \geq \epsilon^{1/\alpha}$ mit (16) und (17), dann wähle man $\gamma = \epsilon^{1/\alpha}$.

Es soll nun gezeigt werden, daß mit Hilfe dieser a-posteriori Parameterwahl für den Regularisierungsparameter γ in Abhängigkeit der Daten g^ϵ ein ordnungsoptimales Verfahren garantiert wird.

Im Hinblick auf zum Beispiel die Tikhonov-Phillips-Regularisierung sei zunächst vorausgesetzt, daß die Abbildung $\gamma \rightarrow |1 - F_\gamma(\varsigma)|$ für alle $\varsigma \in]0, \varsigma_1]$ stetig und monoton wachsend ist. Somit ist auch der Defekt

$$\begin{aligned} \|g^\epsilon - AT_\gamma g^\epsilon\|^2 &= \|P_{R(A)} g^\epsilon - g^\epsilon\|^2 + \|P_{R(A)} g^\epsilon - AT_\gamma g^\epsilon\|^2 \\ &= \|g^\epsilon - P_{R(A)} g^\epsilon\|^2 + \sum_n (1 - F_\gamma(\varsigma_n))^2 |g^\epsilon, u_n|^2 \end{aligned}$$

stetig und monoton wachsend in γ und mit Bedingung (12) ($\Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \infty} F_\gamma(\varsigma) = 0 \forall \varsigma \in]0, \varsigma_1]$) und Bedingung (11) folgt

$$\|g^\epsilon - AT_\gamma g^\epsilon\| \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} \|g^\epsilon\|.$$

Die a-posteriori Parameterwahl ist also durchführbar.

Lemma 7.2.6 [29] Für alle $f \in N(A)^\perp$ gilt:

1. $T_\gamma A f \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} f$
2. $\|(I - AT_\gamma) A f\| \gamma^{-\alpha} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 0$
3. Es sei $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge positiver Zahlen. Dann sind äquivalent:
 - (a) $T_{\gamma_n} A f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$
 - (b) $AT_{\gamma_n} A f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A f$

Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich nun folgender Satz über die Ordnungsoptimalität der vorgestellten Parameterwahl beweisen:

Satz 7.2.17 ([29],[55]) Das Filter F_γ erfülle die Voraussetzungen wie bei der Parameterwahl. Für alle $\varsigma \in]0, \varsigma_1]$ sei $\gamma \rightarrow |1 - F_\gamma|$ stetig und monoton wachsend. Sei $g \in R(A)$ und $\|g^\epsilon - g\| \leq \epsilon$. Der Parameter $\gamma = \gamma(\epsilon, g^\epsilon)$ sei gemäß der a-posteriori Parameterwahl des Diskrepanzprinzips gewählt.

1. Es gilt $T_\gamma g^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} A^+ g$
2. Seien $A^+ g = (A^* A)^{\nu/2} h$, $\|h\| \leq \rho$ und $0 < \nu \leq (\nu^* - 1)$. Dann gibt es eine von g , ϵ , ρ unabhängige Konstante d_ν , so daß

$$\|A^+ g - T_\gamma g^\epsilon\| \leq d_\nu \epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)}$$

Beweis: Zu 1.: Nach Voraussetzung und Satz 7.2.12 gilt

$$\|T_\gamma\| = c(\gamma) \leq c\gamma^{-\alpha}. \quad (7.18)$$

Da $g \in R(A)$, folgt mit Korollar 7.2.1

$$AA^+ g = P_{R(A)} g = g. \quad (7.19)$$

Da $|1 - F_\gamma|$ in γ stetig und monoton wachsend ist, gilt $\|(I - AT_\gamma)g^\epsilon\| \rightarrow \|g^\epsilon\|$ für $\gamma \rightarrow \infty$ und somit

$$\|I - AT_\gamma\| \stackrel{\text{Def.}}{=} \sup_{\|g^\epsilon\|=1} \|(I - AT_\gamma)g^\epsilon\| \leq \sup_{\|g^\epsilon\|=1} \|g^\epsilon\| = 1 \quad (7.20)$$

Somit kann folgende Abschätzung vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} (*) \quad \|A^+g - T_\gamma g^\epsilon\| &\leq \|(I - T_\gamma A)A^+g\| + \|T_\gamma((AA^+g) - g^\epsilon)\| \\ &\stackrel{(19)}{\leq} \|(I - T_\gamma A)A^+g\| + \|T_\gamma\| \|g - g^\epsilon\| \\ &\stackrel{(18)}{\leq} \|(I - T_\gamma A)A^+g\| + c\gamma^{-\alpha}\epsilon \end{aligned}$$

Sei $(\epsilon_n)_{n \in \mathcal{N}}$ eine Nullfolge und $\gamma_n = \gamma(\epsilon_n, g^{\epsilon_n})$.

Ist $\gamma_n \geq k > 0$, so folgt

$$\begin{aligned} \|A(I - T_{\gamma_n}A)A^+g\| &\stackrel{(19)}{=} \|(I - AT_{\gamma_n})g\| \\ &\leq \|(I - AT_{\gamma_n})g^{\epsilon_n}\| + \|(I - AT_{\gamma_n})(g^{\epsilon_n} - g)\| \\ &\stackrel{(17)}{\leq} R\epsilon_n + \|I - AT_{\gamma_n}\| \underbrace{\|g^{\epsilon_n} - g\|}_{\leq \epsilon_n} \\ &\stackrel{(20)}{\leq} (R+1)\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

und mit Teil 3. des Lemmas 7.2.6 $(I - T_{\gamma_n}A)A^+g \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Da γ_n echt größer Null ist, gilt zudem $\gamma_n^{-\alpha}\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ist γ_n nicht von Null weg beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $N' \subset \mathcal{N}$ mit $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $n \in N'$. Da mit $g \in R(A)$ $A^+g = f^+ \in N(A)^\perp$ folgt, erhält man unter Anwendung von Lemma 7.2.6, Teil 1.

$$\|(I - T_{\gamma_n}A)A^+g\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Konvergenz des zweiten Summanden in (*) kann folgendermaßen gezeigt werden: Da $\|(I - AT_{\gamma_n})(g^{\epsilon_n} - g)\| \leq \epsilon_n$, ist

$$\begin{aligned} (**) \quad (r-1)\epsilon_n &\stackrel{(16)}{\leq} \|(I - AT_{\gamma_n})g^{\epsilon_n}\| - \|(I - AT_{\gamma_n})(g^{\epsilon_n} - g)\| \\ &\leq \|(I - AT_{\gamma_n})g\|, \end{aligned}$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} \gamma_n^{-\alpha}(r-1)\epsilon_n &\leq \|(I - AT_{\gamma_n})g\| \gamma_n^{-\alpha} \\ &= \|(I - AT_{\gamma_n})AA^+g\| \gamma_n^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 7.2.6 Teil 2. folgt nun $\gamma_n^{-\alpha}\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $n \in N'$ und damit ist Teil 1. des Satzes bewiesen.

Zu Teil 2. (a): Gilt $\|g^\epsilon\| \leq r\epsilon$, dann ist

$$(+ \quad) \quad \|g\| = \|g^\epsilon + (g - g^\epsilon)\| \leq \|g^\epsilon\| + \|g - g^\epsilon\| \leq (r+1)\epsilon.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
 (++) \quad \|A^+g\|_\nu^2 &= \|(A^*A)^{\nu/2}h\|_\nu^2 = \left\| \sum_k \zeta_k^\nu \langle h, v_k \rangle v_k \right\|_\nu^2 \\
 &= \sum_n \zeta_n^{-2\nu} \left| \sum_k \zeta_k^\nu \langle h, v_k \rangle v_k, v_n \right|^2 \\
 &= \sum_n |\langle h, v_n \rangle|^2 = \|h\|^2
 \end{aligned}$$

und somit folgt unter Anwendung von Lemma 7.2.4 mit $\theta = 1/(\nu+1)$ und $\mu = -1$

$$\begin{aligned}
 \|A^+g - T_\infty g^\epsilon\| &= \|A^+g\| \\
 &\stackrel{\text{Lemma 7.2.4}}{\leq} \|A^+g\|_{-1}^{\nu/(\nu+1)} \|A^+g\|_\nu^{1/(\nu+1)} \\
 &\stackrel{\text{Lemma 7.2.3}}{=} \|AA^+g\|_\nu^{\nu/(\nu+1)} \|A^+g\|_\nu^{1/(\nu+1)} \\
 &\stackrel{(+), (++)}{\leq} [(r+1)\epsilon]^{\nu/(\nu+1)} \|h\|^{1/(\nu+1)} \\
 &\stackrel{\text{Vor.}}{\leq} [(r+1)\epsilon]^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)}.
 \end{aligned}$$

Mit $d_\nu = (r+1)^{\nu/(\nu+1)}$ folgt die Ordnungsoptimalität.

Zu Teil 2. (b):(i) Sei nun $\|g^\epsilon\| > r\epsilon$. Es soll zunächst der erste Summand von (*) abgeschätzt werden. Findet man ein γ , so daß die Bedingung (17) gilt, dann erhält man mit $z := (I - T_\gamma A)h$ und

$$(-) \quad (I - T_\gamma A)A^+g \stackrel{\text{Vor.}}{=} (I - T_\gamma A)(A^*A)^{\nu/2}h = \sum_n \zeta_n^\nu (1 - F_\gamma(\zeta_n)) \langle h, v_n \rangle v_n = (A^*A)^{\nu/2}z$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 \|(I - T_\gamma A)A^+g\| &\stackrel{(-)}{=} \|(A^*A)^{\nu/2}z\| \\
 &\stackrel{\text{Lemma 7.2.4}}{\leq} \|(A^*A)^{\nu/2}z\|_{-1}^{\nu/(\nu+1)} \|(A^*A)^{\nu/2}z\|_\nu^{1/(\nu+1)} \\
 &\stackrel{\text{Lemma 7.2.3}}{=} \|A(A^*A)^{\nu/2}z\|_\nu^{\nu/(\nu+1)} \|z\|^{1/(\nu+1)} \\
 &\stackrel{(-)}{=} \|A(I - T_\gamma A)A^+g\|_\nu^{\nu/(\nu+1)} \|z\|^{1/(\nu+1)} \\
 &\stackrel{AA^+g=g}{=} \|(I - AT_\gamma)g\|_\nu^{\nu/(\nu+1)} \|z\|^{1/(\nu+1)} \\
 &\leq \left(\underbrace{\|I - AT_\gamma\|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\|g^\epsilon - g\|}_{\leq \epsilon} + \underbrace{\|(I - AT_\gamma)g^\epsilon\|}_{\leq R\epsilon} \right)^{\nu/(\nu+1)} \|z\|^{1/(\nu+1)} \\
 &\leq ((R+1)\epsilon)^{\nu/(\nu+1)} \|z\|^{1/(\nu+1)}.
 \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\|z\| = \left(\sum_n |(1 - F_\gamma(\zeta_n)) \langle h, v_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \sup_{0 < \zeta_n \leq \zeta_1} |1 - F_\gamma(\zeta_n)| \cdot \|h\| \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} c_0 \rho$$

und somit für den ersten Term von (*) insgesamt

$$\|(I - T_\gamma A)A^+g\| \leq (R+1)^{\nu/(\nu+1)} c_0^{1/(\nu+1)} \epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)}$$

(ii) Gilt die Bedingung (17) nicht, sei also $\gamma = \epsilon^{1/\alpha}$, erhält man für $c_\nu \epsilon^\nu \rho \leq 1$, d.h. für hinreichend kleines ϵ

$$\begin{aligned} \|(I - T_\gamma A)A^+g\| &= \|(I - T_\gamma A)(A^*A)^{\nu/2}h\| \\ &= \left\| \sum_n \zeta_n^\nu (1 - F_\gamma(\zeta_n)) \langle h, v_n \rangle v_n \right\| \\ &\leq \sup_{0 < \zeta_n \leq \zeta_1} \zeta_n^\nu |1 - F_\gamma(\zeta_n)| \cdot \|h\| \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{\leq} c_\nu \gamma^{\alpha\nu} \rho = c_\nu \epsilon^\nu \rho \\ &\leq c_\nu^{1/(\nu+1)} \epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)}. \end{aligned}$$

(i)+(ii) Nun soll noch der zweite Term von (*) abgeschätzt werden. Es muß gezeigt werden, daß der Regularisierungsparameter γ nicht zu klein wird. Aus

$$\begin{aligned} (r-1)\epsilon &\stackrel{(**)}{\leq} \|(I - AT_\gamma) \underbrace{AA^+g}_{=g}\| \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{\leq} \|(I - AT_\gamma)A(A^*A)^{\nu/2}h\| \\ &= \left(\sum_n \zeta_n^{2(\nu+1)} |1 - F_\gamma(\zeta_n)|^2 \langle h, v_n \rangle^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sup_{0 < \zeta_n \leq \zeta_1} \zeta_n^{\nu+1} |1 - F_\gamma(\zeta_n)| \right) \|h\| \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{\leq} c_{\nu+1} \gamma^{\alpha(\nu+1)} \rho \end{aligned}$$

folgt

$$\gamma^{-\alpha(\nu+1)} \epsilon^{\nu+1} \leq c_{\nu+1} \rho (r-1)^{-1} \epsilon^\nu.$$

Zieht man auf beiden Seiten die $(\nu+1)$.Wurzel, dann erhält man

$$\gamma^{-\alpha} \epsilon \leq (c_{\nu+1} \rho (r-1)^{-1})^{1/(\nu+1)} \epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)},$$

und somit eine Abschätzung für den zweiten Term von (*).

Zusammenfassend erhält man für den Fall 2.(b)(i)

$$d_\nu = (R+1)^{\nu/(\nu+1)} c_0^{1/(\nu+1)} + c(c_{\nu+1} \rho (r-1)^{-1})^{1/(\nu+1)}$$

und für den Fall 2.(b)(ii)

$$d_\nu = c_\nu^{1/(\nu+1)} + c(c_{\nu+1} \rho (r-1)^{-1})^{1/(\nu+1)}$$

und damit folgt die Behauptung.

q.e.d.

Auch für ein Regularisierungsverfahren T_γ mit Filter F_γ , für das $|1 - F_\gamma|$ eine nicht stetige Funktion in γ ist für $0 < \zeta \leq \zeta_1$, läßt sich ein Diskrepanzprinzip durchführen. Man gehe wieder von den Voraussetzungen 14 und 15, $0 \leq \nu \leq \nu^*$, $\nu^* > 1$, $g \in R(A)$ und $\|g^\epsilon - g\| \leq \epsilon$ aus.

Algorithmus 7.2.2 *A-posteriori Parameterwahl des Diskrepanzprinzips für in γ unste-tige $|1 - F_\gamma(\varsigma)|$:*

Man wähle $r > 1$ und $\theta > 1$.

1. Ist $\|g^\epsilon\| \leq R\epsilon$, dann wähle man $\gamma = \infty$, so daß sich die Nulllösung für f ergibt. Die Daten liegen im Bereich des Rauschens und können nicht interpretiert werden.

2. Ist $\|g^\epsilon\| > R\epsilon$:

(a) Man wähle $\gamma \geq \epsilon^{1/\alpha}$ so, daß es ein $\tilde{\gamma} \in [\gamma, \theta\gamma]$ gibt mit

$$\begin{aligned} r\epsilon &\leq \|(I - AT_{\tilde{\gamma}})g^\epsilon\| \\ R\epsilon &\geq \|(I - AT_\gamma)g^\epsilon\|. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Ziel ist es wiederum, eine gewisse Diskrepanz zu den Meßdaten zu lassen. Nähert sich der Defekt dem Rauschniveau, gibt man sich zufrieden. Bei schlecht gestellten Operatoren könnten hohe Frequenzen des Rauschens durch den Versuch der weiteren Defektminimierung die Lösung extrem verfälschen.

(b) Zusatzbedingung: Gibt es kein $\gamma \geq \epsilon^{1/\alpha}$ mit (21), dann wähle man $\gamma = \epsilon^{1/\alpha}$.

Satz 7.2.18 ([29],[55]) *Es gelten obige Voraussetzungen. Der Parameter γ sei gemäß obiger a-posteriori Parameterwahl gewählt. Für alle $\varsigma \in]0, \varsigma_1]$ sei $\gamma \rightarrow |1 - F_\gamma|$ monoton wachsend. Dann gilt:*

1. $T_\gamma g^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} A^+ g$

2. Seien $A^+ g = (A^* A)^{\nu/2} h$, $\|h\| \leq \rho$ und $0 < \nu \leq (\nu^* - 1)$. Dann gibt es eine von g, ϵ, ρ unabhängige Konstante d_ν , so daß

$$\|A^+ g - T_\gamma g^\epsilon\| \leq d_\nu \epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)}$$

Beweis: Analog dem Beweis des Satzes 7.2.17.

Durch konkrete Wahl des Filters F_γ in (8) können nun Regularisierungsverfahren entwickelt werden.

7.2.2.4 Die Abgeschnittene Singulärwertzerlegung (TSVD)

Definition 7.2.11 [29] *Wählt man das Filter F_γ durch*

$$F_\gamma(\varsigma) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \varsigma \geq \gamma \\ 0, & \text{falls } \varsigma < \gamma, \end{cases}$$

so nennt man das entsprechende Regularisierungsverfahren die abgeschnittene Singulärwertzerlegung (TSVD: Truncated Singular Value Decomposition).

Die TSVD wirkt wie ein Tiefpaßfilter, hohe Frequenzen werden abgeschnitten. Bei schlecht gestellten Problemen haben die hohen Frequenzen v_n des Lösungsraums durch die sehr klein werdenden zugehörigen Singulärwerte ς_n nur geringe Auswirkung auf die Daten g :

$$g = \sum_n \varsigma_n \langle f, v_n \rangle u_n$$

Die hochfrequenten Datenanteile u_n fallen damit unter das Rauschniveau. Somit sind die hochfrequenten Anteile der Lösung v_n nicht rekonstruierbar. Durch das Abschneiden verwirft man zwar Information, die Verstärkung des Rauschens in der Lösung bei Verwendung der vollen verallgemeinerten Inversen würde sich aber schlimmer auswirken. Die TSVD ist eine Methode, die Kondition des Problems zu verbessern.

Folgende Sätze seien erwähnt, sind aber für die Anwendung weniger von Interesse und bleiben unbewiesen.

Satz 7.2.19 [29] Bei Wahl von

$$\gamma = \eta \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right)^{1/(\nu+1)}, \quad \eta \in \mathcal{R}_+,$$

ist die TSVD ein ordnungsoptimales Regularisierungsverfahren für alle $\nu > 0$. Der Gesamtfehler minimiert sich für

$$\gamma = \left(\frac{\epsilon}{\nu \rho} \right)^{1/(\nu+1)}$$

und es gilt:

$$\|T_\gamma g^\epsilon - A^+ g\| \leq (\nu + 1) \nu^{-\nu/(\nu+1)} \epsilon^{\nu/(\nu+1)} \rho^{1/(\nu+1)}$$

Beweis: Satz 7.2.14 mit $c = \alpha = 1$ und $c_\nu = 1$.

Satz 7.2.20 [29] Die TSVD ist nicht optimal.

