Existence and uniqueness for the EEG forward problem

IBB
Institute for Biomagnetism and Biosignalanalysis

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Carsten H. Wolters

Institut für Biomagnetismus und Biosignalanalyse, Westf. Wilhelms-Universität Münster, Germany

Lecture, Nov 5, 2024

Structure of the lecture

- Existence and uniqueness of the forward problem solution (Chapters 6.1.1-6.1.6 from lecture scriptum)
  - 6.1.1: Basics
  - 6.1.2: The subtraction approach to get rid of the singularity on the right-hand-side (derivation of the equation for the correction potential)
  - 6.1.3: Types of partial differential equations
  - 6.1.4: Sobolev spaces
  - 6.1.5: A variational formulation
  - 6.1.6: Variational formulation, existence and uniqueness of the solution for the correction potential

6.1.3 Typeneinteilung

Ob Anfangs- oder Randwerte bei partiellen Differentialgleichungen vorzugeben sind, hängt vom *Typ der Differentialgleichung* ab. Die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in n Variablen hat die Gestalt

$$-\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x). \tag{6.13}$$

Falls die Funktionen a_{ik}, b_i und c unabhängig von x sind, spricht man von einer *Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*. Weil für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u_{x_i x_k} = u_{x_k x_i}$ gilt, kann o.E.d.A. die Symmetrie $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$ vorausgesetzt werden. Die zugeordnete $n \times n$ Matrix

$$A(x) := (a_{ik}(x))$$

ist dann symmetrisch.

Definition 6.1.17 (Typ der Differentialgleichung).

1. *Die Gleichung (6.13) heisst* elliptisch *im Punkte x, wenn $A(x)$ positiv definit ist.*

2. *Die Gleichung (6.13) heisst* hyperbolisch *im Punkte x, wenn $A(x)$ einen negativen und $n-1$ positive Eigenwerte hat.*

3. *Die Gleichung (6.13) heisst* parabolisch *im Punkte x, wenn $A(x)$ positiv semidefinit, aber nicht definit ist und der Rang von $(A(x), b(x))$ gleich n ist.*

4. *Eine Gleichung heisst* elliptisch, hyperbolisch *oder* parabolisch, *wenn sie für alle Punkte des Gebiets die betreffende Eigenschaft hat.*

In beiden Fällen hat das Potential Φ^∞ eine Singularität am Ort $x = x_0$ und ist ansonsten glatt. Setzt man (6.5–6.7) in (6.1) ein, dann erhält man die Poisson Gleichung für das Korrekturpotential

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}) = f \ \text{ in } \Omega, \qquad f := \nabla \cdot (\sigma^{\mathrm{corr}} \nabla \Phi^\infty), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle \sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}, \mathrm{n} \rangle = g \ \text{ on } \Gamma, \qquad g := -\langle \sigma \nabla \Phi^\infty, \mathrm{n} \rangle. \tag{6.12}$$

Diese Gleichung wird numerisch nach Φ^{corr} gelöst, um dann das Potential Φ schliesslich über (6.6) zu berechnen.

Comment 6.1.1 (Typ der Differentialgleichung). *Die Differentialgleichung (6.11) fürs Korrekturpotential ist von elliptischem Typ, da*

$$A(x) = \sigma(x)$$

der positiv definite Leitfähigkeitstensor am Ort $x \in \Omega$ ist.

Structure of the lecture

- Existence and uniqueness of the forward problem solution (Chapters 6.1.1-6.1.6 from lecture scriptum)
  - 6.1.1: Basics
  - 6.1.2: The subtraction approach to get rid of the singularity on the right-hand-side (derivation of the equation for the correction potential)
  - 6.1.3: Types of partial differential equations
  - 6.1.4: Sobolev spaces
  - 6.1.5: A variational formulation
  - 6.1.6: Variational formulation, existence and uniqueness of the solution for the correction potential