Die a-posteriori Parameterwahl 7.2.2 für in γ unstetige $|1 - F_\gamma(\zeta)|$ kann hier sehr einfach durchgeführt werden. Die Bedingung $\nu^* > 1$ stellt keine Einschränkung dar, da nach Satz 7.2.19 die TSVD für alle $\nu > 0$ ordnungsoptimal ist. Der Defekt ist

$$\begin{aligned} \|(I - AT_\gamma)g^\epsilon\|^2 &= \|g^\epsilon - \sum_n F_\gamma(\zeta_n) \langle g^\epsilon, u_n \rangle u_n\|^2 \\ &= \|g^\epsilon\|^2 - \sum_{\zeta_n > 0} F_\gamma(\zeta_n) |\langle g^\epsilon, u_n \rangle|^2 \\ &= \|g^\epsilon\|^2 - \sum_{\zeta_n > \gamma} |\langle g^\epsilon, u_n \rangle|^2 \end{aligned}$$

Da $\alpha = 1$ ist, werden also im Falle $\|g^\epsilon\| \geq R\epsilon$ solange die Terme $|\langle g^\epsilon, u_n \rangle|^2$ von $\|g^\epsilon\|^2$ abgezogen, bis entweder der Defekt kleiner als $R^2\epsilon^2$ oder $\zeta_n < \epsilon$ wird. Der entsprechende Index $n = N$ liefert dann den Regularisierungsparameter

$$\gamma = \gamma(\epsilon, g^\epsilon) = \zeta_N.$$

Die Skalarprodukte $\langle g^\epsilon, u_n \rangle$ werden ebenfalls zur Auswertung von $T_\gamma g^\epsilon$ benötigt, so daß neben dieser Auswertung pro Schritt nur eine Multiplikation und eine Subtraktion für die Überprüfung des Defektes dazukommt.

7.2.2.5 Tikhonov-Phillips-Regularisierung

Bei der Regularisierung bzw. Konditionsverbesserung nach Tikhonov-Phillips wird folgender Ansatz gemacht: Man bestimme $f^+ \in N(A)^\perp$ mit

$$\|f^+\| = \inf \{ \|f\| : f \in N(A)^\perp, \|Af - g^\epsilon\| \leq \zeta \}.$$

Dieses Problem hat eine eindeutige Lösung, die auf dem Rand der Einschränkungsmenge liegt: $\|Af^+ - g^\epsilon\| = \zeta$. Wäre nämlich $\tilde{\epsilon} := \|Af^+ - g^\epsilon\| < \zeta$, so folgten mit

$$\mu := \min \left\{ 1, \frac{\zeta - \tilde{\epsilon}}{\|A\| \cdot \|f^+\|} \right\}$$

für $f_\mu := (1 - \mu)f^+$ die Abschätzungen

$$\|Af_\mu - g^\epsilon\| = \|Af^+ - g^\epsilon - \mu Af^+\| \leq \|Af^+ - g^\epsilon\| + \mu \|A\| \cdot \|f^+\| \leq \zeta$$

und

$$\|f_\mu\| = (1 - \mu)\|f^+\| < \|f^+\|,$$

was aber der Minimaleigenschaft von f^+ widerspräche. Es ergibt sich das Problem: Man bestimme $f^+ \in N(A)^\perp$ mit

$$\|f^+\| = \inf \{ \|f\| : f \in N(A)^\perp, \|Af - g^\epsilon\| = \zeta \}.$$

Mit Hilfe eines Lagrangeschen Multiplikators kann dieses Minimierungsproblem nun in ein unrestringiertes Minimierungsproblem

$$J_\gamma(f) := \|Af - g^\epsilon\|^2 + \gamma^2 \|f\|^2 \stackrel{!}{=} \min \quad (7.22)$$

überführt werden.

Satz 7.2.21 [29] Sei $C := A^*A + \gamma^2 I$. Ist $f_\gamma \in N(A)^\perp$ Lösung der regularisierten Normalgleichungen

$$Cf_\gamma = A^*g^\epsilon, \quad (7.23)$$

d.h. $f_\gamma := C^{-1}A^*g^\epsilon$, so löst es auch das unrestringierte Minimierungsproblem (22). $T_\gamma = C^{-1}A^*$ ist ein lineares Regularisierungsverfahren.

Beweis: $C : N(A)^\perp \rightarrow X$ ist positiv definit

$$\begin{aligned} \langle Cf, f \rangle &= \langle (A^*A + \gamma^2 I)f, f \rangle = \langle A^*A f, f \rangle + \gamma^2 \langle f, f \rangle \\ &= \langle Af, Af \rangle + \gamma^2 \|f\|^2 = \|Af\|^2 + \gamma^2 \|f\|^2 \geq \gamma^2 \|f\|^2 > 0 \end{aligned}$$

und selbstadjungiert

$$C^* = (A^*A + \gamma^2 I)^* = A^*A + \gamma^2 I = C.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} J_\gamma(f) &= \langle Af - g^\epsilon, Af - g^\epsilon \rangle + \gamma^2 \langle f, f \rangle \\ &= \langle A^*Af, f \rangle - 2 \langle Af, g^\epsilon \rangle + \|g^\epsilon\|^2 + \gamma^2 \langle f, f \rangle \\ &= \langle Cf, f \rangle - 2 \langle Af, g^\epsilon \rangle + \|g^\epsilon\|^2 \\ &\stackrel{Cf_\gamma = A^*g^\epsilon}{=} \langle Cf, f \rangle - 2 \langle f, Cf_\gamma \rangle + \|g^\epsilon\|^2 + \langle Cf_\gamma, f_\gamma \rangle - \langle A^*g^\epsilon, f_\gamma \rangle \\ &\stackrel{C^* = C}{=} \langle C(f - f_\gamma), (f - f_\gamma) \rangle + \|g^\epsilon\|^2 - \langle g^\epsilon, Af_\gamma \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß f_γ das Tikhonov-Phillips Funktional J_γ minimiert. Aus der positiven Definitheit und Selbstadjungiertheit von C folgt, daß $T_\gamma = C^{-1}A^* : Y \rightarrow X$ stetig ist und $f_\gamma = C^{-1}A^*g^\epsilon$ für alle $g^\epsilon \in Y$ existiert. Es ist $\forall g^\epsilon \in Y$

$$\lim_{\substack{g^\epsilon \rightarrow g \\ \epsilon \rightarrow 0}} T_{\gamma(\epsilon, g^\epsilon)} g^\epsilon = (A^*A)^{-1}A^*g = A^+g$$

und damit ist T_γ eine lineare Regularisierung.

q.e.d.

Definiert man das Filter

$$F_\gamma(\varsigma) := \frac{\varsigma^2}{\varsigma^2 + \gamma^2}, \quad (7.24)$$

so läßt sich das Regularisierungsverfahren nach Tikhonov-Phillips wieder als Filterung der verallgemeinerten Inversen schreiben:

$$\begin{aligned} T_\gamma g^\epsilon &= (A^*A + \gamma^2 I)^{-1} A^* g^\epsilon \\ &= \sum_n \frac{\varsigma_n}{\varsigma_n^2 + \gamma^2} \langle g^\epsilon, u_n \rangle v_n \\ &= \sum_n \frac{1}{\varsigma_n} F_\gamma(\varsigma_n) \langle g^\epsilon, u_n \rangle v_n. \end{aligned}$$

Über die Tikhonov-Phillips-Regularisierung werden die hohen Frequenzen, d.h. die Anteile, welche einer starken Beeinflussung durch Datenfehler unterliegen, stark gedämpft.

Setzt man bzgl. der Anwendung auf die scharfe inverse Quellsuche $\bar{E} := \begin{pmatrix} E \\ \gamma I \end{pmatrix}$ und $\bar{v}^\epsilon := \begin{pmatrix} v^\epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$, so ist die Tikhonov-Phillips-Regularisierung äquivalent zu

$$\|\bar{E}s - \bar{v}^\epsilon\|_2^2 \stackrel{!}{=} \min.$$

Bezeichnen ς_i die Singulärwerte von E ($\text{rang}(E) = r$), dann sind die Singulärwerte von \bar{E} gegeben durch $\sqrt{\varsigma_i^2 + \gamma^2}$. Das Tikhonov-Phillips regularisierte Problem hat damit die im allgemeinen bessere Kondition

$$\text{cond}_2(\bar{E}) = \sqrt{\frac{\varsigma_1^2 + \gamma^2}{\varsigma_r^2 + \gamma^2}}.$$

Satz 7.2.22 [29] Die Tikhonov-Phillips-Regularisierung ist optimal für $0 \leq \nu \leq 2$.

Die Abbildung $|1 - F_\gamma(\varsigma)| = \frac{\gamma^2}{\varsigma_n^2 + \gamma^2}$ ist stetig und monoton wachsend in γ . Die a-posteriori Parameterwahl 7.2.1 ist somit durchführbar und die ordnungsoptimale Regularisierung ist nach Satz 7.2.17 gesichert.

Die Realisierung des Verfahrens erfolgt durch zunächst genügend große Wahl von γ . Das Gleichungssystem 23 kann, da C positiv definit ist, über die vom Rechenaufwand günstige Cholesky-Zerlegung gelöst werden. Über das Newton-Verfahren kann dann über Iteration in γ der Defekt auf $\zeta := R\epsilon$ gebracht werden:

$$\|E s_\gamma - v^\epsilon\| = R\epsilon$$

Die Konvergenz des Newton-Verfahrens ist gesichert (Engl [14]), denn der Defekt fällt monoton mit γ .

7.3 Lineare Regularisierung

Bei der scharfen inversen Quellsuche werden wenige, im Einflußraum verstreut liegende Quellen gesucht. Der Schwerpunkt des Modells liegt also darin, von wenigen fokalen Zentren der Quellaktivität auszugehen.

Bei der linearen Regularisierung wird innerhalb des Einflußraums an allen Einflußknoten Quellaktivität zugelassen. Das inverse Problem ist stark unterbestimmt, von wenigen hundert Meßwerten soll auf mehrere tausend Unbekannte geschlossen werden. Diese Unterbestimmtheit wird durch den sogenannten Modellterm, der die Regularität der Quellverteilung fordert, aufgehoben. Wie schon bei der scharfen inversen Quellsuche erhält man das Tikhonov-Phillips Funktional

$$J_\gamma(\mathbf{s}) = \underbrace{\|E\mathbf{s} - \mathbf{v}^c\|_B^2}_{\text{Datenterm}} + \gamma^2 \underbrace{\|D\mathbf{s}\|}_{\text{Modellterm}} \stackrel{!}{=} \min. \quad (7.25)$$

Für dieses Modell ist die Einflußmatrix E stark unterbestimmt und es wird die Zusatzinformation des Modellterms benötigt. Kleine Werte des Regularisierungsoperators γ sorgen dafür, daß der Schwerpunkt auf dem Erfüllen der Meßdaten liegt, während große Werte den Modellterm betonen. Der Regularisierungsoperator D kann so gewählt werden, daß die Quellstärken minimiert werden. Eine weitere Möglichkeit besteht im Minimieren des Gradienten der Quellstärke.

Der Ansatz führt auf ein Gleichungssystem mit positiv definiten Matrix, welches über konjugierte Gradientenverfahren gelöst werden kann. Der Parameter γ kann über die Try-and-Error-Methode der L-Kurve bestimmt werden. Man löst das Gleichungssystem für verschiedene γ und trägt doppeltlogarithmisch den Modellterm über dem Datenterm auf. Die entstehenden Kurven haben etwa L-Form, ein geeigneter Wert für γ befindet sich an der „Knickstelle“.

Ob dieses Modell zu sinnvollen Lösungen führt, sollte durch Simulationen bei bekannter Quellverteilung untersucht werden. Die Einflußmatrix ist stark singulär und auch bei Wahl eines kleinen γ ist der Modellterm von entscheidender Bedeutung, da er die fehlende Information auffüllt. Nicht überraschen sollte eine Lösung, die die Meßdaten gut erfüllt, aber so glatt ist, daß sie keine Aussagekraft mehr besitzt.

Kapitel 8

Scharfe Quellsuche in simulierter Sulcusstruktur

Die Zuordnung corticaler Areale zu sensorischen, motorischen und höheren psychischen Leistungen ist von besonderem medizinischen Interesse. Ungefähr zwei Drittel des Cortex liegt in Fissuren und Sulci, an deren gegenüberliegenden Wänden neuronale Aktivität verschiedener Funktionalität gefunden werden kann. So findet zum Beispiel die Abgrenzung des primär-motorischen Cortex vom primär-somatosensorischen Cortex im Sulcus centralis statt. Liegt ein Tumor auf einer Wand innerhalb dieses Sulcus, so wäre eine Information der Art „das dem Tumor zugrundeliegende Cortexareal ist von somatosensorischer Funktionalität“ klinisch-diagnostisch sehr hilfreich.

Um die scharfe inverse Quellsuche bezüglich solcher Problemstellungen zu testen, wurde ein Vierkugelmodell ($r_4 = 96\text{mm}$, $r_3 = 90\text{mm}$, $r_2 = 81\text{mm}$, $r_1 = 78\text{mm}$) entwickelt (Beckmann et al. [2], Wang et al. [57]). In die innerste Kugel wurde ein simulierter Sulcus, bestehend aus zwei gegenüberliegenden hyperbolischen Funktionen, eingelassen. Tiefer im Sulcus wurden die Sulcuswände parallel gestaltet mit einem Abstand von 6mm. Der Sulcus besitzt eine Tiefe von 22mm und eine Länge von 17mm.

Die gesamte Struktur wurde dann in das Programm CURRY eingelesen, um anhand der Geometrie ein aus Tetraedern bestehendes Finite Elemente Netz zu konstruieren. Im oberen Viertel der Struktur wurde das Netz auf einen mittleren Abstand der Tetraedereckpunkte von 3mm verfeinert, insgesamt ergab sich ein Netz mit 18213 Knotenpunkten und 97581 Tetraedern (siehe Abbildung 8.1).

Als Einflußraum wurde die gesamte innere Kugeloberfläche mit eingelassenem Sulcus (Cortex) verwendet. Es ergaben sich 3446 Einflußknoten. Unter der Bedingung des anatomischen Constraints (NC) wurde die Einflußmatrix berechnet.

Den verschiedenen Schichten wurden die Standardleitfähigkeiten (Einheit: $1/[\Omega \cdot \text{mm}]$) $\sigma_1 = 0.336 \cdot 10^{-3}$, $\sigma_2 = 0.1 \cdot 10^{-2}$, $\sigma_3 = 0.42 \cdot 10^{-5}$, $\sigma_4 = \sigma_1$ zugeordnet. 125 Elektroden wurden gleichmäßig auf der oberen Hälfte der äußeren Kugel verteilt. Die Referenzelektrode mit Knotennummer 18213 liegt etwas rechts über dem Sulcus (Abbildung 8.2, Mitte des Bildes). Diese Verteilung wurde vom 10/10-System mit 65 Elektroden abgeleitet, indem die zusätzlichen Elektroden äquidistant zu ihren Nachbarn gesetzt wurden.

Im folgenden wird nun die scharfe inverse Quellsuche mit dem Simulated Annealing Algorithmus zur Bestimmung der Dipolorte gekoppelt mit zwei verschiedenen Methoden, das lineare Ausgleichsproblem zur Bestimmung der übrigen freien Dipolparameter Richtung und Stärke in jedem Schritt der kombinatorischen Optimierung zu lösen. Es soll verglichen werden, wie sich eine Regularisierung bei der Lösung der Ausgleichsprobleme gegenüber

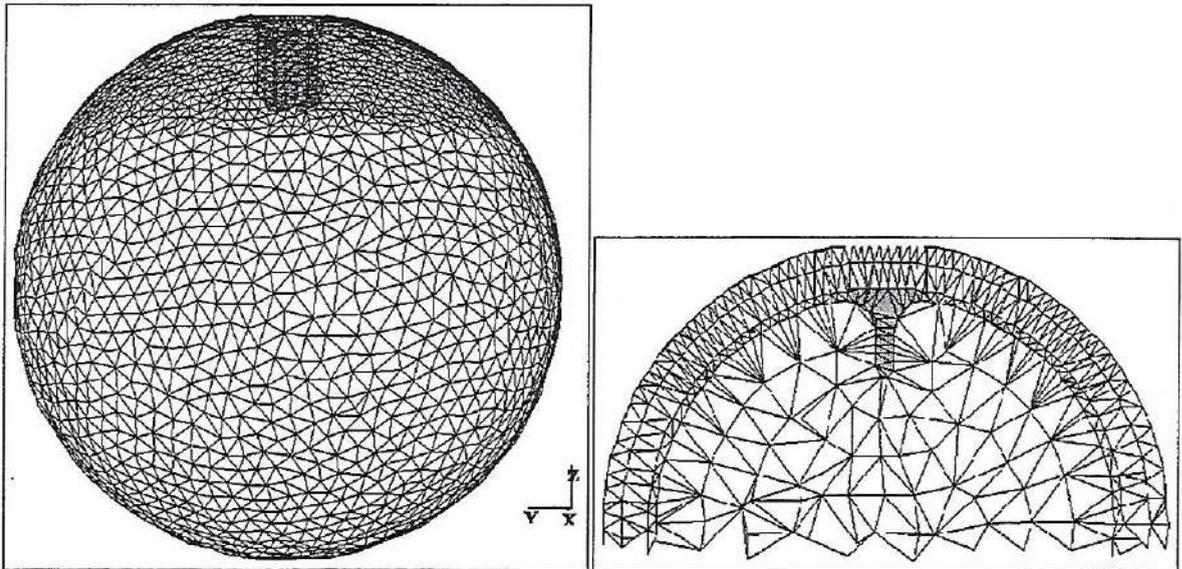


Abbildung 8.1: Links das Gesamtnetz des Vierkugelmodells mit simuliertem Sulcus, rechts ein Querschnitt (aus Beckmann et al. [2]).

einer nicht-regularisierten Lösung auf die zu bestimmenden Dipolparameter Ort, Richtung und Stärke auswirkt und inwieweit die Methoden stabil sind bei Überschätzung der Anzahl aktiver Quellen.

So wurden zwei verschiedene Verfahren des linearen Ausgleichs in CAUCHY implementiert, zunächst die nicht-regularisierte Lösung über eine komplette orthogonale Faktorisierung der Einflußmatrix E , im folgenden COF (Complete Orthogonal Factorization) genannt, und im Vergleich dazu die regularisierte Lösung über die abgeschnittene Singulärwertzerlegung (TSVD, Truncated Singular Value Decomposition) von E mit der automatischen a-posteriori Parameterwahl des Regularisierungsparameters γ wie in Kapitel 7, Algorithmus 7.2.2. Wenn nicht explizit vermerkt (Simulation 4), wurde die TSVD mit $R = 2$ und der Verwendung der Zusatzbedingung $\gamma > \epsilon$ so eingestellt, daß dem Rauschen mit großer Vorsicht begegnet wird.

Zur programmtechnischen Realisierung dieser Verfahren wurde die Programmbibliothek LAPACK (Version FORTRAN 77) verwendet (Linear Algebra PACKage). LAPACK stellt wichtige Werkzeuge zur Behandlung von Problemen der numerischen linearen Algebra bereit. So berechnet die Routine DGELSX eine nicht-regularisierte Lösung minimaler Norm unter Benutzung einer kompletten orthogonalen Faktorisierung der Einflußmatrix, welche nicht notwendigerweise von vollem Rang sein muß. Innerhalb des Unterprogramms CUTSVD (Implementierung der TSVD) im CAUCHY-Modul CAUCH9.F findet die LAPACK-Routine DGESVD zur Berechnung einer Singulärwertzerlegung der Einflußmatrix Verwendung.