6.1.4 Sobolev Räume

Die *Sobolev-Räume* werden auf dem Funktionenraum $L_2(\Omega)$ aufgebaut. $L_2(\Omega)$ besteht aus allen Funktionen u, deren Quadrat über Ω Lebesque-integrierbar ist. Dabei werden zwei Funktionen u und v miteinander identifiziert, wenn $u(x) = v(x)$ für $x \in \Omega$ abgesehen von einer Nullmenge gilt. Durch das Skalarprodukt

$$(u, v)_0 := (u, v)_{L_2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

wird $L_2(\Omega)$ zu einem Hilbert-Raum mit der Norm

$$||u||_0 = \sqrt{(u, u)_0}.$$

Definition 6.1.18 (Schwache Ableitung). *$u \in L_2(\Omega)$ besitzt die (schwache) Ableitung $v = \partial^\alpha u$, falls $v \in L_2(\Omega)$ und*

$$(w, v)_0 = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha w, u)_0 \quad \forall\, w \in C_0^\infty(\Omega) \tag{6.14}$$

gilt. In dieser Definition ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multiindex mit Ordnung $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. $C^\infty(\Omega)$ bezeichnet den Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen und $C_0^\infty(\Omega)$ den Unterraum der Funktionen, die nur in einer kompakten Teilmenge von Ω von 0 verschiedene Werte annehmen.

$$(w,v)_0 = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha w, u)_0 \quad \forall\, w \in C_0^\infty(\Omega) \tag{6.14}$$

Comment 6.1.2 (Schwache Ableitung).

- *Wenn eine Funktion im klassischen Sinne differenzierbar ist, existiert auch die schwache Ableitung, und beide Ableitungen stimmen überein. Dann beinhaltet (6.14) gerade die Greensche Formel für die partielle Integration.*

- *Der Begriff der schwachen Ableitung wird auf andere Differentialoperatoren entsprechend übertragen. Sei z.B. $u \in L_2(\Omega)^n$ ein Vektorfeld. Dann ist $v \in L_2(\Omega)$ die Divergenz im schwachen Sinne, kurz $v = div\ u$, wenn*

$$(w,v)_0 = -(\nabla w, u)_0 \quad \forall\, w \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt.

Definition 6.1.19. *Für ganzzahliges $m \geq 0$ bezeichnet $H^m(\Omega)$ die Menge aller Funktionen $u \in L_2(\Omega)$, die schwache Ableitungen $\partial^\alpha u$ für alle $|\alpha| \leq m$ besitzen. In $H^m(\Omega)$ wird durch*

$$(u,v)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0$$

ein Skalarprodukt mit der zugehörigen Norm

$$||u||_m := \sqrt{(u,u)_m} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||_0^2} \tag{6.15}$$