In den nun folgenden Simulationsbeispielen wurden auf die innere Kugeloberfläche (Cortex) Referenzquellen gesetzt, welche nach anatomischer Vorüberlegung senkrecht zur Oberfläche orientiert waren (NC). Die dazu verwendeten und innerhalb des Sulcus lokalisierten Netzknoten erhalten im weiteren eine gesonderte Bezeichnung (siehe Abbildung 8.3). Zu diesen Referenzquellen wurde über das Finite-Elemente-Modell die Referenzpotentialverteilung an den Elektrodenpositionen berechnet, welcher dann weißes Rauschen aufsummiert wurde. Anhand der entstandenen „Meßpotentiale“ wurde eine inverse Quellsuche

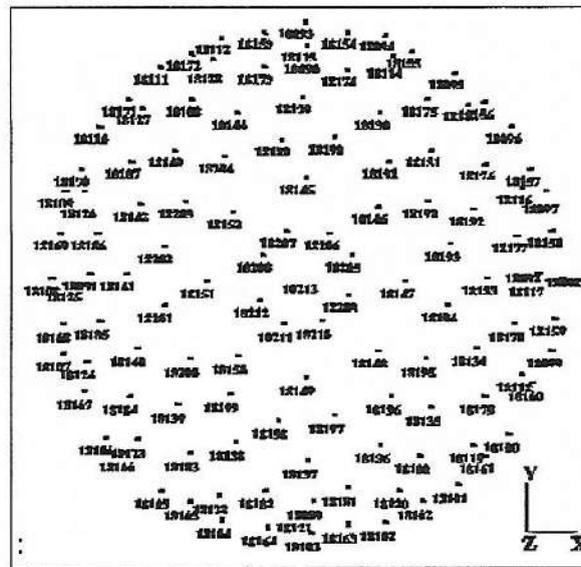


Abbildung 8.2: Die Anordnung der Elektroden samt Knotennummern auf der äußeren Kugel des Modells von oben gesehen (aus Beckmann et al. [2]).

mit Normalenconstraint bei gleicher Wichtung der einzelnen Meßkanäle durchgeführt. Im folgenden soll für die inverse Quellsuche Simulated Annealing in Kombination mit nicht-regularisierter Lösung des Ausgleichsproblems die Abkürzung SA-COF, bei der Kombination mit regularisierter Lösung die Abkürzung SA-TSVD verwendet werden.

8.1 Simulationsbeispiel 1:

Als Referenzdipolverteilung wurden 6 Dipole normierter Stärke (Abbildung 8.4, Bild links) gewählt, eine Quelle am Netzknoten 51 innerhalb des Sulcus, die restlichen fünf Quellen zur Simulation „biologischen Rauschens“ unten auf der Oberfläche der inneren Kugel. Betrachtet man die euklidische Norm der zu den einzelnen Quellen berechneten Potentialverteilung, so sieht man, daß der Dipol 51 mit einer Norm von 0.83 ca. 20-mal so starken Einfluß auf die Potentialverteilung hat wie die Rauschdipole, die eine wesentlich größere Entfernung zu den Meßelektroden aufweisen. Deren Norm lag bei ca. 0.04.

Die zu den Referenzdipolen berechnete Potentialverteilung wird in CAUCHY auf 5 Stellen genau in einer Datei abgelegt. Bei der inversen Quellsuche nach 6 Dipolen über SA-COF anhand dieser Referenzpotentialverteilung konnten die Rauschdipole bereits nicht mehr rekonstruiert werden. Dipol 51 wurde genau ermittelt, fünf weitere Dipole wurden unten auf der Kugeloberfläche gefunden. Deren Orte stimmten aber bereits nicht mehr mit den Orten der Referenzrauschdipole überein.

Es wurde nun weißes Rauschen mit einem SN von 17.9 zu den Referenzpotentialen addiert. Die euklidische Norm des Rauschens betrug $\epsilon = 0.19$. Ziel der inversen Suche kann somit nicht mehr die Ermittlung der Rauschdipole sein. Vielmehr sollte sichergestellt werden, daß die über dem Rauschniveau liegende Quelle 51 im Ergebnis herausgestellt wird. Eine inverse Suche nach einem Dipol stellt somit ein sinnvolles Modell dar und sowohl über SA-COF, als auch über SA-TSVD wurde der Sulcusdipol 51 ermittelt (ohne Abbildung).

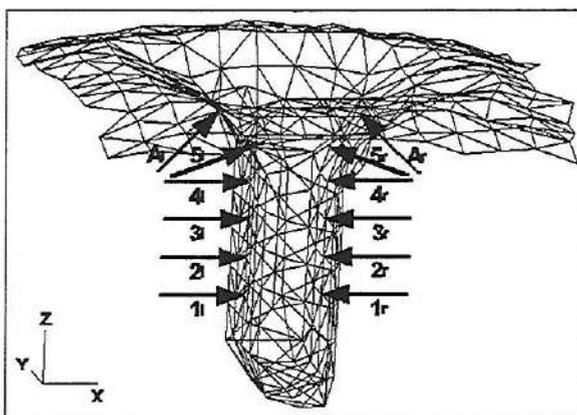


Abbildung 8.3: Positionen und Bezeichnungen der Referenzdipole auf den beiden Sulcuswänden (aus Beckmann et al. [2]).

In der Praxis ist jedoch die Anzahl zu suchender Quellen unbekannt. Würden einer gemessenen Potentialverteilung beispielsweise drei weit auseinanderliegende fokale Zentren mit vergleichbarer Quellstärke zugrunde liegen, so würde eine Suche nach zwei Dipolen sicherlich kein gutes Modell darstellen. Würde man hingegen nach mehr als drei Dipolen suchen, so wäre ein wünschenswertes Resultat das Herausstellen der drei fokalen Zentren über Dipole mit adäquater Stärke. Die restlichen, nur das Rauschen beschreibenden Dipole sollten eine möglichst geringe Aktivität erhalten.

Es wurde eine inverse Suche nach 6 Dipolen anhand der verrauschten Meßdaten durchgeführt. In Abbildung 8.4 (Bild rechts) ist das Ergebnis der inversen Quellsuche über SA-TSVD, in Abbildung 8.5 (Bild links) das Ergebnis über SA-COF dargestellt. Ohne Regularisierung wird eine Quellverteilung gefunden, die mit einem Defekt von 0.11 die Meßpotentiale gut erfüllt. Die Lösung der Quellsuche über SA-TSVD läßt einen Defekt von 0.164. Trotz der besseren Annäherung an die Meßdaten bleibt die Suche über SA-COF nicht stabil. Der Sulcusknoten 5l wird zwar gefunden, bleibt aber bei einer Stärke von 0.91 hinter allen anderen Dipolen zurück (Norm des stärksten gefundenen Dipols: 3.74). Die regularisierte Version SA-TSVD konzentriert sich auf den Sulcusdipol 5l (ermittelte Stärke 0.89) und vermeidet, daß der verbleibende, bereits geringe Defekt zu den Meßpotentialen über starke und sich gegenseitig auslöschende Dipole (wie im Ergebnis der SA-COF) erklärt wird.

In Abbildung 8.5 (Bild rechts) wird die regularisierte Lösung des Ausgleichsproblems nach Vorgabe der über SA-COF ermittelten Dipolorte dargestellt. Es ergibt sich ein Defekt von 0.196 zu den Meßpotentialen. Abbildung 8.6 erläutert die Funktionsweise der Regularisierung für dieses Beispiel: Die Kondition der zugehörigen Einflußmatrix beträgt 41.4. Der erste Eigenvektor \mathbf{v}_1 betont den Sulcusknoten 5l, alle weiteren Eigenvektoren tragen zu dessen Stärke kaum noch etwas bei. Der Faktor $\langle \Phi^\epsilon, \mathbf{u}_1 \rangle / \varsigma_1$ beträgt 0.98 ($\varsigma_1 = 0.86$) und der Defekt zu den Meßdaten fällt bereits nach einem Schritt von 0.87 auf 0.196 ab. Das Rauschniveau ist erreicht. Die TSVD hätte somit bereits nach einem Schritt abgeschnitten ($\gamma = \varsigma_1$)

$$T_\gamma \Phi^\epsilon = \frac{\langle \Phi^\epsilon, \mathbf{u}_1 \rangle}{\varsigma_1} \mathbf{v}_1,$$

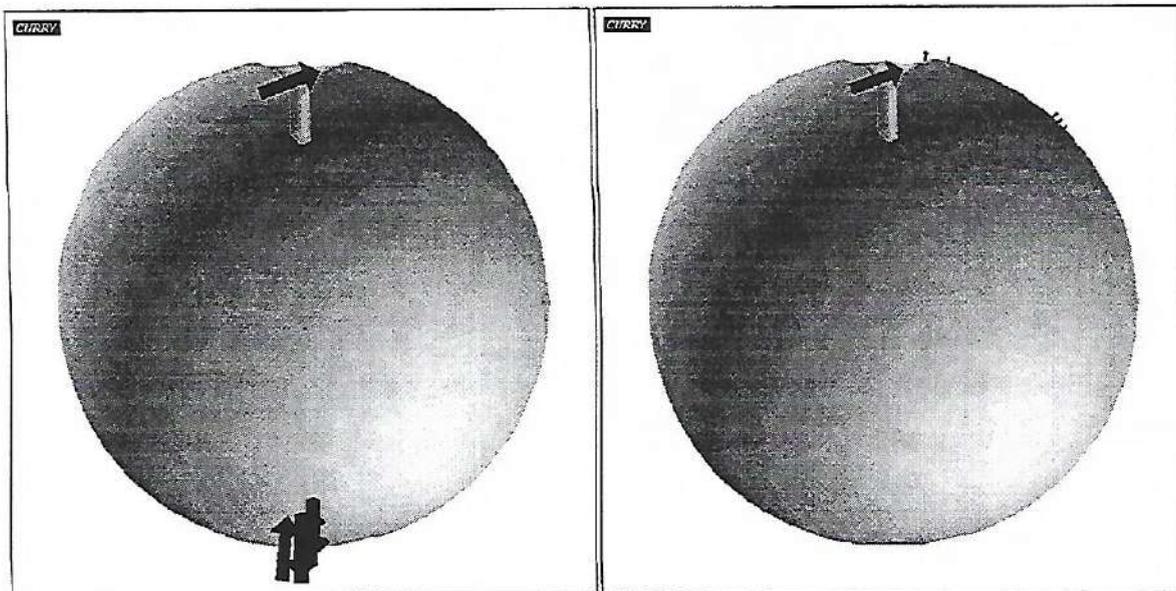


Abbildung 8.4: Simulation 1: Links die Referenzdipole; rechts daneben die Lösung der inversen Quellsuche nach 6 Dipolen über SA-TSVD

da das Diskrepanzprinzip $d^2 = 0.038 \leq 0.144 = R^2 \epsilon^2$ gegriffen hätte. Das Ergebnis wird in Abbildung 8.5 auf dem rechten Bild dargestellt. In den Schritten 2 bis 5 kann der Defekt zu den Meßdaten kaum verringert werden, die Quellstärken der Dipole an den Knoten 754, 2870 und 2831 nehmen allerdings bereits Werte an, die im Bereich der Quellstärke des Sulcusknötens 51 liegen. Durch Hinzunahme des 6. Singulärwertanteils wird der Defekt zwar auf 0.11 gedrückt, allerdings wird die nur schwach ($\varsigma_6 = 0.02$) zu den Meßpotentialen durchdringende Quellverteilung hoher Frequenz (\mathbf{v}_6) um den Faktor $\frac{\langle \Phi^\epsilon, \mathbf{u}_6 \rangle}{\varsigma_6} = -5.49$ in einer Weise verstärkt, die eine Interpretation des Ergebnisses ohne Regularisierung

$$A^+ \Phi^\epsilon = \sum_{n=1}^6 \frac{\langle \Phi^\epsilon, \mathbf{u}_n \rangle}{\varsigma_n} \mathbf{v}_n$$

nicht mehr zuläßt (Abbildung 8.5, Bild links).

Zusammenfassend kann zum Simulationsbeispiel 1 festgehalten werden: Durch Überschätzen der Anzahl aktiver Quellen kann ein inverser Suchalgorithmus ohne Regularisierung instabil werden. Nach dem Festlegen der Dipole, die die Meßdaten bis auf einen verhältnismäßig geringen Defekt bereits erfüllen (in diesem Beispiel allein der Dipol 51), kann der übrige und sich bereits im Rauschniveau befindende Defekt über Dipole zu erklären versucht werden, die sich gegenseitig fast auslöschen und hohe Stärken bekommen können. In ähnlicher Weise könnten dazu auch schwach in die Messwerte eingehende Quellen, wie zum Beispiel tiefe Quellen oder radiale Quellen bei einer MEG-Messung, benutzt werden. Diese erklären letztlich nur das Rauschen, können ohne Regularisierung aber so hohe Quellstärken erhalten, daß Ihnen bei der Interpretation der Lösung eine wichtige Rolle zugesprochen würde. Eine Regularisierung wird solche Anteile der verallgemeinerten Inversen abschneiden (TSVD) oder dämpfen (Tikhonov-Phillips). Quellen, welche sich gegenseitig fast auslöschen, können durchaus jede für sich einen starken Beitrag zu den Messwerten leisten (wie dieses Beispiel zeigt). Ein solches Ergebnis kann nicht

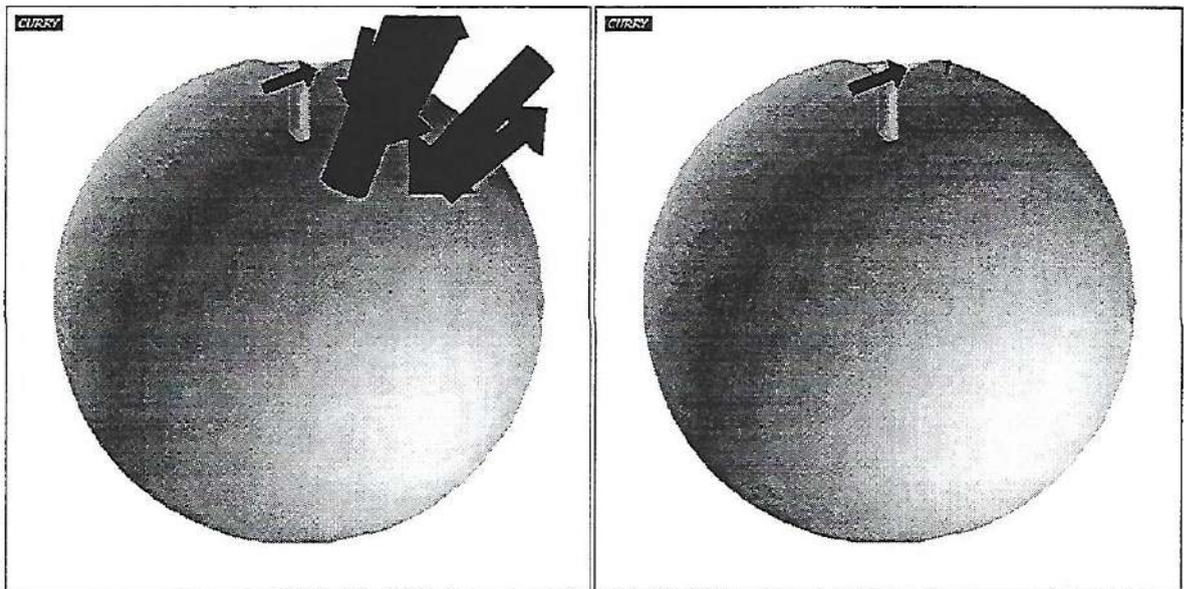


Abbildung 8.5: Simulation 1, Suche nach 6 Dipolen: Im Bild links die Lösung der inversen Suche SA-COF; rechts daneben die Lösung des linearen Ausgleichsproblems, das nach der Vorgabe der links gefundenen Dipolorte entsteht, über die TSVD.

mehr interpretiert werden.

Die inverse Suche über Simulated Annealing in Kombination mit einer Regularisierungsmethode scheint ein guter Ansatz zur Feststellung der „sicheren“ Quellen zu sein. Die Quellen, die einen starken Beitrag zu den Meßdaten leisten, werden gefunden und verschwinden nicht hinter Quellen mit ungewöhnlich hohen und physiologisch unerklärlichen Quellstärken „weniger sicherer“ Quellen.

8.2 Simulationsbeispiel 2:

Es wurden 6 Referenzdipole auf die Positionen 1l (Stärke 1), 2l (Stärke 1.1), 3l (Stärke 1.3), 4l (Stärke 1.1), 5l (Stärke 1) und Al (Stärke 1) der linken Sulcuswand gesetzt (Abbildungen 8.3 und 8.7). Die tiefer im Sulcus liegenden, in der Abbildung parallel angeordneten Quellen (1l, 2l, 3l, 4l) erzeugten nach einer Belegung mit normierter Quellstärke eine Potentialverteilung mit euklidischer Norm im Bereich 0.25, Knoten 5l 0.83 und Knoten Al 0.71. Insgesamt ergab sich eine Referenzpotentialverteilung der Norm 1.95. Weißes Rauschen mit Norm 0.30 wurde den Referenzpotentialen aufsummiert, so daß ein SN von 75.3 erzielt wurde.

Gibt man bei der inversen Quellsuche zunächst die Orte der Referenzdipole vor und betrachtet lediglich die Lösung des entstehenden linearen Ausgleichsproblems, so findet sich ein Beispiel, für das das Rauschen extreme Auswirkungen auf die Bestimmung der Dipolparameter Stärke und Richtung hat und das Konzept der Regularisierung extrem wichtig wird. Da die gewählten Dipolorte nahe beieinander liegen, ist die Wirkung vor allem der Quellen 1l, 2l, 3l und 4l auf die Referenzpotentiale sehr ähnlich und die entstehende Einflußmatrix E wird schlecht-konditioniert. Für unser Beispiel ergab sich eine Kondition von 1960. Abbildung 8.7 zeigt die Lösungen dieses Ausgleichsproblems über die COF (zehnfach verkleinerter Maßstab, Bild unten links) und über die TSVD (Bild unten rechts).

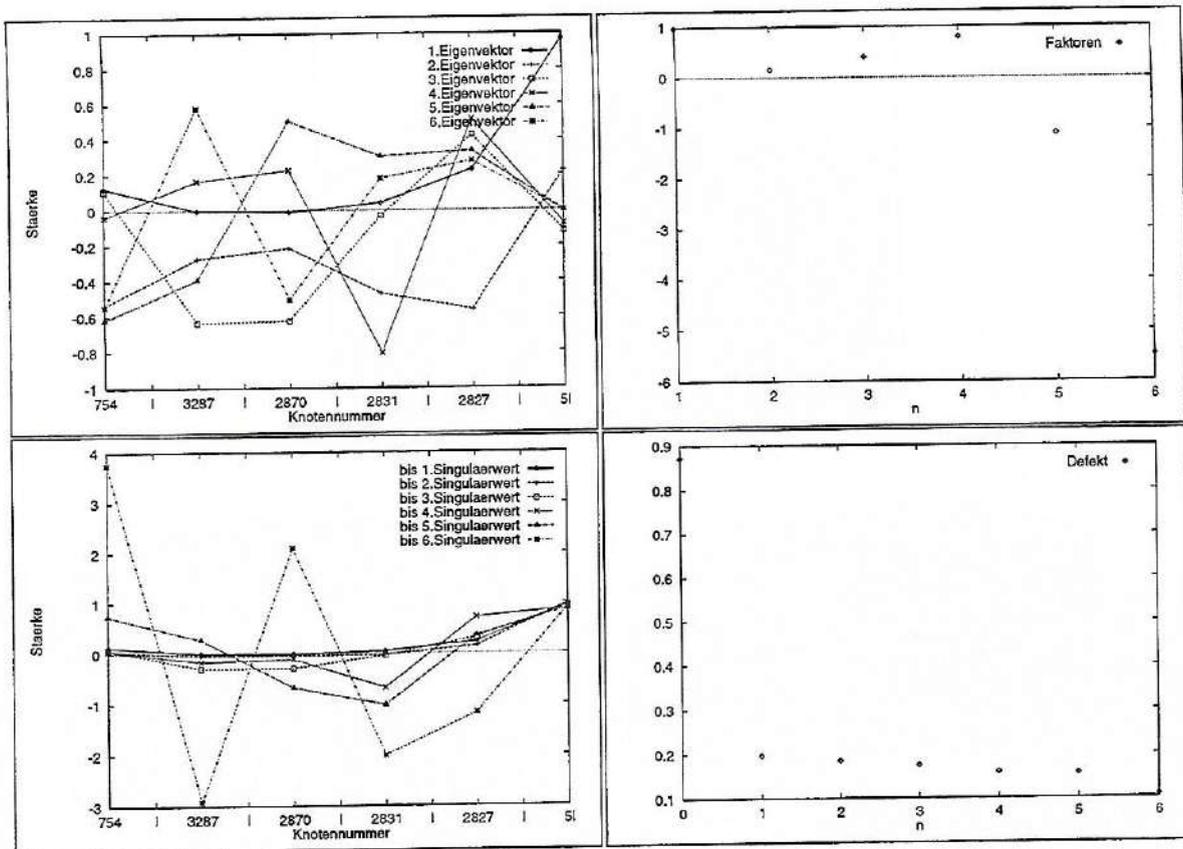


Abbildung 8.6: Simulation 1: Lösung des Ausgleichsproblems durch die Pseudoinverse nach Vorgabe der 6 Dipolorte, die über SA-COF berechnet wurden: Links oben die Eigenvektoren \mathbf{v}_n des Quellraums von $E^{tr}E$; rechts oben die Faktoren $\langle \Phi^\epsilon, \mathbf{u}_n \rangle / \varsigma_n$; Links unten die berechneten Dipolstärken nach Einbeziehung von nur einem (Abbildung 8.5, Bild rechts) bis zu allen sechs (Abbildung 8.5, Bild links) Singulärwertanteilen; rechts unten der Defekt nach Einbeziehung von n Singulärwertanteilen.

In Abbildung 8.8 wird dieses Ergebnis genauer erläutert. Der erste Eigenvektor \mathbf{v}_1 betont die Knoten 51 und A1, da diese einen stärkeren Beitrag zu den Meßdaten haben. Nach drei Singulärwertanteilen schneidet die TSVD ab ($\gamma = \varsigma_3$)

$$T_\gamma \Phi^\epsilon = \sum_{n=1}^3 \frac{\langle \Phi^\epsilon, \mathbf{u}_n \rangle}{\varsigma_n} \mathbf{v}_n,$$

denn das Kriterium (17) der a-posteriori Parameterwahl wie in Kapitel 7, Algorithmus 7.2.2 ist erfüllt ($d^2 = 0.29 \leq 0.36 = R^2 \epsilon^2$). In den Schritten 4 bis 6 kann der Defekt nur noch leicht verkleinert werden, allerdings geschieht das auf Kosten einer extremen Verstärkung der hohen Frequenzen im Lösungsraum. Der Eigenvektor \mathbf{v}_5 wird zum Beispiel mit einem Faktor $\frac{\langle \Phi^\epsilon, \mathbf{u}_5 \rangle}{\varsigma_5} = -57.9$ belegt und geht extrem in die Lösung ein. Man findet für die nahe beieinanderliegenden Quellen extrem hohe Quellstärken, die sich gegenseitig auslöschen. Eine solche Dipolverteilung ist nach heutigen physiologischen Kenntnissen nicht sinnvoll und sollte somit aus dem Lösungsraum ausgeschlossen werden. Man geht davon aus, daß für nahe beieinanderliegende Dendritenverbände A und B ein Stromfluß zur Cortexoberfläche hin innerhalb des Dendritenverbands A bei gleichzeitigem von der

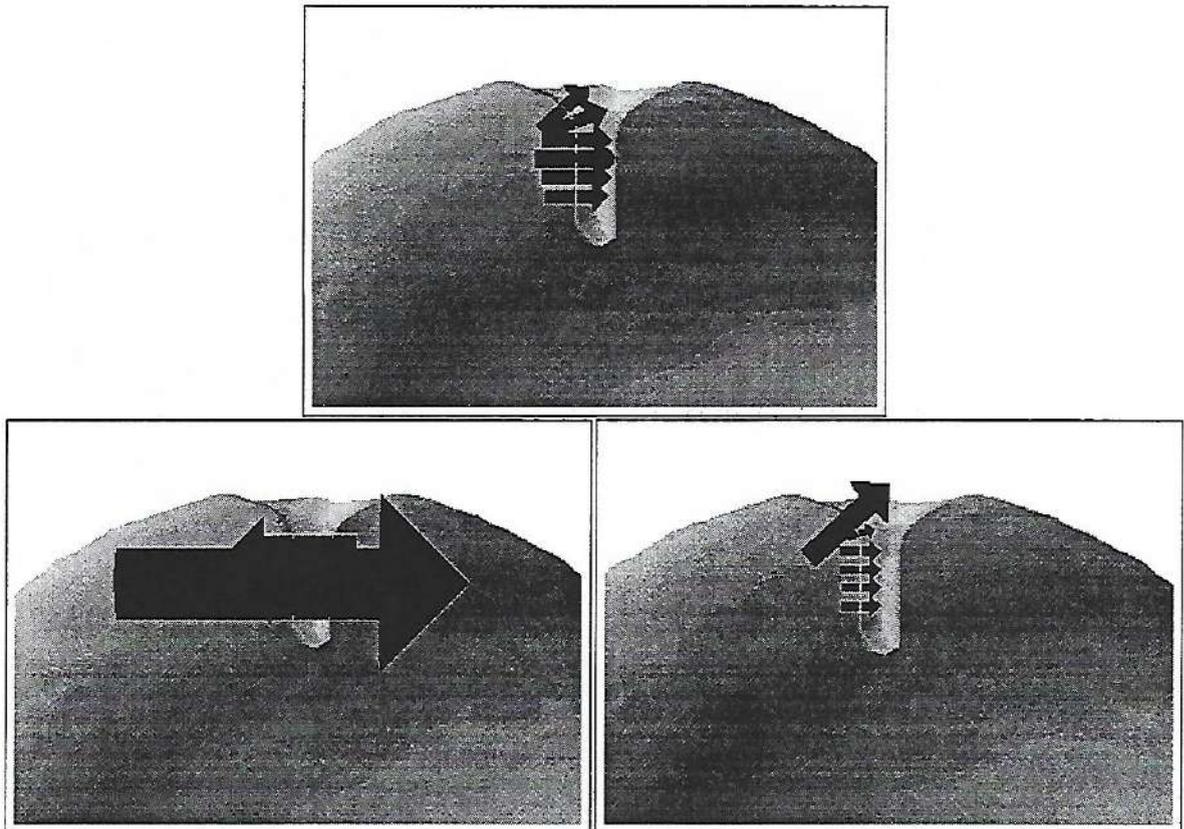


Abbildung 8.7: Simulation 2: Oben die Referenzdipole; unten links die Lösung des linearen Ausgleichsproblems nach Vorgabe der sechs Referenzdipolorte über die COF bei zehnfach verkleinerter Dipolstärke; rechts davon die Lösung der TSVD im Maßstab der Referenzdipole.

Cortexoberfläche weg in die Tiefe gerichtetem Fluß des Verbands B auszuschließen ist. Die Quellstärke wird als eine glatte Funktion angenommen. Das Konzept der Regularisierung ist somit für Fälle von nahe beieinanderliegenden Quellorten physiologisch begründet. Es wird eine extreme Verstärkung des Rauschens in das Ergebnis verhindert.

In der Praxis treten auch extrem schlechte Konditionen der Einflußmatrix für weit auseinanderliegende Dipolorte auf. Hier kann das Modell der Regularisierung nicht mehr über die Glattheitseigenschaft der Quellstärke begründet werden. Eine hohe Frequenz im Quellraum könnte durchaus physiologisch sinnvoll sein. Hier ist die Regularisierung als eine Methode zur Konditionsverbesserung anzusehen. Wiederum soll eine extreme Verstärkung des Rauschens in die Lösung verhindert werden, natürlich in diesem Fall auf Kosten der tatsächlich in der Lösung vorhandenen hohen Frequenz. Nimmt man aber mal an, die gesuchte Quellverteilung wäre hochfrequent (zum Beispiel $\mathbf{J} = \mathbf{v}_m$) und die Einflußmatrix der Referenzdipolorte hätte eine schlechte Kondition (ζ_m sehr klein im Verhältnis zu ζ_1), dann hätten die Meßdaten wegen

$$E\mathbf{J} = \sum_{n=1}^m \zeta_n \langle \mathbf{J}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{u}_n = \zeta_m \mathbf{u}_m$$

im Bereich des Rauschens gelegen. Solche Quellverteilungen können somit nicht gefunden

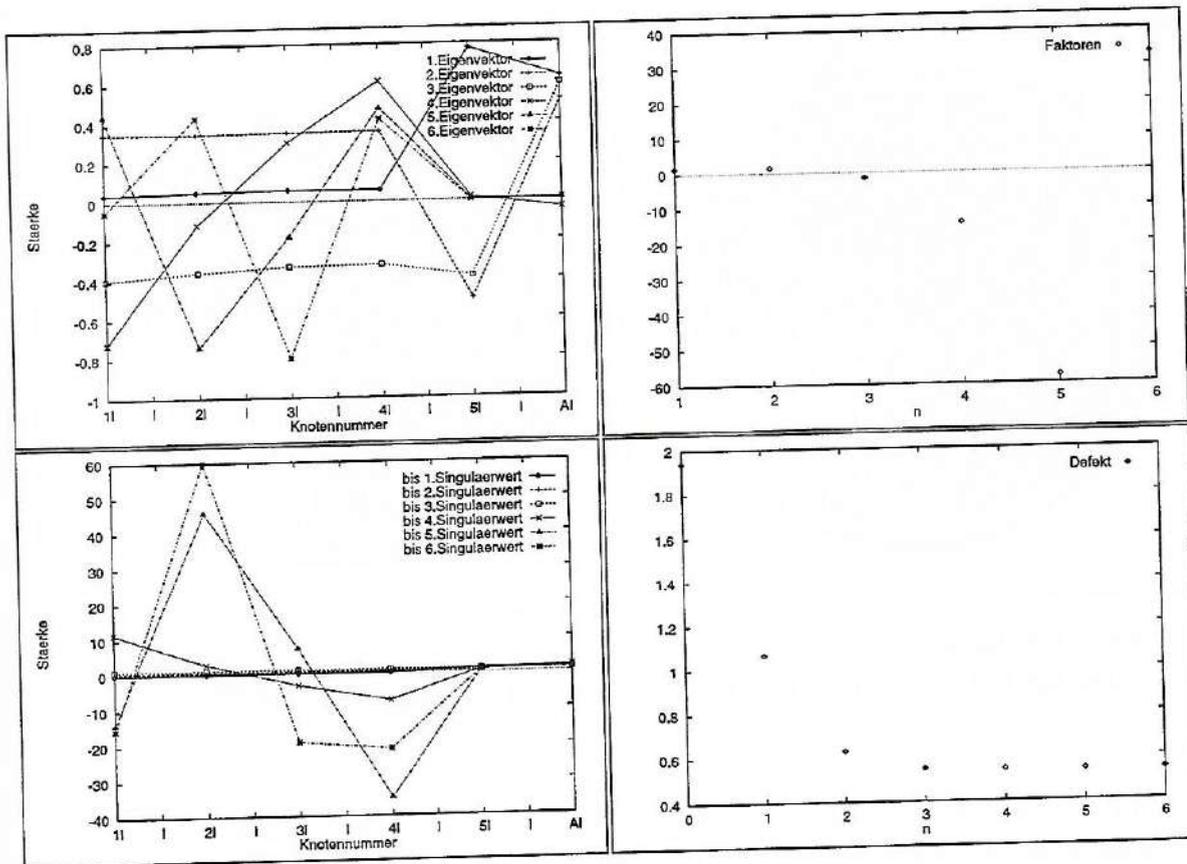


Abbildung 8.8: Simulation 2: Lösung des linearen Ausgleichsproblems nach Vorgabe der sechs Referenzdipolorte durch die verallgemeinerte Inverse: Im Bild links oben die Eigenvektoren \mathbf{v}_n des Quellraums von $E^{tr}E$; rechts oben die Faktoren $\langle \Phi^e, \mathbf{u}_n \rangle / \zeta_n$; unten links die berechneten Dipolstärken nach Einbeziehung von einem, über zwei (siehe Abbildung 8.7, Bild unten links) bis zu allen sechs (Abbildung 8.7, Bild unten rechts) Singulärwertanteilen; rechts unten der Defekt nach Einbeziehung von n Singulärwertanteilen.

werden und eine Regularisierungsmethode mit automatischer a-posteriori Parameterwahl des Regularisierungsparameters γ würde die Nulllösung (siehe Kapitel 7, Algorithmus 7.2.2) erzeugen.

Bei der ersten Quellrekonstruktion wurden fünf Dipole gesucht. In Abbildung 8.9 sind die Ergebnisse der SA-COF (Bild links) und der SA-TSVD (Bild rechts) dargestellt. Der stark zu den Meßabnehmern durchdringende Dipol 5l wird über beide Algorithmen gefunden. Ohne Regularisierung wird der Dipol 1l mit sehr hoher Stärke (9.9) auf der linken Wand des Sulcus durch den entgegengerichteten Dipol 2r der Stärke 4.9 auf der rechten Sulcuswand geschwächt, die SA-TSVD hingegen bleibt stabil auf der linken Wand des Sulcus. Die SA-COF erfüllte die Meßdaten bis auf einen Defekt von 0.258, die SA-TSVD ließ einen Defekt von 0.279.

Zur Interpretation der Ergebnisse werden nun die über SA-COF gefundenen Dipolorte vorgegeben, das zugehörige Ausgleichsproblem über die verallgemeinerte Inverse gelöst und in Abbildung 8.10 Schritt für Schritt dargestellt. Die Kondition der entstehenden Einflußmatrix betrug 20 ($\zeta_1 = 0.85$, $\zeta_5 = 0.043$). Der 1. Eigenvektor \mathbf{v}_1 betont den Knoten

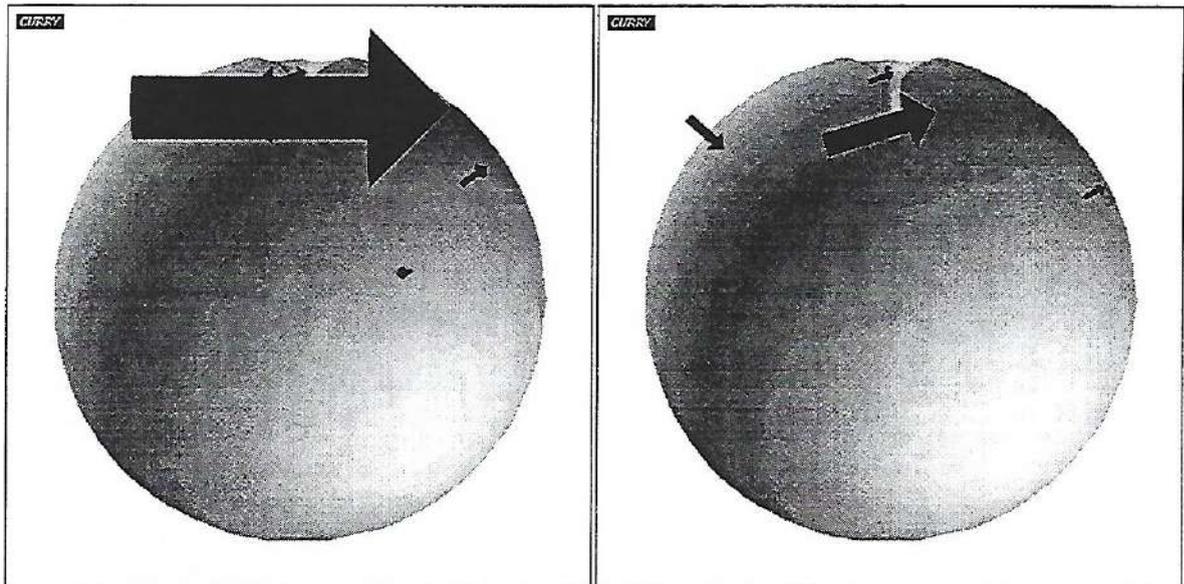


Abbildung 8.9: Simulation 2: Suche nach 5 Dipolen: Links die Lösung der inversen Quellsuche über SA-COF; rechts die Lösung der inversen Quellsuche über SA-TSVD.

5l und durch den Faktor $\frac{\langle \Phi^\epsilon, \mathbf{u}_1 \rangle}{\zeta_1} = -1.06$ erhält dieser bereits nach einem Schritt seine Referenzstärke. Im 2.Schritt liegt die Betonung auf den Knoten 1l und 2r, am Knoten 2r ergibt sich nach Einbeziehen des 2.Singulärwertanteils eine Stärke von -2.5. Durch die negative Quellstärke wird die Wirkung des Dipols 1l somit noch unterstützt, 1l und 2r zeigen in die gleiche Richtung. Durch die Zusatzbedingung $\gamma \geq \epsilon$ hätte die TSVD nach zwei Schritten bei einem Defekt von $d=0.689$ abgeschnitten ($\zeta_3 = 0.19 < 0.3 = \epsilon$), nach drei Singulärwertanteilen hätte das Diskrepanzprinzip gegriffen ($d^2 = 0.266 < 0.36 = R^2 \epsilon^2$). Der fünfte Anteil der verallgemeinerten Inversen zeichnet sich dadurch aus, daß \mathbf{v}_5 sowohl Dipol 1l, als auch Dipol 2r stark positiv betont und der ausgeprägte Faktor $\frac{\langle \Phi^\epsilon, \mathbf{u}_5 \rangle}{\zeta_5} = 9.71$ den Knoten 1l auf die Stärke 9.9 und den Knoten 2r auf die ebenfalls positive Stärke 4.9 treibt.

Werden durch SA innerhalb des Sulcus Knoten gewählt, welche sich auf gegenüberliegenden Wänden befinden, dann zeichnet sich eine hohe Frequenz im Quellraum (siehe \mathbf{v}_5) dadurch aus, daß die Dipole gegeneinandergerichtet sind, sich damit hinsichtlich ihrer Potentialverteilung schwächen und kleine Potentialwerte bzw. Rauschen beschreiben. Niedrige Frequenzen hingegen (siehe \mathbf{v}_2) zeichnen sich dadurch aus, daß die Dipole in eine Richtung zeigen und somit stark ausgeprägte Meßdaten erzeugen. Die hohen Frequenzen im Quellraum werden durch die Regularisierung der Kondition der zugehörigen Einflußmatrix entsprechend abgeschnitten (TSVD) bzw. gedämpft (Tikhonov-Phillips). In diesem Beispiel wirkt sich die Regularisierung wieder konditionsverbessernd aus. Es wird vermieden, daß das Rauschen zu stark in die Lösung eingeht.