erklärt. Daneben betrachtet man die Seminorm

$$|u|_m := \sqrt{\sum_{|\alpha| = m} ||\partial^\alpha u||_0^2}. \tag{6.16}$$

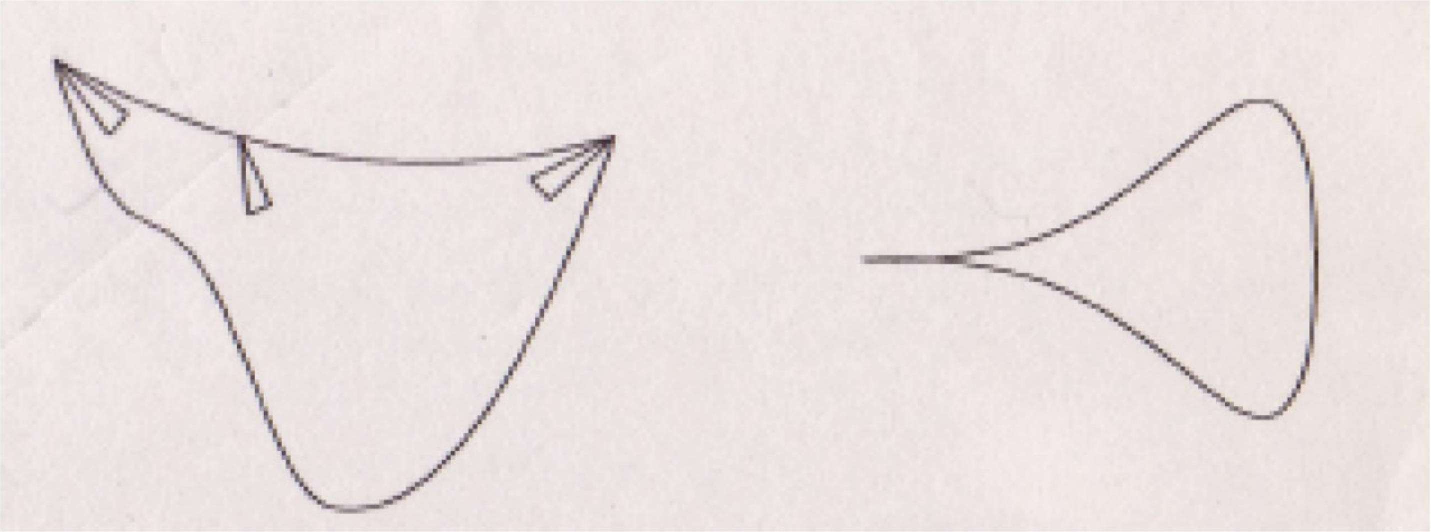


Figure 6.1: *Kegelbedingung: Die Innenwinkel an den Ecken des Gebiets seien positiv, sodass man einen Kegel mit positivem Scheitelwinkel so in* Ω *verschieben kann, dass er die Ecken berührt. Gebiete mit erfüllter (links) bzw. verletzter Kegelbedingung (rechts).*

Comment 6.1.3 (Sobolev-Räume).

- *Mit der Norm* $||\cdot||_m$ *ist* $H^m(\Omega)$ *vollständig, also ein Hilbert-Raum.*

- *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen mit stückweise glattem Rand und erfülle eine Kegelbedingung (siehe dazu Abbildung 6.1). Sei zudem* $m \geq 0$. *Dann ist* $C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ *dicht in* $H^m(\Omega)$. $H^m(\Omega)$ *ist also die Vervollständigung von* $C^\infty(\Omega)$, *wenn* Ω *beschränkt ist.*

- *Die Vervollständigung von* $C_0^\infty(\Omega)$ *bzgl. der Sobolev-Norm* $||\cdot||_m$ *wird mit* $H_0^m(\Omega)$ *bezeichnet.*

- *Es ergibt sich folgendes Schema:*

$$
\begin{array}{ccccccc}
L_2(\Omega) = & H^0(\Omega) & \supset H^1(\Omega) & \supset H^2(\Omega) & \supset \dots \\
& \| & \cup & \cup & \\
& H_0^0(\Omega) & \supset H_0^1(\Omega) & \supset H_0^2(\Omega) & \supset \dots
\end{array}
$$

- *Der Raum $L_2(\Omega)$ enthält auch unbeschränkte Funktionen. Auch höhere Sobolev-Räume können durchaus Funktionen mit Singularitäten enthalten. Ein Beispiel ist die Funktion*

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\beta}}, \qquad \beta < \frac{1}{2},$$

die im H^1 enthalten ist und eine Singularität im Ursprung hat.

- *Es ist*

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + |u|_1^2 \tag{6.17}$$

Theorem 6.1.20 (Poincaré Friedrichssche Ungleichung)**.** *Sei Ω in einem n-dimensionalen Würfel der Kantenlänge s enthalten. Dann gilt:*

$$\|v\|_0 \leq s|v|_1 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Proof. Siehe [33, Satz 1.5]. □

Folgende Sätze sind Folgerungen aus der Friedrichsschen Ungleichung (siehe dazu [33]):

Theorem 6.1.21 (Norm-Äquivalenz). *Wenn Ω beschränkt ist, sind in $H_0^m(\Omega)$ die Normen $||\cdot||_m$ und $|\cdot|_m$ äquivalent. Ist Ω in einem Würfel mit Kantenlänge s enthalten, so gilt*

$$|v|_m \le ||v||_m \le (1+s)^m |v|_m \quad \forall v \in H_0^m(\Omega)$$

Theorem 6.1.22 (Variante der Friedrichsschen Ungleichung). *Es sei Ω ein Gebiet mit Volumen $\mu(\Omega)$, welches in einem Würfel mit Kantenlänge s enthalten ist. Dann gilt für alle $v \in H^1(\Omega)$*

$$||v||_0 \leq |\overline{v}|\sqrt{\mu(\Omega)} + 2s|v|_1, \qquad \overline{v} := \int_\Omega v(x)dx/\mu(\Omega).$$

Theorem 6.1.23 (Sobolev-Raum der δ-Distribution)**.** *Es ist*

$$\delta \in H^{-n/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \quad \forall \varepsilon > 0$$

und

$$D^\alpha \delta \in H^{-n/2-\|\alpha\|-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \quad \forall \varepsilon > 0$$

Proof. Siehe [201, Seite 273]. $\square$

Structure of the lecture

- Existence and uniqueness of the forward problem solution (Chapters 6.1.1-6.1.6 from lecture scriptum)
  - 6.1.1: Basics
  - 6.1.2: The subtraction approach to get rid of the singularity on the right-hand-side (derivation of the equation for the correction potential)
  - 6.1.3: Types of partial differential equations
  - 6.1.4: Sobolev spaces
  - 6.1.5: A variational formulation
  - 6.1.6: Variational formulation, existence and uniqueness of the solution for the correction potential