Bei der Suche nach sechs und acht Dipolen (Abbildungen 8.11 und 8.12) bleibt auch die SA-COF auf der linken Sulcuswand stabil. Es scheint aber, daß über die SA-TSVD eine höhere Auflösung erzielt werden kann. Bei sechs (es liegen zwei Dipole der Stärke 2.5 auf benachbarten Knoten der linken Sulcuswand, im Bild schwer zu erkennen) und acht Dipolen wird die Aktivität auf der linken Sulcuswand durch die SA-TSVD höher aufgelöst. Bei acht Dipolen wird die SA-COF wieder „etwas“ instabil. Diesmal bekommt ein schwach

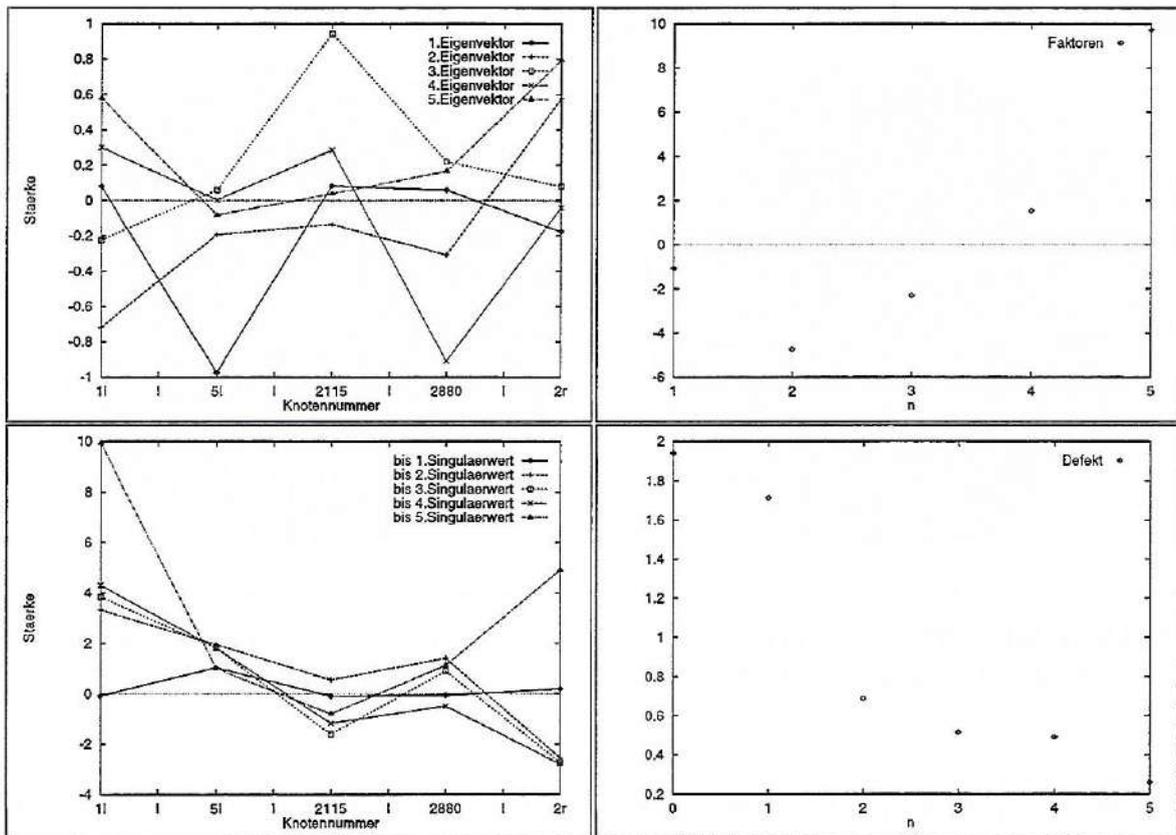


Abbildung 8.10: Simulation 2: Suche nach 5 Dipolen: Lösung des linearen Ausgleichsproblems nach Vorgabe der über SA-COF ermittelten Dipolorte durch die verallgemeinerte Inverse: Im Bild links oben die Eigenvektoren \mathbf{v}_n des Quellraums von $E^{tr}E$; rechts daneben die Faktoren $\langle \Phi^c, \mathbf{u}_n \rangle / \zeta_n$; links unten die berechneten Dipolstärken nach Einbeziehung von einem bis zu allen fünf Singulärwertanteilen; rechts der Defekt nach Einbeziehung von n Singulärwertanteilen.

zu den Meßdaten durchdringender Dipol unten links auf der Kugeloberfläche eine große Stärke. Die Aktivität des Knotens A1 wird scheinbar bei beiden Algorithmen durch drei Dipole beschrieben, rechts oben am Sulcusausgang und links und rechts im oberen Drittel der Kugel.

Zusammenfassend kann zur Simulation 2 festgehalten werden: Liegen die Quellen auf einer Sulcuswand, kann über die SA-TSVD durch die konditionsverbessernde Wirkung eine stabilere Quellrekonstruktion auf der betreffenden Wand erwartet werden. Es scheint, daß sich auch die Auflösung leicht verbessert gegenüber der SA-COF. Möglich ist ein „Hinüberutschen“ von Quellen auf die nichtbetroffene Sulcuswand mit einer Richtung, welche die Aktivität der Quellen auf der tatsächlich betroffenen Wand unterstützt (siehe dazu Simulation 4, Suche über SA-TSVD nach 7 Dipolen, Abbildung 8.18). Weniger wahrscheinlich ist eine Lösung mit sich schwächenden Dipolen auf gegenüberliegenden Wänden. Durch den geringen Abstand der Sulcuswände werden Dipole auf gegenüberliegenden Wänden von der Singulärwertzerlegung ähnlich behandelt wie benachbarte Dipole. Das Modell der Regularisierung kann nicht für jedes Sulcusexperiment physiologisch begründet werden. Kann man aber aufgrund des Experiments davon ausgehen, daß die aktiven Quellen nahe

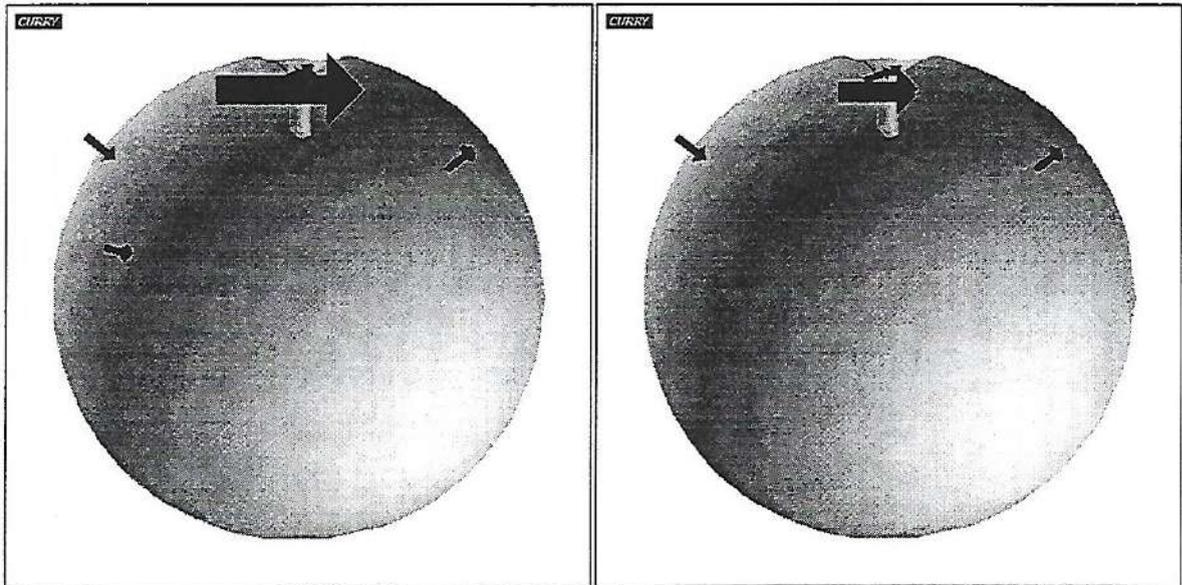


Abbildung 8.11: Simulation 2: Suche nach 6 Dipolen: Links die Lösung der inversen Quellsuche über SA-COF; rechts die Lösung der inversen Quellsuche über SA-TSVD.

beieinander und nicht weit verstreut (einige Quellen auf der linken Sulcuswand, einige auf der rechten) liegen, ist das Modell SA-TSVD angemessen.

8.3 Simulationsbeispiel 3:

In diesem Simulationsbeispiel sollte überprüft werden, wie die beiden Rekonstruktionsalgorithmen auf eine Konstellation von auf beiden Sulcuswänden liegenden und sich gegenseitig schwächenden Dipolen reagieren. In Abbildung 8.13 wird die Referenzquellverteilung dargestellt. Es wurden Dipole auf die Knoten 1l (Stärke 1.0), 2l (Stärke 1.1) und 3l (Stärke 1.0) der linken Sulcuswand und 1r (Stärke 1.0), 2r (Stärke 1.2) und 3r (Stärke 1.0) der rechten Sulcuswand gesetzt. Jede dieser auf Stärke 1.0 normierten Quellen erzeugte ein Referenzpotential der Norm 0.25 an den Meßpositionen, insgesamt hatte das Referenzpotential aber durch den Effekt der „gegenseitigen Schwächung“ nur eine Norm der Größe 0.368. Es wurde mit unverrauschten Daten eine inverse Quellrekonstruktion SA-COF durchgeführt. Die Referenzdipole 2r und 3r wurden mit leicht verringerter Stärke gefunden, Knoten 1r wurde durch einen Nachbarknoten ersetzt, auf der linken Sulcuswand wurden die drei Quellen durch eine Quelle auf dem Knoten 2l und eine Quelle auf dem Nachbarknoten von 1l ersetzt, welche dementsprechend größere Stärken erhielten. Die sechste gefundene Quelle hatte eine stark vernachlässigbare Quellstärke (ohne Abbildung). Die leichte Abweichung von der Referenzquellverteilung ergab sich wiederum durch das Abspeichern der Referenzpotentiale auf nur 5 Stellen Genauigkeit.

Es wurde nun weißes Rauschen der Norm 0.072 zu den Referenzpotentialen addiert, so daß sich ein SN von 11.35 ergab.

Gibt man der inversen Quellsuche die Referenzdipolorte vor und zerlegt die entsprechende Einflußmatrix in das singuläre System, ergeben sich die Singulärwerte $\varsigma_1 = 0.587$, $\varsigma_2 = 0.145$, $\varsigma_3 = 0.016$, $\varsigma_4 = 0.0051$, $\varsigma_5 = 0.0019$ und $\varsigma_6 = 0.00085$ und damit eine Kondition von 690. So war es nicht verwunderlich, daß sich bei der Berechnung der übrigen freien

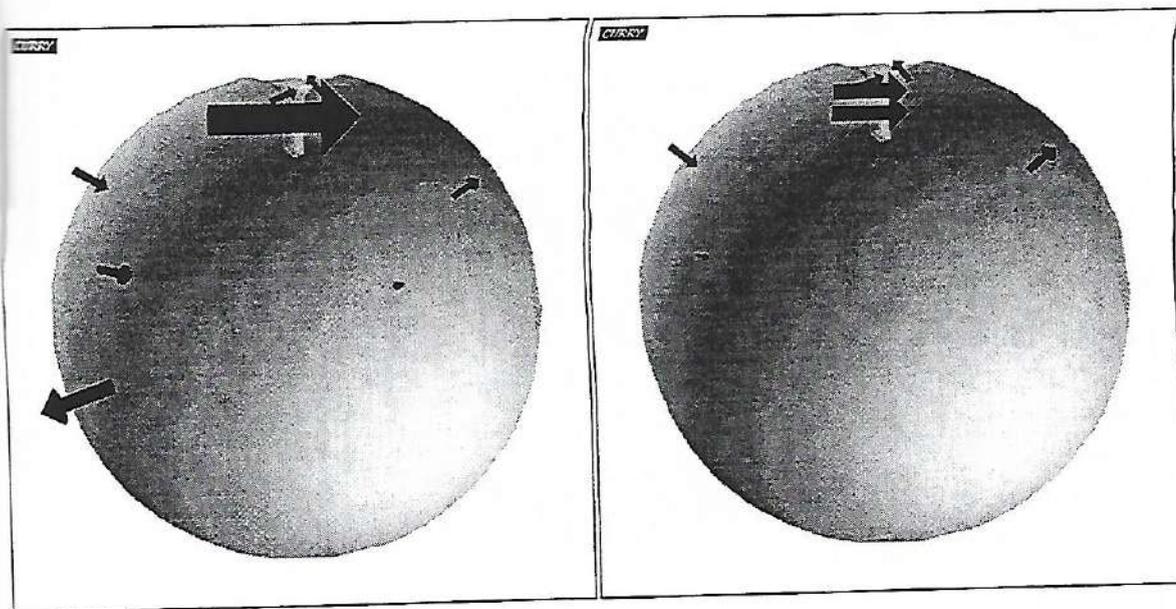


Abbildung 8.12: Simulation 2: Suche nach 8 Dipolen: Links die Lösung der inversen Quellsuche über SA-COF; rechts die Lösung der inversen Quellsuche über SA-TSVD.

Parameter Richtung und Stärke ein ähnliches Bild ergab wie in Abbildung 8.7.

In Abbildung 8.14 wird die Lösung dieses Ausgleichsproblems diskutiert. Der erste Eigenvektor \mathbf{v}_1 im Quellraum beschreibt die niedrigste Quellfrequenz. Die Knoten auf der linken Sulcuswand erhalten positive Werte, die Knoten auf der rechten Sulcuswand negative in der gleichen Größenordnung, so daß auf beiden Wänden des Sulcus nach rechts orientierte, gleichstarke Dipole durch diese Frequenz ausgedrückt werden. Der Faktor $\langle \Phi^\epsilon, \mathbf{v}_1 \rangle / \varsigma_1$ liegt bei $-0.88 \cdot 10^{-2}$, so daß jede Komponente des ersten Singulärwertanteils der verallgemeinerten Inversen vom Betrag bei ca. 0.0035 liegt und der Defekt nach dem ersten Schritt kaum verringert wurde. Der zweite Eigenvektor \mathbf{v}_2 betont die für die Referenzquellenordnung wichtigste Frequenz. Die Quellen zeigen in Richtung Cortex, werden aber mit dem negativen Faktor $\langle \Phi^\epsilon, \mathbf{v}_2 \rangle / \varsigma_2 = -2.55$ gewichtet, so daß nach Einbeziehung des 2. Singulärwertanteils der Defekt auf 0.0726 abfällt. Die TSVD schneidet hier ab (Diskrepanzprinzip $d^2 = 0.0052 < 0.02 = R^2 \epsilon^2$ und ebenfalls $\epsilon = 0.07 > 0.016 = \varsigma_3$). In den vier weiteren Schritten vermindert sich der Defekt nur noch sehr gering, die hohen Frequenzen im Quellraum werden aber vor allem durch den Faktor $\langle \Phi^\epsilon, \mathbf{v}_6 \rangle / \varsigma_6 = -8.06$ extrem überschätzt, bestimmen die Lösung der COF und sind physiologisch nicht sinnvoll. Hier tritt eine extreme Verstärkung des Rauschens auf. Die hohe Quellfrequenz \mathbf{v}_6 hat, bedingt durch die schlechte Kondition der Einflußmatrix, kaum Auswirkung auf die unverrauschte Potentialverteilung. Im aufsummierten weißen Rauschen war die zugehörige Meßraumfrequenz \mathbf{u}_6 aber enthalten. Diese wird durch den sechsten Singulärwertanteil um den Faktor $\frac{1}{\varsigma_6} = 1176$ verstärkt und geht extrem in die Lösung ein.

Bei der ersten inversen Quellsuche wurde nach sechs Dipolen gesucht. Abbildung 8.15, zeigt die Resultate der beiden Rekonstruktionsalgorithmen. Beide Verfahren ersetzen die drei Quellen jeder Sulcuswand durch einen Dipol mit erhöhter Quellstärke. Über SA-COF wurde die Aktivität (ca. 2.4) etwas unterschätzt bei einem Defekt von $d = 0.048$, die SA-TSVD konnte trotz größeren Defekts von $d = 0.057$ die Quellstärken (ca. 3.2) etwas genauer ermitteln.

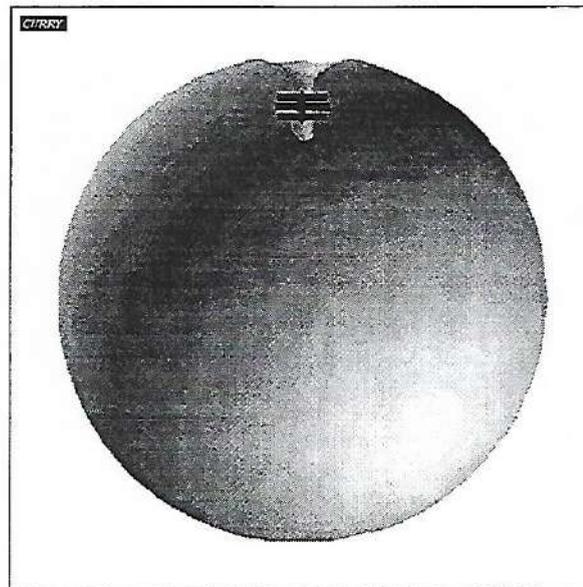


Abbildung 8.13: Simulation 3: Sich gegenseitig schwächende Referenzquellen auf beiden Sulcuswänden.

Es wurden dann sieben Quellen gesucht. Das Rekonstruktionsergebnis stellt ebenfalls die Abbildung 8.15 dar. Die SA-COF konnte bei einem Defekt von $d = 0.047$ weiterhin die Hauptaktivität im Sulcus darstellen. Die SA-TSVD versuchte hingegen, die Meßpotentiale mit möglichst geringen Quellstärken zu erfüllen und konnte bei einem Defekt von $d = 0.053$ die Aktivität im Sulcus nicht mehr rekonstruieren. Suchte man nach acht Quellen und mehr, ergab sich dasselbe Bild.

Zusammenfassung für die Simulation 3: Sind die Meßwerte schwach ausgeprägt, wird ein inverser Suchalgorithmus mit Regularisierung bei einer überschätzten Anzahl aktiver Quellen die "sichere" Lösung in Form einer angenäherten Nulllösung ermitteln. Ein Verwerfen von Information kann man sich bei geringer Ausprägung der Meßsignale nicht mehr erlauben. Mit $R = 2$ und der Zusatzbedingung $\gamma > \epsilon$ ist die Regularisierung vielleicht zu vorsichtig eingestellt. Im nächsten Simulationsbeispiel werden einige Tests bezüglich einer Änderung des Parameters bzw. dem Verzicht auf die Zusatzbedingung durchgeführt. Die Suche über die volle Pseudoinverse (SA-COF) auf der Geometrie des simulierten Sulcus konnte trotz erhöhter Anzahl geschätzter Quellen sinnvolle Lösungen ermitteln, ist aber die risikobehaftete Quellsuche, denn es kann zu Instabilitäten kommen. Sinnvoll ist bei schwach ausgeprägten Meßdaten scheinbar eine Suche nach wenigen Quellen.

8.4 Simulationsbeispiel 4:

An integrativen Leistungen und an der Entstehung zielgerichteten Verhaltens sind oft mehrere Hirnabschnitte beteiligt, die sogar räumlich weit voneinander getrennt liegen können (Schmidt, Thews [48]).

Die folgende Simulation bezieht sich auf die Rekonstruktion solcher Referenzquellen. Es wurde, wie in Abbildung 8.16 gezeigt, eine Referenzquelle auf den Knoten 11 der linken Sulcuswand (Stärke 2.0), zwei weitere rechts (Knoten 1622, Stärke 1.0) und links (Knoten

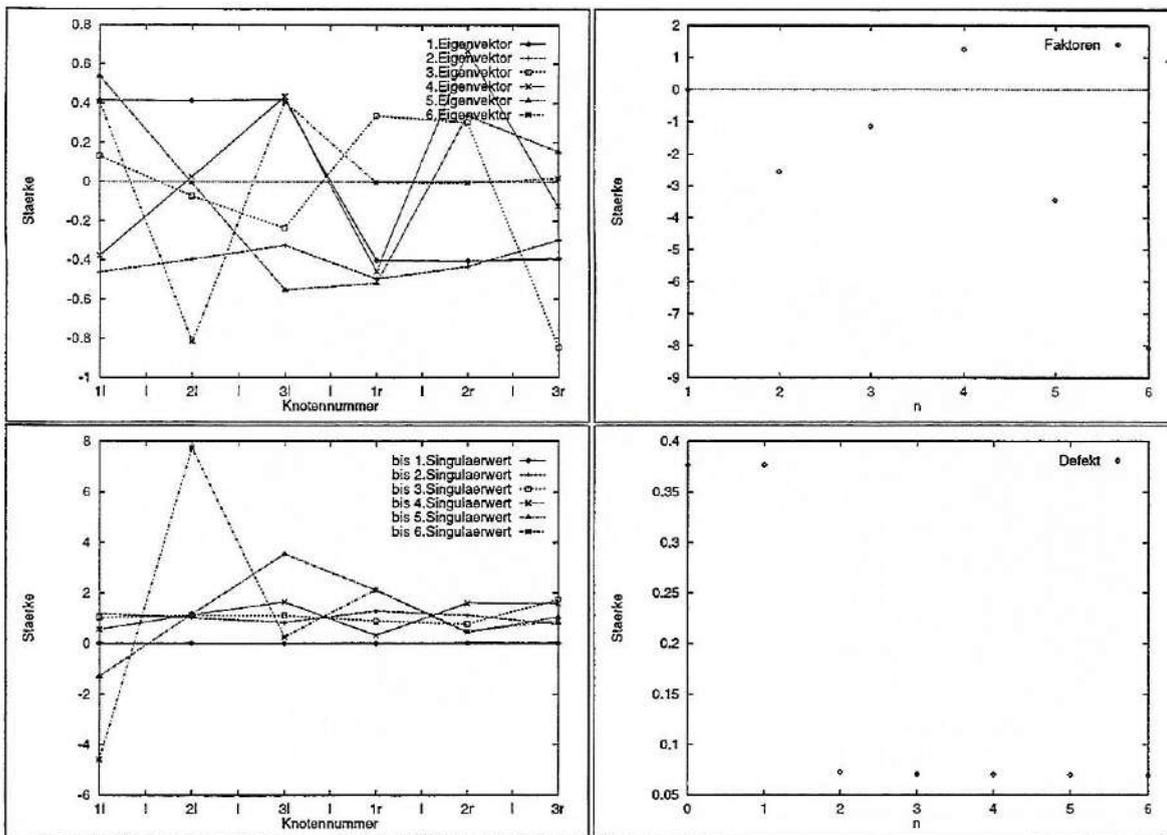


Abbildung 8.14: Simulation 3: Lösung des Ausgleichsproblems durch die Pseudoinverse nach Vorgabe der 6 Referenzdipolorte: Links oben die Eigenvektoren \mathbf{v}_n des Quellraums von $E^{tr}E$; rechts oben die Faktoren $\langle \Phi^c, \mathbf{u}_n \rangle / \varsigma_n$; Links unten die berechneten Dipolstärken nach Einbeziehung von nur einem bis zu allen sechs Singulärwertanteilen; rechts unten der Defekt nach Einbeziehung von n Singulärwertanteilen.