6.1.5 Variationsformulierung

Wir betrachten nun den elliptischen Differentialoperator 2.Ordnung mit Divergenzstruktur

$$Lu := -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i \left(a_{ik}\partial_k u\right) + a_0 u.$$

Das Problem

$$Lu = f \ \text{ in } \Omega, \qquad u = g \ \text{ auf } \Gamma$$

wird *Dirichlet-Problem* genannt, während

$$Lu = f \ \text{ in } \Omega, \qquad \sum_{i=1}^{n} n_i a_{ik} \partial_k u = g \ \text{ auf } \Gamma$$

Neumann-Problem genannt wird.

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}) = f \ \text{ in } \Omega, \qquad f := \nabla \cdot (\sigma^{\mathrm{corr}} \nabla \Phi^{\infty}), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle \sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}, \mathrm{n} \rangle = g \ \text{ on } \Gamma, \qquad g := -\langle \sigma \nabla \Phi^{\infty}, \mathrm{n} \rangle. \tag{6.12}$$

Eine Funktion, welche eine gegebene Differentialgleichung 2.Ordnung erfüllt und die vorgegebenen Randwerte annimmt, wird als *klassische Lösung* bezeichnet, wenn sie bei Dirichlet-Randwerten in $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ bzw. bei Neumann-Randwerten in $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ enthalten ist. Klassische Lösungen erhält man bei hinreichend glattem Rand sowie stetig differenzierbaren Koeffizienten. Gleichung (6.11) kann damit nur unter der Bedingung $\sigma \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3}\right)$ im klassischen Sinne verstanden werden. Für ein Multi-Kompartment-Modell mit Leitfähigkeitssprüngen zwischen Kompartments suchen wir eine sogenannte *schwache Lösung* im Sobolevraum $H^1(\Omega)$.

Theorem 6.1.24 (Charakterisierungssatz). *Sei V ein linearer Raum und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, positive Bilinearform, d.h. es sei $a(u,u) > 0$ $\forall u \in V$, $u \neq 0$. Ferner sei $l : V \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Die Grösse*

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - l(v)$$

nimmt in V ihr Minimum genau dann bei u an, wenn

$$a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in V \tag{6.18}$$

gilt. Ausserdem gibt es höchstens eine Minimallösung.

$$a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in V \tag{6.18}$$

Proof. Für $u, v \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} J(u+tv) &= \frac{1}{2}a(u+tv, u+tv) - l(u+tv) \\ &= J(u) + t\,[a(u,v) - l(v)] + \frac{1}{2}t^2 a(v,v). \end{aligned} \tag{6.19}$$

$\underline{\Leftarrow:}$ Wenn $u \in V$ die Bedingung (6.18) erfüllt, dann folgt aus (6.19) mit $t = 1$:

$$\begin{aligned} J(u+v) &= J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \\ &> J(u), \end{aligned} \tag{6.20}$$

falls $v \neq 0$ ist. Dann ist u also eindeutiger Minimalpunkt.
$\underline{\Rightarrow:}$ Wenn J bei u ein Minimum hat, muss für jedes $v \in V$ die Ableitung der Funktion $t \to J(u+tv)$ bei $t = 0$ verschwinden. Nach (6.19) beträgt die Ableitung $a(u,v) - l(v)$, und es folgt (6.18). $\square$

Theorem 6.1.25 (Minimaleigenschaft). *Jede klassische Lösung der Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned} Lu &= f \ \text{in}\ \Omega \\ u &= 0 \ \text{auf}\ \Gamma \end{aligned} \tag{6.21}$$

mit elliptischem Differentialoperator 2.Ordnung mit Divergenzstruktur

$$Lu := -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i \left(a_{ik}\partial_k u\right) + a_0 u \tag{6.22}$$

ist Lösung des Variationsproblems

$$J(v) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\partial_i v \partial_k v + a_0 v^2 - f v\right] d\Omega \to \text{min!} \tag{6.23}$$

unter allen Funktionen in $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit Dirichlet-Randwerten (Nullrandwerten).

$$\begin{aligned} Lu &= f \;\; in\, \Omega \qquad (6.21) \\ u &= 0 \;\; auf\, \Gamma \end{aligned}$$

$$Lu := -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i \left(a_{ik}\partial_k u\right) + a_0 u \qquad (6.22)$$