754, Stärke 1.0) vom Sulcus auf die Kugeloberfläche gesetzt. Unverrauscht ergab sich eine Referenzpotentialverteilung mit euklidischer Norm 0.71. Durch eine inverse Quellsuche SA-COF anhand der unverrauschten Potentialwerte konnten alle drei Quellen mit korrekter Stärke ermittelt werden.

Zerlegt man die Einflußmatrix der Referenzdipolverteilung in ein singuläres System, so ergeben sich die Singulärwerte $\varsigma_1 = 0.32$, $\varsigma_2 = 0.26$ und $\varsigma_3 = 0.09$, eine Kondition von 3.55 und folgende Anteile der Eigenvektoren des Quellraums an der Referenzquellverteilung: $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{J} \rangle = 2.18$, $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{J} \rangle = -0.27$ und $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{J} \rangle = -1.04$. Die Frequenzen \mathbf{u}_2 (Wichtung mit $\varsigma_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{J} \rangle = -0.0702$) und \mathbf{u}_3 (Wichtung mit $\varsigma_3 \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{J} \rangle = -0.093$) gehen im Vergleich zu \mathbf{u}_1 (Wichtung mit $\varsigma_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{J} \rangle = 0.697$) nur schwach in die Referenzpotentialverteilung ein.

Den Referenzpotentialwerten wurde weißes Rauschen der Norm 0.1848 aufsummiert. Es ergab sich ein SN von 16.64.

Gab man die Referenzdipolorte vor und löste man das Ausgleichsproblem über die TSVD, so wurde bereits nach dem 1. Singulärwertanteil abgeschnitten, da das Diskrepanzprinzip mit $d^2 = 0.046 < 0.136 = R^2 \epsilon^2$ griff. Die Wahl des Parameters $R = 2$ und die Zusatzbedingung $\gamma > \epsilon$ an die Regularisierung erscheinen hier etwas grob.

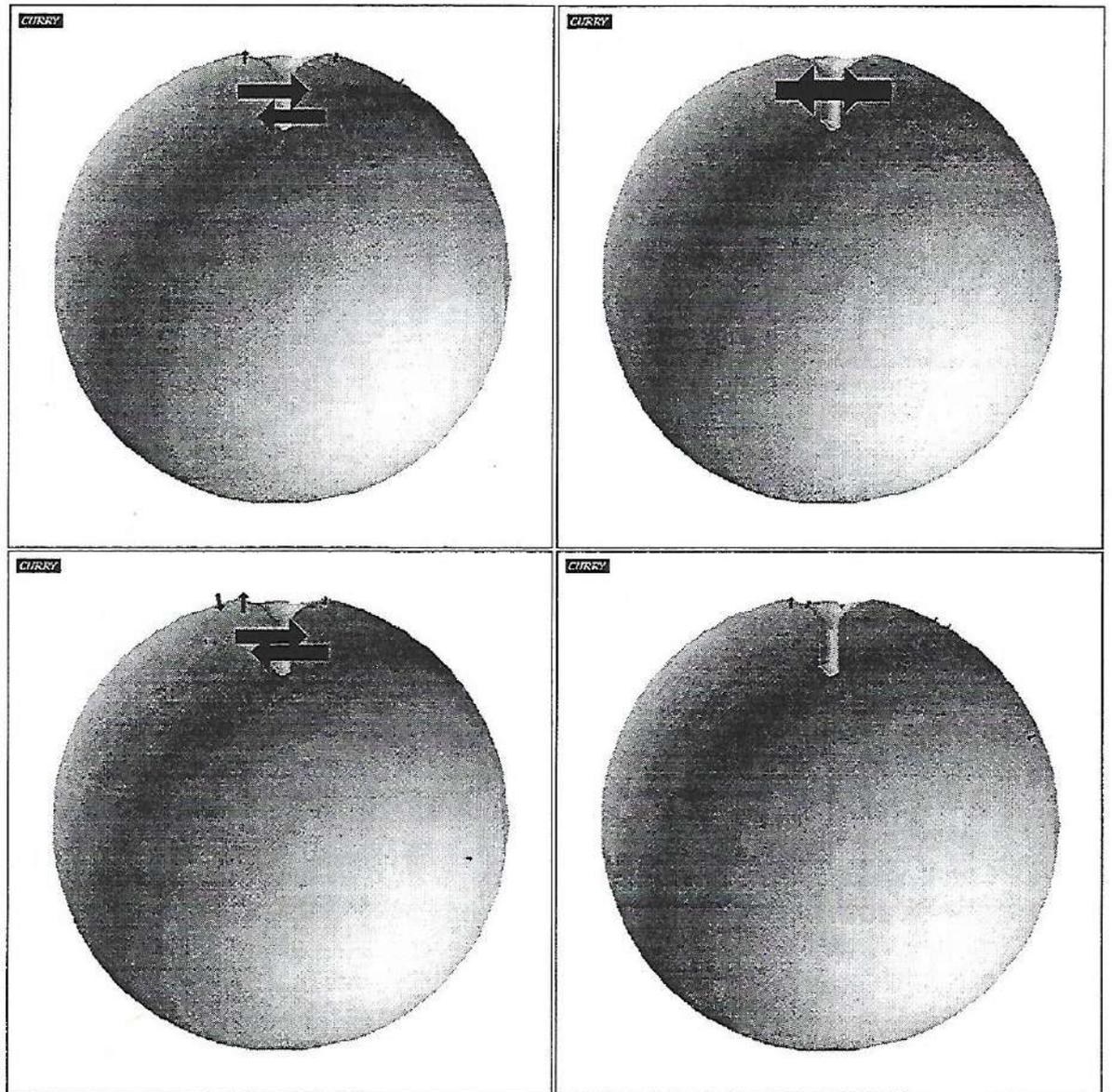


Abbildung 8.15: Simulation 3: Suche nach sechs und nach sieben Dipolen: Links jeweils die Lösung der inversen Quellsuche über SA-COF, rechts die Lösung der inversen Quellsuche SA-TSVD.

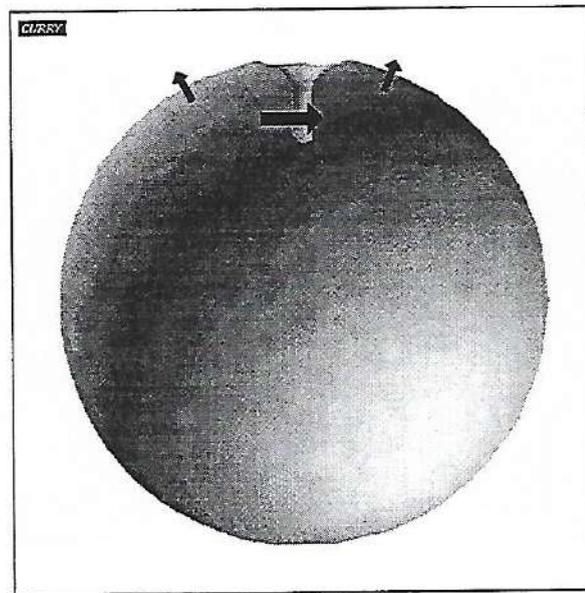


Abbildung 8.16: Simulation 4: Referenzquellen.

Durch kontinuierliche Erhöhung der Anzahl geschätzter aktiver Quellen von drei auf acht sollten die Algorithmen SA-COF und SA-TSVD (weiterhin $R = 2$ und Zusatzbedingung $\gamma > \epsilon$) auf ihre Rekonstruktionsqualität und Stabilität bezüglich weit auseinanderliegender Referenzquellen getestet werden. Die Ergebnisse der scharfen inversen Lokalisierung sind in den Abbildungen 8.17 und 8.18 dargestellt.

Bei der Suche nach drei Quellen konnten die Referenzdipole über SA-COF ziemlich genau rekonstruiert werden (Defekt 0.1809). Scheinbar gab es keine Dipolanordnung, welche die Meßpotentiale genauer hätte erklären können. Die Suche über SA-TSVD reagierte entsprechend der Einstellung vorsichtig auf das Rauschen, eine Quelle wurde links unten auf der Kugel gefunden, die Sulcusquelle verrutschte auf die rechte Sulcuswand (Defekt 0.1866). Zur Interpretation dieser Lösung wurden die gefundenen Dipolorte vorgegeben und das Ausgleichsproblem über die verallgemeinerte Inverse gelöst. Nach dem 2.Singulärwertanteil wurde durch die TSVD mit oben genanntem Defekt von $d = 0.18669$ abgeschnitten. Die volle verallgemeinerte Inverse konnte die Diskrepanz zu den Meßwerten mit $d = 0.18664$ nur noch sehr gering mindern. Die gefundene Lösung ist somit arm an Anteilen der zu dieser Dipolkonstellation gehörenden Quellfrequenz ν_3 . Die SA-TSVD sucht also eine Lösung, welche die Meßdaten möglichst gut erfüllt und gleichzeitig der Auflage entspricht, vorsichtig im Umgang mit den hohen Frequenzen zu sein.

Bei der Suche nach 5, 7 (Abbildung 8.18) und 8 (Abbildung 8.17) Dipolen zeigte sich die stabilisierende Wirkung der Regularisierung. Bei 7 Dipolen wird zwar das Potential des Referenzdipols 11 durch zwei Dipole beschrieben, von denen einer mit kleiner Stärke auf die rechte Sulcuswand gerutscht ist, die drei Zentren der Aktivität werden aber dargestellt (Defekt 0.1645). Die SA-COF kann zwar die Referenzdipole rekonstruieren, wird aber instabil bei der Interpretation des Rauschens (Defekt 0.096). Bei 8 Dipolen werden über SA-TSVD die Referenzquellen bis auf den leicht in Richtung Sulcusausgang verschobenen Sulcusdipol rekonstruiert, die übrigen und nur das Rauschen beschreibenden Dipole erhalten geringe Stärken (Defekt 0.1633). Die SA-COF wird instabil, sich gegenseitig auslöschende Quellen erhalten hohe Quellstärken, der Defekt wird auf 0.089 gedrückt.

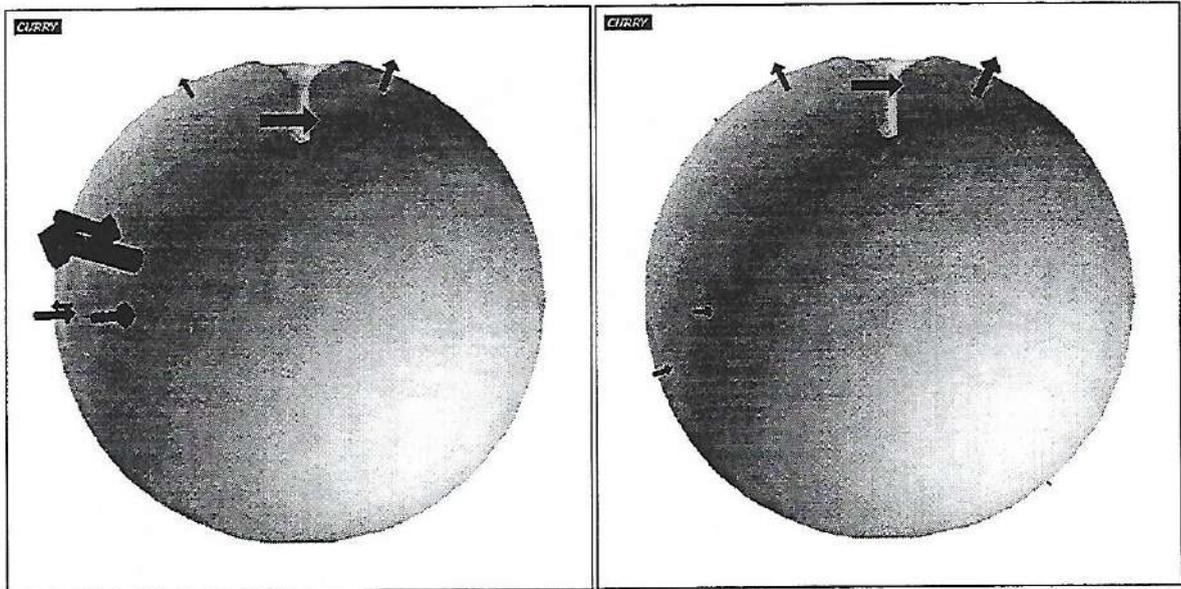


Abbildung 8.17: Simulation 4: Suche nach 8 Dipolen: Links die Lösung der inversen Quellsuche über SA-COF; Rechts die Lösung der inversen Quellsuche über SA-TSVD.

Es sollte nun der Parameter R variiert werden bei Verzicht auf die Zusatzbedingung $\gamma > \epsilon$. Für $R \in [1.7, 2.0]$ wurde dieselbe Lösung ermittelt, wie bei vorsichtiger Wahl (siehe Abbildung 8.18, Bild oben rechts). Das Ergebnis bei der Wahl $R = 1.5$ wird in Abbildung 8.19 dargestellt. Es ergab sich ein Defekt von 0.1856. Bei Wahl $R = 1.1$ wurde die Lösung der SA-COF ermittelt (Abbildung 8.18, Bild oben links).

Nimmt man die Zusatzbedingung $\gamma > \epsilon$ auf und variiert R , so erhält man für $R \in [1.1, 2.0]$ die Lösung wie bei vorsichtiger Wahl $R = 2$ (Abbildung 8.18, Bild oben rechts).

Zusammenfassend kann festgehalten werden: Über die SA-COF werden weit auseinanderliegende Quellen gut rekonstruiert, bei einem Überschätzen der Anzahl an Quellen kann dieser Algorithmus allerdings durch eine zu genaue Interpretation des Rauschens instabil werden. Die SA-TSVD ist stabil, bei wenigen freien Parametern, mit der Voreinstellung $R = 2$ und der Zusatzbedingung $\gamma > \epsilon$ allerdings grob beim Verwerfen von Information und vorsichtig im Umgang mit dem Rauschen. Ob in einer späteren Version von CAUCHY die Zusatzbedingung $\gamma > \epsilon$ verwendet wird, sollte durch weitere Simulationen herausgestellt werden. Der Parameter R sollte auf „Vorsicht“ ($R = 2$) gesetzt werden, bei wenigen zu suchenden Quellen und gut konditioniertem Problem sollte man sich aber über die möglichen Auswirkungen bewußt sein. Eine Dämpfung der hohen Frequenzen (Tikhonov-Phillips) statt eines Abschneidens (TSVD) sollte ebenfalls eine Verbesserung der Rekonstruktionsergebnisse erzielen, allerdings auf Kosten der Rechenzeit.

8.5 Rechenzeitbedarf der scharfen Quellsuche

Um einen Eindruck bezüglich der Rechenzeit einer scharfen inversen Quellsuche zu gewinnen, seien hier einige Beispiele genannt. Die Rechnungen wurden auf einer IBM RISC System/6000 7012 Modell 375 durchgeführt. Die Maschine besitzt eine Taktfrequenz von 62.5 MHz, einen Durchsatz von 25.9 MFLOPS (DP Linpack), einen Datencache von 32

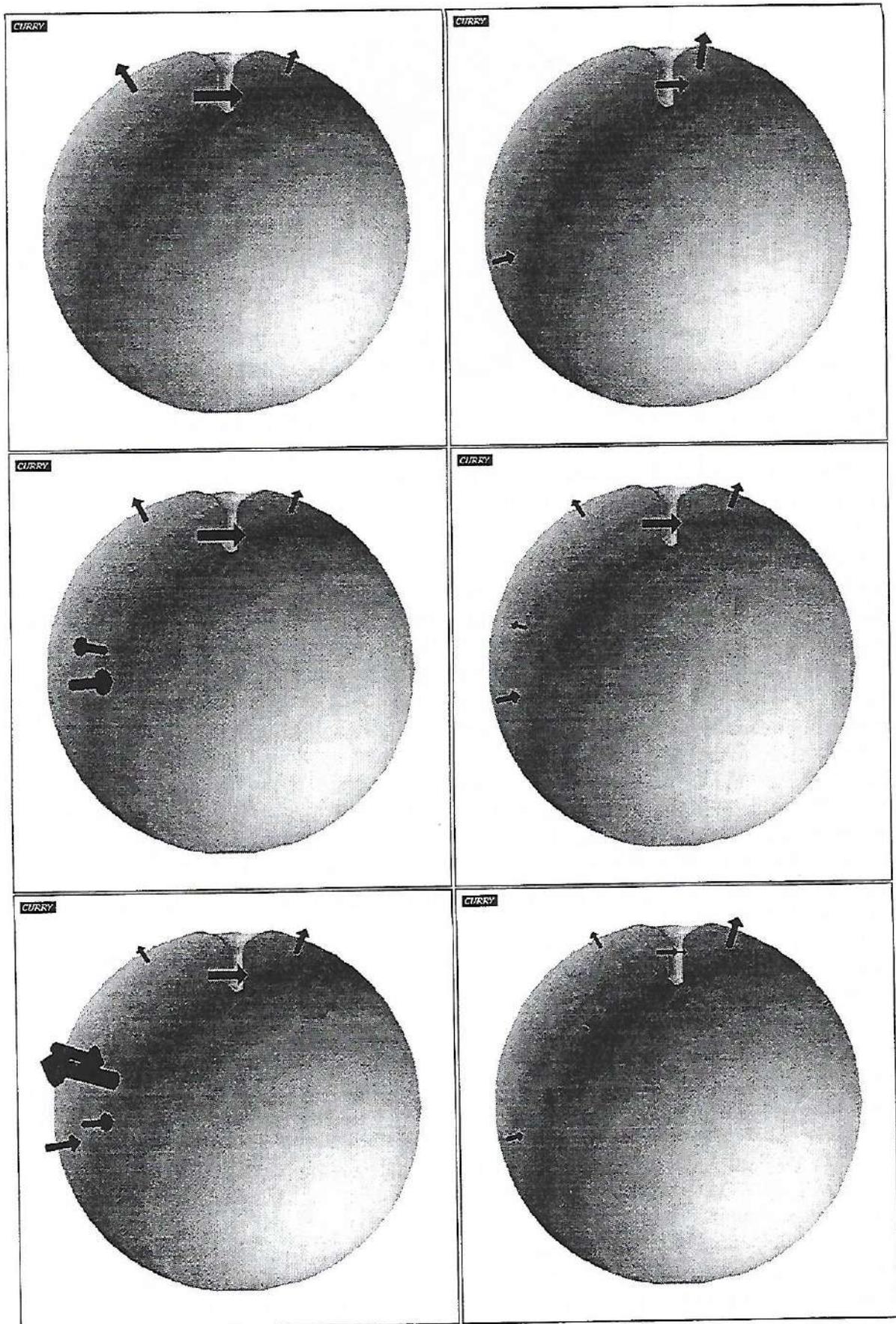


Abbildung 8.18: Simulation 4: Suche nach 3, 5 und 7 Dipolen: Jeweils links die Lösung der inversen Quellsuche über SA-COF; jeweils rechts die Lösung der inversen Quellsuche über SA-TSVD.

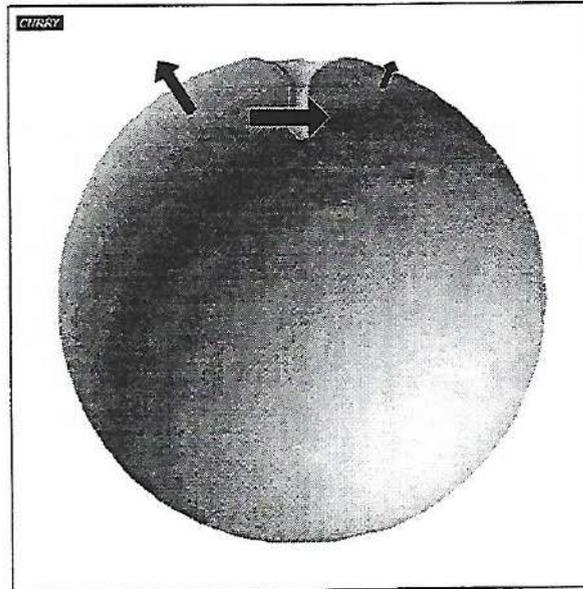


Abbildung 8.19: Simulation 4: Suche nach 3 Dipolen über SA-TSVD ohne die Zusatzbedingung $\gamma > \epsilon$ und bei Wahl des Parameters $R = 1.5$.

KB und einen Hauptspeicher von 64 MB.

Zur Berechnung der Einflußmatrix für die verwendete Struktur des simulierten Sulcus bei einer Anzahl von 3446 Einflußknoten (innere Kugeloberfläche plus Sulcus) bedurfte es einer CPU-Zeit von ca. 13 Stunden.

Für die inverse Quellsuche ergab sich insgesamt ein Speicheraufwand von ca. 2.9 Millionen Integer- (4 Byte) und 1.6 Millionen Double-Werten (8 Byte), insgesamt also ca. 24.4 MB. Es sei aber bemerkt, daß der benötigte Speicherplatz innerhalb der Simulated-Annealing-Unterroutine wesentlich geringer ist.

Suchte man nach 3 Dipolen bei einer festgelegten Anzahl von 5 Millionen SA-Iterationen, so wurde über den Rekonstruktionsalgorithmus SA-COF 1 Stunde und 56 Minuten CPU-Zeit verwendet, bei inverser Suche über SA-TSVD ca. 2 Stunden und 8 Minuten.

Bei der Suche nach 8 Dipolen und einer festgelegten Anzahl von 5.8 Millionen SA-Iterationen benötigte die SA-COF 5 Stunden und 41 Minuten, die SA-TSVD 7 Stunden und 37 Minuten reine CPU-Zeit.

Es sei angemerkt, daß sich die Rechenzeit der SA-TSVD durch eine Optimierung noch leicht verkürzen läßt.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden zwei Methoden zur Lösung des direkten Problems vorgestellt. Ist die Modellierung des Kopfes durch einen schichtweise homogenen, isotropen Leiter auch in Zukunft akzeptabel, so kann die Transformation der die Potentialverteilung beschreibenden partiellen Differentialgleichung über die Integralgleichungsmethode in eine Randintegralgleichung als theoretisch sinnvoller Ansatz bewertet werden. Diese kann über die BE-Methode numerisch gelöst werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Kollokationsansatz in den Dreieckseckpunkten mit stückweise linearer Interpolation auf den Oberflächenelementen und analytischer Berechnung der auftretenden Integrale mit einer Kollokation in den Massenzentren und stückweise konstanter Interpolation verglichen. Die Kollokation in den Dreieckseckpunkten vermindert im Vergleich zur Kollokation in den Massenzentren die Anzahl an Unbekannten um ca. die Hälfte, da ungefähr doppelt so viele Dreieckselemente wie Dreieckseckpunkte auf den vergitterten Oberflächen liegen. Benutzt man direkte Verfahren zum Lösen des entstehenden Gleichungssystems, wird die Geometriematrix nur einmal zerlegt (z.B. QR-Zerlegung) und das Lösen des Gleichungssystems reduziert sich auf Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen für eine gegebene Quelle. Der Rechenaufwand zum Erstellen der Einflußmatrix wird somit bei Kollokation in den Dreieckseckpunkten und stückweise linearer Interpolation nur ca. ein Viertel der Rechenzeit der Kollokation in den Massenzentren betragen. Auch bezüglich der Genauigkeit erweist sich die Kollokation in den Dreieckseckpunkten und stückweise lineare Interpolation mit analytischer Berechnung der auftretenden Integrale als vorteilhaft. Die Isolation der Knochenschicht ist wichtig. Der erhöhte Rechenaufwand (zweimaliges Lösen eines Gleichungssystems) läßt sich durch die erzielte Genauigkeit rechtfertigen. In der Nähe von stark exzentrischen Dipolen muß das Oberflächennetz lokal verfeinert werden, um akzeptable Resultate zu erzielen. Die Bestimmung des zu verfeinernden Oberflächenbereichs ist rechenaufwendig und schwierig.

Die Differentialgleichung ist auch bei Anisotropie und inhomogener Leitfähigkeit innerhalb der Schichten gültig. Überführt man die Ausgangsgleichung in eine Variationsaufgabe, so läßt sich die Methode der finiten Elemente zur numerischen Lösung anwenden. Dazu wird ein dreidimensionales Netz des Kopfes benötigt. Es entstehen große Gleichungssysteme mit dünnbesetzten Matrizen, die sehr kompakt gespeichert und über das CG-Verfahren mit Vorkonditionierung effizient gelöst werden können. So kann auch bei sehr feinen Netzen eine akzeptable Rechenzeit ohne Auslagerung von Seiten durch das Betriebssystem (Paging) erreicht werden. Eine Vergitterung des Kopfes mit ca. 10^5 finiten Elementen führte beispielsweise auf einen Gesamtspeicherbedarf von 24 MB und läßt sich mühelos während der Rechnung im Hauptspeicher halten. Die Methode der finiten Elemente ermöglicht eine

anpassungsfähige und sehr effiziente Lösung des direkten Problems.

Bezüglich des inversen Problems wurde die scharfe inverse Quellsuche genauer studiert. Es wird die Annahme gemacht, daß die Meßdaten einem Prozeß mit einigen wenigen Zentren fokaler Aktivität im Gehirn entstammen. Die gesuchten Quellen können beliebig im Einflußraum aller physiologisch möglichen Quellen liegen. Die Anzahl, der Ort und die Ausrichtung der Quellen, welche die Meßdaten mit Rücksicht auf das Rauschen möglichst gut erklären, sind die zu bestimmenden Parameter.

In einer simulierten Sulcusstruktur wurden Referenzquellen gesetzt und deren Potentialverteilung an 128 Elektrodenpositionen über die Methode der finiten Elemente berechnet. Dieser Potentialverteilung wurde weißes Rauschen aufaddiert. Bei der inversen Quellrekonstruktion anhand dieser Daten wurden zwei Algorithmen getestet, die SA-COF (ohne Regularisierung) und die SA-TSVD (automatische, an die Kondition des Ausgleichsproblems angepaßte Regularisierung). Liegen die Referenzquellen weit voneinander entfernt und ist der Beitrag der einzelnen Quellen zur Potentialverteilung gleichmäßig stark, so führt ein Unterschätzen der Anzahl aktiver Quellen bei der inversen Suche auf fehlerhafte Ergebnisse. Bei leichtem Überschätzen sollte ein inverser Suchalgorithmus jedoch möglichst stabil bleiben. Wurden beispielsweise drei Referenzquellen gesetzt und bei der inversen Suche sechs Quellen vermutet, so konnte bei Verwendung der SA-COF Instabilität beobachtet werden. Die Referenzquellen werden rekonstruiert, es bleiben aber drei Quellen „zur Erklärung des Rauschens“. Rauschen kann leider nicht nur durch Quellen kleiner Quellstärke erklärt werden, sondern auch durch Quellen mit ausgeprägten Stärken, deren Beitrag zum Meßpotential trotzdem gering ist (zum Beispiel radiale Quellen beim MEG oder tiefe Quellen). Die Potentialverteilung einer Konfiguration von Quellen, wo jede Quelle für sich eine große Stärke besitzt, die sich aber gegenseitig auslöschen, kann ebenfalls im Bereich des Rauschens liegen. Bei Verwendung der SA-COF, d.h. ohne Regularisierung wurden auf diese Weise Lösungen ermittelt, bei denen der Anwender den Quellen, die nur das Rauschen erklärten, aber hohe Quellstärken erhielten, besondere Beachtung geschenkt hätte. Die annähernd rekonstruierten Referenzquellen waren in bezug auf ihre Quellstärke im Vergleich vernachlässigbar klein. Die SA-TSVD blieb bei einem Überschätzen der Anzahl aktiver Quellen stabil. Bei starker Regularisierung ($R = 2$ und Zusatzkriterium $\gamma > \epsilon$) und geringer Anzahl an gesuchten Quellen ergaben sich Ungenauigkeiten bei der Rekonstruktion der Referenzquellen. Beide Verfahren können gemeinsam zur Bestimmung der gesuchten Quellparameter herangezogen werden.

Die Integralgleichung (7) in Kapitel 5 wurde über eine Kollokationsmethode diskretisiert. Die Kollokationsmethode gehört zu den Projektionsmethoden, deren spezielle Projektion die Interpolation ist. Zum Ausgangsraum $X = C(D)$ wurde ein Unterraum X_k mit Basis $\{h_1, \dots, h_k\}$ der stückweisen Ansatzfunktionen gewählt. Mit wachsendem k nähert sich dieser Unterraum dem Ausgangsraum X an, in dem die gesuchte Lösung liegt. Diese Wahl von Unterraum und Basis der vorgestellten Kollokationsmethoden führt leider auf Gleichungssysteme mit vollbesetzten Matrizen. Deren Speicherung ist aufwendig und bereits bei Elementzahlen um die 3000 kann das Betriebssystem je nach Größe des vorhandenen Hauptspeichers beim Lösen der Gleichungssysteme Seiten auslagern (Paging). Das Erstellen der Einflußmatrix würde sehr zeitaufwendig. Aktuelle Methoden der angewandten Mathematik haben eine ähnliche Vorgehensweise, benutzen aber Unterräume und zugehörige Basen, die auf dünnbesetzte Matrizen führen. Damit kann der Gewinn einer Dimension durch die Integralgleichungsmethode mit der Dünnbesetztheit der Matrizen der durch die Diskretisierung entstehenden Gleichungssysteme gekoppelt werden. Die hier gewählten Basisfunktionen werden „wavelets“ genannt. Sie besitzen, wie schon die stückweisen An-

satzfunktionen, kompakte Träger. Die betrachteten Unterräume sind die Besovräume \mathcal{B}_q^s (Dahmen [11], Louis [30]).

Bezüglich der scharfen inversen Quellsuche sollten weitere Simulationen durchgeführt werden, um herauszufinden, ob eine weniger vorsichtige Wahl des Parameters R der a-posteriori Parameterwahl des Diskrepanzprinzips von ca. 1.4 und ein Wegfallen der Zusatzbedingung $\gamma > \epsilon$ eine ausreichende Regularisierung darstellt, um Instabilitäten durch Überschätzen der Anzahl aktiver Quellen zu vermeiden. Es sollte getestet werden, ob die inversen Rekonstruktionsergebnisse des Simulated Annealing in Kombination mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung zur Lösung des Ausgleichsproblems (Dämpfung der hohen Frequenzen) den erhöhten Rechenaufwand im Vergleich zur SA-TSVD rechtfertigen. Als weiteres Regularisierungsverfahren kann das Verfahren der konjugierten Gradienten mit kontrolliertem Abbruchkriterium in Kombination mit dem Simulated Annealing getestet werden (Louis [29]).

Anhang A

Danksagung

Ohne vielfältige Unterstützung wäre die vorliegende Arbeit nicht möglich gewesen. Mein besonderer Dank gilt

Herrn Professor Dr. med. Dipl. Ing. R. Grebe, Dép. Génie Biologique der Université de Technologie de Compiègne, für die vielen Unterrichtsstunden im Fach Physiologie, für die Themenstellung der Diplomarbeit und für die Vermittlung wichtiger Kontakte.

Herrn Professor Dr. rer. nat. K.-H. Esser, Institut für Geometrie und Praktische Mathematik der RWTH Aachen, für die freundliche Übernahme des Koreferats.

Herrn Professor Dr. med. H. Buchner, Klinik für Neurologie der RWTH Aachen, für die freundliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und für das Ermöglichen einer Publikation auf dem „Third International Hans Berger Congress“.

Herrn Privatdozent Dr. rer. nat. H. Jarausch, Institut für Geometrie und Praktische Mathematik der RWTH Aachen, für seine stete Bereitschaft zur Diskussion und für die konstruktive Begleitung dieser Arbeit.

Professor Dr. J. Pernier, Direktor des INSERM U280 de Lyon, für die freundliche Aufnahme in sein Institut und den Herren Dr. O. Bertrand und Dr. M. Thévenet für die fachliche Betreuung während meines Austauschjahres in Lyon.

Herrn Dipl. Phys. Ralf Vandenhouten, Institut für Physiologie der RWTH Aachen, für seine große Unterstützung bei theoretischen und praktischen Problemen.

Herrn Dr. Ing. Adrian Rienäcker, Institut für Maschinenelemente und Tribologie der Universität GH Kassel, für die fachliche Unterstützung und die gute Zusammenarbeit im Projekt.

Herrn Dipl. Ing. Rainer Beckmann, Klinik für Neurologie der RWTH Aachen, für die vielfältige Unterstützung bei der Einarbeitung in die zahlreichen Programmsysteme und die ständige Bereitschaft zur Diskussion.

Herrn Dipl. Ing. Robert Pohlmeier, Institut für Neurologie der RWTH Aachen, für die vielen fruchtbaren Gespräche.

meinen lieben Eltern für ihren ständigen Rückhalt während meines Studiums.

Anhang B

Verzeichnis der verwendeten Symbole

Bezeichnung	Erklärung
$a(\cdot, \cdot)$	Bilinearform
A	Kompakter Operator $\in K(X, Y)$
A^+	Verallgemeinerte Inverse zu A
\mathbf{A}	Vektorpotential
α	Elliptizitätskonstante
$ \beta $	Ordnung des Multiindex β
\mathbf{B}	Magnetische Induktion
BE-Methode	Boundary-Element-Methode
C	Diagonalmatrix zur Wichtung der Meßkanäle
CL^-	Chlor-Ion
$C(\Omega)$	Menge der auf Ω stetigen Funktionen
$C^k(\Omega)$	Menge der Funktionen mit stetigen Ableitungen der Ordnung k
$C_0^k(\Omega)$	Unterraum von $C^k(\Omega)$ der Funktionen mit kompaktem Träger
C_U^{klass}	$\{v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \int_{\Omega} v d\Omega = 0\}$
COF	Complete Orthogonal Factorization
C.-S.	Ungleichung von Cauchy-Schwarz
\mathbf{D}	Dielektrische Verschiebung
$d\Gamma$	Oberflächenelement der Oberfläche Γ
$n d\Gamma$	$n d\Gamma$
$d(\Phi, V)$	Abstand des Elements Φ vom Raum V
$D_K(\Omega)$	Funktionen φ in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\text{Tr}(\varphi) \subset K$
$D(\Omega)$	$\bigcup_{K \subset \Omega} D_K(\Omega)$
$\nabla \cdot \mathbf{A}$	Divergenz des Vektorfeldes \mathbf{A}
E	Einflußmatrix
E_q	Einflußmatrix zum Quellorttupel q
\mathbf{E}	Elektrische Feldstärke
EEG	Elektroencephalographie
EP	Evozierte Potentiale
ϵ_i	Rauschen des Meßkanals i
ϵ	Relative Dielektrizitätszahl
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante des Vakuums

EPSP	Exzitatorisches postsynaptisches Potential
E^{tr}	Transponierte der Matrix E
F_γ	Filter des Regularisierungsverfahrens T_γ
FE-Methode	Methode der finiten Elemente
\forall	für alle
F.-U.	Friedrichssche Ungleichung
Γ	Berandung des Gebiets Ω
Γ_i	Äußere Grenzfläche der Schicht Ω_i
g_{K^+}	Kalium-Leitfähigkeit der Neuronmembran
g_{NA^+}	Natrium-Leitfähigkeit der Neuronmembran
\exists	gibt es
Inf	Menge der Einflußknoten $\{i_1, \dots, i_{n_{inf}}\}$
i_j	j -te Einflußknoten
n	$n_{dip} \cdot n_{rich}$
$n(\mathbf{y})$	Auswärts gerichtete Einheitsnormale am Punkt \mathbf{y}
$\partial/\partial n$	Ableitung in Richtung der äußeren Normalen
∇U	Gradient des skalaren Feldes U
H	Magnetische Feldstärke
h_i	i -tes Basiselement
h_T, ρ_T	Umkreis- bzw. Inkreisradius von T
I	Stromstärke, Einheit: Ampère (A)
IPSP	Inhibitorisches postsynaptisches Potential
\mathbf{j}	Elektrische Stromdichte
\mathbf{j}_p	Primärstromdichte
J_p	Stromquellendichte ($J_p = \nabla \cdot \mathbf{j}_p$)
k	Komplexe Wellenzahl
K^+	Kalium-Ion
$K(X, Y)$	$\{T \in L(X, Y) : T \text{ ist kompakt}\}$
$K_\epsilon(\mathbf{x})$	Kugel mit Radius ϵ um den Punkt \mathbf{x}
∂K_ϵ	Oberfläche der Kugel K_ϵ
λ	Eigenwert
$\lambda(T)$	Spektrum des Operators T : $\lambda(T) := \{\lambda \in \mathcal{R} : \lambda I - T \text{ ist nicht invertierbar}\}$
Δ	Laplace-Operator
$l(\cdot)$	Funktional
$L(X, Y)$	Raum der linearen Operatoren von X nach Y
$L^2(\Omega)$	Raum der über Ω quadrat-integrierbaren Funktionen
$L^\infty(\Omega)$	Raum der über Ω beschränkten Funktionen
M	Moment des mathematischen Stromdipols
μ	Relative Permeabilitätszahl
$\mu(\Omega)$	Volumen von Ω
μ_0	Permeabilitätszahl des Vakuums
\mathcal{N}	Menge der natürlichen Zahlen
NA^+	Natrium-Ion
$N(E)$	Kern des Operators E : $\{M \in \mathcal{R}^n : EM = 0\}$
NC	NormalenConstraint (anatomische Vorüberlegung)
n_{inf}	Anzahl Einflußknoten
n_{rich}	Anzahl Richtungen der Quelleinspeisung
n_{dip}	Geschätzte Anzahl aktiver Quellen bei der scharfen inversen Quellsuche

m
 MEC
 $O(\cdot)$
 OC
 ω
 Ω
 Ω_i
 $\bar{\Omega}_i$
 Ω_{Zyl}
 p
 $\frac{P}{R(A)}$
 ∂_i
 ∂^α
 Φ
 Φ^n
 $\bar{\Phi}$
 Ψ
 Q
 \mathcal{R}
 $R(A)$
 $R(A)$
 r_i
 ρ
 $\rho(A)$
 $\nabla \times$
 s
 s^+
 s^ϵ
 s_ϵ^+
 SA
 SA-C
 SA-T
 σ
 $\sigma_i^- =$
 ς_i
 SN
 $< \cdot, \cdot \rangle$
 $< f, g \rangle$
 $H^m(\Omega)$
 H_U^1
 H'
 $\|\cdot\|_m$
 $\|f\|_\nu$
 $\|\cdot\|_{0,\nu}$
 $|\cdot|_m$

m	Anzahl der Meßabnehmer (EEG/MEG)
MEG	Magnetoencephalographie
$O(\cdot)$	Landau-Symbol: $f(x) = O(g(x))$, falls $ f(x) \leq \text{const} g(x) $
OC	Ohne Normalenconstraint (ohne anatomische Vorüberlegung)
ω	Kreisfrequenz
Ω	Gebiet des Volumenleiters Kopf
Ω_i	i -te Schicht im Mehrschichtmodell
$\overline{\Omega}_i$	Abschluß der Schicht Ω_i
Ω_{Zyl}	Gebiet des aktivierten Neuronenverbands (Zylinder)
p	Anzahl Schichten des schichtweise homogenen Volumenleiters
$P_{R(A)}$	Projektion auf $R(A)$
∂_i	partielle Ableitung $\partial/\partial x_i$
∂^α	partielle Ableitung der Ordnung α
Φ	Elektrisches Potential
Φ^n	Ritz-Galerkin-Lösung im Raum V_n
Φ	Koeffizientenvektor von Φ^n bzgl. der Basis $\{h_1, \dots, h_n\}$
Ψ	Magnetischer Fluß
Q	Orthogonale Matrix
\mathcal{R}	Menge der reellen Zahlen
$R(A)$	$\{g \in Y : \exists f \in X \text{ mit } Af = g\}$
$R(A)^\perp$	Orthogonale Komplement von $R(A)$
r_i	Radius der Oberfläche Γ_i
ρ	Elektrische Ladungsdichte
$\rho(A)$	Spektralradius der Matrix A
$\nabla \times \mathbf{A}$	Rotation des Vektorfeldes \mathbf{A}
\mathbf{s}	Vektor der Quellstärken
\mathbf{s}^+	$= E^+ \mathbf{v}$ Lösung minimaler Norm bei unverrauschten Daten
\mathbf{s}^ϵ	Berechnete Quellstärken bei verrauschten Meßdaten
\mathbf{s}_ϵ^+	$= E^+ \mathbf{v}^\epsilon$ Lösung minimaler Norm bei verrauschten Daten
SA	Simulated Annealing
SA-COF	Simulated Annealing in Kombination mit kompletter orthogonaler Faktorisierung (ohne Regularisierung)
SA-TSVD	Simulated Annealing in Kombination mit abgeschnittener Singulärwertzerlegung (mit Regularisierung)
σ	Elektrische Leitfähigkeit
$\sigma_i^- = \sigma_i = \sigma_{i-1}^+$	Leitfähigkeit der i -ten Schicht im Mehrschichtmodell
ς_i	i -ter Singulärwert
SN	Signal-Rausch-Verhältnis
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Duale Paarung (Skalarprodukt)
$\langle f, g \rangle_\nu$	$\sum_n \varsigma_n^{-2\nu} \langle f, v_n \rangle \langle g, v_n \rangle$, Skalarprodukt in X_ν
$H^m(\Omega)$	Sobolevraum von L_2 -Funktionen mit quadrat-integrierbaren Ableitungen bis zur Ordnung m
H_{D}^1	$\{v \in H^1(\Omega), \int_\Omega v d\Omega = 0\}$
H'	Dualraum zu H
$\ \cdot\ _m$	Sobolevnorm der Ordnung m
$\ f\ _\nu$	$(\sum_n \varsigma_n^{-2\nu} \langle f, v_n \rangle ^2)^{1/2}$, Norm in X_ν
$\ \cdot\ _{0,\Gamma}$	L_2 -Norm auf Γ
$ \cdot _m$	Sobolevseminorm der Ordnung m

$\text{span}\{h_1, \dots, h_n\}$	Erzeugnis von $\{h_1, \dots, h_n\}$
SQUIDS	Superconducting QUantum Interference DeviceS
$\ \cdot\ _{L^\infty}$	Suprenumsnorm
T	Tesla, Einheit der magnetischen Induktion, $1\text{T}=1\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$
τ	Triangulation von Ω
T_i	i -tes finites Element der Triangulation von Ω
T_γ	Regularisierung von A^+ mit Regularisierungsparameter γ
$\text{Tr}(f)$	Träger der Funktion f
TSVD	Truncated Singular Value Decomposition
U	Bei der Singulärwertzerlegung entstehende orthogonale Matrix aus $\mathcal{R}^{m \times m}$
u_i	i -ter Eigenvektor von AA^*
\mathbf{u}_i	i -ter Eigenvektor von EE^{tr}
Υ	Leiterschleife beim MEG
\mathbf{v}	Vektor der unverrauschten Potential- und Flußwerte an den Meßabnehmern
\mathbf{v}^c	$= \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ Vektor der verrauschten Potential- und Flußwerte an den Meßabnehmern
$\Delta\mathbf{v}$	Rauschen in den Meßdaten
v_i	i -ter Eigenvektor von A^*A
\mathbf{v}_i	i -ter Eigenvektor von $E^{tr}E$
V	Bei der Singulärwertzerlegung entstehende orthogonale Matrix aus $\mathcal{R}^{n \times n}$
$\text{Var}(\cdot)$	Variationsaufgabe
V_n	n -dimensionale Teilraum des Raums V
X_ν	$= R((A^*A)^\nu)^{1/2}$, Prähilbertskala
ξ_m	Kollokationspunkt m

Literaturverzeichnis

- [1] Aarts, E., Korst, J. SIMULATED ANNEALING AND BOLTZMANN MACHINES; A STOCHASTIC APPROACH TO COMBINATORIAL OPTIMIZATION AND NEURAL COMPUTING. John Wiley & Sons, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore
- [2] Beckmann, R., Buchner, H., Knoll, G. INVERSE LOCALIZATION OF NEURONAL ACTIVITY ON OPPOSITE WALLS OF A SIMULATED SULCUS. Third International Hans Berger Congress, Jena, Oktober 1996
- [3] Beckmann, R. FINITE-ELEMENTE ANALYSE DER ELEKTRISCHEN AKTIVITÄT DES ZENTRALNERVENSYSTEMS SOWIE LÖSUNG DES INVERSEN PROBLEMS. Diplomarbeit im Maschinenbau, Mai 1993, Institut für Maschinenelemente und Maschinengestaltung der RWTH Aachen
- [4] Bertrand, O., Thévenet, M. and Perrin, F. EFFECTS OF SKULL HOLES ON THE SCALP POTENTIAL DISTRIBUTION EVALUATED WITH A FINITE ELEMENT MODEL. In: Proc. Satellite Symp. on Neuroscience and Technology. 14th Annual Int. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Lyon, 1992:42-45
- [5] Braess, Dietrich FINITE ELEMENTE. Springer-Verlag, 1992
- [6] Bronstein-Semendjajew TASCHENBUCH DER MATHEMATIK. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main
- [7] Buchner, H., Fuchs, M., Wischmann, H.-A., Dössel, O., Ludwig, I., Knepper, A., Berg, P. SOURCE ANALYSIS OF MEDIAN NERVE AND FINGER STIMULATED SOMATOSENSORY EVOKED POTENTIALS: MULTICHANNEL SIMULTANEOUS RECORDING OF ELECTRIC AND MAGNETIC FIELDS COMBINED WITH 3D-MR-TOMOGRAPHY. Brain Topography, Vol.6, Nr.4, 1994
- [8] Buchner, H., Adams, L., Knepper, A., Rüger, R., Laborde, G., Ludwig, I., Reul, J. and Scherg, M. PRE-OPERATIVE DETERMINATION OF THE CENTRAL SULCUS BY DIPOLE SOURCE ANALYSIS OF EARLY SOMATOSENSORY EVOKED POTENTIALS AND 3D-NMR-TOMOGRAPHY. J.Neurochir., 1994
- [9] Buchner, H., Rienäcker, A., Beckmann, R., Pesch, J., Fuchs, M., Wagner, M., Silny, J. and Knoll, G. INVERSE LOCALIZATION OF ELECTRIC DIPOLE CURRENT SOURCES IN FINITE ELEMENT MODELS OF THE HUMAN HEAD. Electroenceph. clin. Neurophysiol., to appear
- [10] Buchner, H., Beckmann, R., Rienäcker, A., Pohlmeier, Wagner, M., Fuchs, M., Pesch, J., Wolters, C., Silny, J. and Knoll, G. EEG/MEG SOURCE RECONSTRUCTION, -THE FUNCTIONALITY OF CAUCHY-. ISBET, Zürich 1997

- [11] Dahmen, W. MULTISKALENMETHODEN. Vorlesung an der RWTH Aachen, Sommersemester 1995
- [12] de Munck, J.C. A LINEAR DISCRETIZATION OF THE VOLUME CONDUCTOR BOUNDARY INTEGRAL EQUATION USING ANALYTICALLY INTEGRATED ELEMENTS. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.39, No.9, September 1992
- [13] de Munck, J.C. A MATHEMATICAL AND PHYSICAL INTERPRETATION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD OF THE BRAIN. Ph.D.Thesis, University of Amsterdam, The Netherlands, 1989
- [14] Engl, H.W., Gfrerer, H. A POSTERIORI PARAMETER CHOICE FOR GENERAL REGULARIZATION METHODS FOR SOLVING LINEAR ILL-POSED PROBLEMS. Appl.Numer.Math.4, 1988, 395-417
- [15] Fender, D.H. MODELS OF THE HUMAN BRAIN AND THE SURROUNDING MEDIA: THEIR INFLUENCE ON THE RELIABILITY OF SOURCE LOCALIZATION. J. clin. Neurophysiol., Vol.8, 1991, pp.381-390
- [16] Friedrich, V., Hofmann, B., Tautenhahn, U. MÖGLICHKEITEN DER REGULARISIERUNG BEI DER AUSWERTUNG VON MESSDATEN. Wissenschaftliche Schriftenreihe der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, 10/1979
- [17] Hackbusch, W. THEORIE UND NUMERIK ELLIPTISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. Teubner Studienbücher, 1986
- [18] Hackbusch, W. INTEGRALGLEICHUNGEN, THEORIE UND NUMERIK. Teubner Studienbücher, 1989
- [19] Hämmerlin, G., Hoffmann, K.-H. NUMERISCHE MATHEMATIK. Springer-Verlag, 2.Auflage, 1991
- [20] Helmholtz, H. ÜBER EINIGE GESTZTE DER VERTHEILUNG ELEKTRISCHER STRÖME IN KÖRPERLICHEN LEITERN, MIT ANWENDUNG AUF DIE THIERISCH-ELEKTRISCHEN VERSUCHE. Ann.Phys.Chem., vol.89, pp.211-233, pp.353-377, 1853
- [21] Hämäläinen, M.S., Sarvas, J. REALISTIC CONDUCTIVITY GEOMETRY MODEL OF THE HUMAN HEAD FOR INTERPRETATION OF NEUROMAGNETIC DATA. In: M.S.Hämäläinen Interpretation of Neuromagnetic Measurements: Modelling and Statistical Considerations, Ph.D.thesis, Helsinki University of Technology, Finland, 1987.
- [22] Heuser, H. LEHRBUCH DER ANALYSIS, TEIL 2. B.G.Teubner Stuttgart, 1991
- [23] Heuser, H. FUNKTIONALANALYSIS. Teubner Stuttgart, 1975
- [24] Hofmann, Bernd REGULARIZATION FOR APPLIED INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS. Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig, 1986
- [25] Ilmoniemi, R.J. MAGNETIC SOURCE IMAGING. Biological Effects of Electric and Magnetic Fields, Vol2, D.O.Carpenter and S.Ayrapetyan
- [26] Jantscher, Lothar DISTRIBUTIONEN. W. De Gruyter, 1971
- [27] Kernighan & Ritchie. PROGRAMMING LANGUAGE C. Prentice Hall Software Series

- [28] Lynn, M. Stuart, Timlake, William P. THE USE OF MULTIPLE DEFLATIONS IN THE NUMERICAL SOLUTION OF SINGULAR SYSTEMS OF EQUATIONS, WITH APPLICATIONS TO POTENTIAL THEORY. SIAM J. Numer. Anal., Vol.5, No.2, June 1968
- [29] Louis, A.K. INVERSE UND SCHLECHT GESTELLTE PROBLEME. Teubner-Verlag, 1989
- [30] Louis, Maaß, Rieder WAVELETS. Teubner-Verlag, 1994
- [31] Schäffler, A., Schmidt, S. MENSCH, KÖRPER, KRANKHEIT. Jungjohann Verlag bei Gustav Fischer, 2. Auflage, 1996
- [32] Meijs, J.W.H., Peters, M.J. THE EEG AND MEG, USING A MODEL OF EXCENTRIC SPHERES TO DESCRIBE THE HEAD. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.34, pp.913-920, 1987
- [33] Meijs, J.W.H., Weier, O.W., Peters, M.J., van Oosterom, A. ON THE NUMERICAL ACCURACY OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.36, pp.1038-1049, 1989
- [34] Melkman, A.A., Micchelli, C.A. OPTIMAL ESTIMATION OF LINEAR OPERATORS IN HILBERT SPACES FROM INACCURATE DATA. SIAM, J. Numer. Anal. 16, 1979, 87-105
- [35] Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H., Teller, E. EQUATION OF STATE CALCULATIONS BY FAST COMPUTING MACHINES. J. of Chemical Physics, 1953, 21, 1087
- [36] Nolting, W. ELEKTRODYNAMIK. Grundkurs: Theoretische Physik, Band 3, Verlag Zimmermann-Neufang
- [37] Nunez, P.L. LOCALIZATION OF BRAIN ACTIVITY WITH ELECTROENCEPHALOGRAPHY. In: S. Sato (Ed.), Magnetoencephalography, Raven Press, New York, 1990, 39-65
- [38] Okada, Y. NEUROGENESIS OF EVOKED MAGNETIC FIELDS. Biomagnetism, Erné, S.N., Hahlbohm, H.D. and Lübbig, H. (eds.), de Gruyter, Berlin, pp.399-408, 1981
- [39] Penfield, W. and Jasper, H. EPILEPSY AND THE FUNCTIONAL ANATOMY OF THE HUMAN BRAIN. Little, Brown, Boston (1954)
- [40] Pesch, Jörg ÜBERPRÜFUNG INVERSER FELDBERECHNUNGEN IM MODELL AM BEISPIEL DES ELEKTROENCEPHALOGRAMMS. Diplomarbeit in Physik, Oktober 1995, Helmholtz-Institut für Biomedizinische Technik der RWTH Aachen
- [41] Plonsey, R. BIOELECTRIC PHENOMENA. McGraw-Hill Book Company, New York, 1969
- [42] Plonsey, R. and Heppner, D. CONSIDERATIONS ON QUASI-STATIONARITY IN ELECTRO-PHYSIOLOGICAL SYSTEMS. Bull. math. Biophys., Vol.29, pp.657-664, 1967
- [43] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P. NUMERICAL RECIPES IN FORTRAN: THE ART OF SCIENTIFIC COMPUTING. Cambridge University Press, Second Edition, 1992
- [44] Pohlmeier, R. LOKALISATION ELEKTRISCHER GEHIRNAKTIVITÄT DURCH INVERSE ANALYSE DES MAGNETOENCEPHALOGRAMMS (MEG) MIT FINITE-ELEMENTE-MODELLEN DES KOPFES. Diplomarbeit in Elektrotechnik, 1996, Klinik für Neurologie der RWTH Aachen

- [45] Pohlmeier, R., Buchner, H., Knoll, G. SENSITIVITY OF SOURCE LOCALIZATION IN THE HUMAN BRAIN TO THE ELECTRICAL CONDUCTIVITIES IN A REALISTIC HEAD MODEL. Third International Hans Berger Congress, Jena, Oktober 1996
- [46] PSCHYREMBEL, KLINISCHES WÖRTERBUCH. W. de Gruyter, 256.Auflage, 1990
- [47] Rabending, G. ASPEKTE DER PHARMAKOTHERAPIE -PSYCHOPHARMAKA-. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, Heidelberg, 1994, Band 2
- [48] Schmidt, R.F., Thews, G. PHYSIOLOGIE DES MENSCHEN. Springer-Verlag
- [49] Schwan, H., Kay, C. THE CONDUCTIVITY OF LIVING TISSUES. Ann.N.Y.Acad.Sci.65:1007 (1957)
- [50] Schwarz, H.R. METHODE DER FINITEN ELEMENTE. Teubner-Studienbücher, 1991
- [51] Silbernagl, Stefan, Despopoulos, Agamemnon TASCHENATLAS DER PHYSIOLOGIE. G. Thieme Verlag
- [52] Smythe, W. R. STATIC AND DYNAMIC ELECTRICITY. New York, Hemisphere Publishing Corporation, 1989, Third Edition
- [53] Spiegel, Murray R. VEKTORANALYSIS, THEORIE UND ANWENDUNG. McGraw-Hill Book Company, 1982
- [54] Vainikko, G.M. THE DISCREPANCY PRINCIPLE FOR A CLASS OF REGULARIZATION METHODS. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, No.3, 1982, 1-19
- [55] Vainikko, G.M. THE CRITICAL LEVEL OF DISCREPANCY IN REGULARIZATION METHODS. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, No.6, 1983, 1-9
- [56] Van Oosterom, A., Strackee, J. THE SOLID ANGLE OF A PLANE TRIANGLE. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.BME-302,february 1983
- [57] Wang, J.-Z. MNLS INVERSE DISCRIMINATES BETWEEN NEURONAL ACTIVITY ON OPPOSITE WALLS OF A SIMULATED SULCUS OF THE BRAIN. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.41,No.5,may 1994
- [58] Wendland, W. DIE BEHANDLUNG DER RANDWERTAUFGABEN IM \mathcal{R}^3 MIT HILFE VON EINFACH- UND DOPPELSCHICHTPOTENTIALEN. Numer.Math.11, 380-404, 1968
- [59] Werner, J. NUMERISCHE MATHEMATIK 1. Vieweg Studium, 1992
- [60] Wieringa, H.J. MEG, EEG AND THE INTEGRATION WITH MAGNETIC RESONANCE IMAGES. Proefschrift Enschede.-Met lit.opg.-Met samenvatting in het Nederlands, ISBN 90-9006505-9
- [61] Yosida, K. FUNCTIONAL ANALYSIS. 6th edition, Springer, Berlin, 1980
- [62] Yvert, B., Bertrand, O., Echallier, J.F., Pernier, J. IMPROVED FORWARD EEG CALCULATIONS USING LOCAL MESH REFINEMENT OF REALISTIC HEAD GEOMETRIES Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 1995, pp.381-392

- [63] Yvert, B., Bertrand, O., Echallier, J.F., Pernier, J. IMPROVED DIPOLE LOCALIZATION USING LOCAL MESH REFINEMENT OF REALISTIC HEAD GEOMETRIES: AN EEG SIMULATION STUDY *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 1996, to appear
- [64] Zhang, Z. and Jewett, D.L. INSIDIOUS ERRORS IN DIPOLE LOCALISATION PARAMETERS AT A SINGLE TIME-POINT DUE TO MODEL MISSPECIFICATIONS OF NUMBER OF SHELLS. *Electroenceph. clin. neurophys.*, vol.88,pp.1-11,1993

Ich versichere, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Aachen, den 27. März 1997