Proof. Der Beweis nutzt die Greensche Formel: Seien v und w C^1-Funktionen, dann gilt

$$\int_\Omega v\partial_i w d\Omega = -\int_\Omega w\partial_i v d\Omega + \int_\Gamma v w n_i d\Gamma \qquad (6.24)$$

mit n_i die i-te Komponente der äusseren Normalen n. Indem man $w := a_{ik}\partial_k u$ in (6.24) einsetzt, folgt für alle $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit $v = 0$ auf Γ

$$\int_\Omega v\partial_i \left(a_{ik}\partial_k u\right) d\Omega = -\int_\Omega a_{ik}\partial_i v \partial_k u d\Omega. \qquad (6.25)$$

Nun setzt man

$$\begin{aligned} a(u,v) &:= \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\partial_i u \partial_k v + a_0 u v\right] d\Omega, \\ l(v) &:= \int_\Omega f v d\Omega. \end{aligned}$$

Durch Summation von (6.25) über i und k ergibt sich für jedes $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit $v = 0$ auf Γ:

$$\begin{aligned} a(u,v) - l(v) &= \int_\Omega v \left[-\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i \left(a_{ik}\partial_k u\right) + a_0 u - f\right] d\Omega \\ &\overset{(6.22)}{=} \int_\Omega v \left[Lu - f\right] d\Omega \overset{(6.21)}{=} 0. \end{aligned}$$

Aus dem Charakterisierungssatz 6.1.24 folgt die Minimaleigenschaft des Funktionals. $\square$

Comment 6.1.4. *Mit derselben Schlussweise erkennt man, dass jede Lösung des Variationsproblems, sofern sie im Raum* $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *liegt, eine klassische Lösung der Randwertaufgabe ist.*

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}) = f \ \text{ in } \Omega, \qquad f := \nabla \cdot (\sigma^{\mathrm{corr}} \nabla \Phi^{\infty}), \qquad (6.11)$$

Leider existiert, wie bereits erwähnt, für das Korrekturpotential in (6.11) im Multi-Kompartment-Modell mit Leitfähigkeitssprüngen zwischen den verschiedenen Kopfgeweben keine klassische Lösung. Zum Nachweis der Existenz einer Lösung muss das Problem deshalb in einem passenden Hilbert-Raum betrachtet werden. Dazu zunächst folgende Definitionen:

Definition 6.1.26 (Stetige Bilinearform)**.** *Sei H ein Hilbertraum. Eine Bilinearform $a : H \times H \to \mathbb{R}$ heisst* stetig, *wenn es eine Konstante $C_{\text{stet}} > 0$ gibt, sodass*

$$\forall u, v \in H : \quad |a(u,v)| \leq C_{\text{stet}} ||u||_H \, ||v||_H \, .$$

Definition 6.1.27 (H-Elliptizität)**.** *Eine symmetrische, stetige Bilinearform a heisst* H-elliptisch, *wenn mit einem* $C_{\mathrm{ell}} > 0$

$$\forall v \in H : \qquad a(v,v) \geq C_{\mathrm{ell}} ||v||_H^2$$

gilt.

Theorem 6.1.28 (Lax-Milgram)**.** *Sei V eine abgeschlossene (english: closed), konvexe Menge in einem Hilbert-Raum H und $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine elliptische Bilinearform. Für jedes $l \in H'$ hat das Variationsproblem*

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) \to \mathit{min!}$$

genau eine Lösung in V.

Proof. J ist nach unten beschränkt, denn es ist

$$
\begin{aligned}
J(v) &\geq \frac{1}{2}C_{\text{ell}}||v||_H^2 - ||l||_{H'} \cdot ||v||_H \\
&= \frac{1}{2C_{\text{ell}}}\left(C_{\text{ell}}||v||_H - ||l||_{H'}\right)^2 - \frac{||l||_{H'}^2}{2C_{\text{ell}}} \geq -\frac{||l||_{H'}^2}{2C_{\text{ell}}}.
\end{aligned}
$$

Setze $c_1 := \inf\{J(v) : v \in V\}$. Sei (v_n) eine Minimalfolge. Dann ist

$$
\begin{aligned}
C_{\text{ell}}||v_n - v_m||_H^2 &\leq a(v_n - v_m, v_n - v_m) \\
&= 2a(v_n, v_n) + 2a(v_m, v_m) - a(v_n + v_m, v_n + v_m) \\
&= 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8J\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) \\
&\leq 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8c_1,
\end{aligned}
$$

weil V konvex und deshalb $\frac{1}{2}(v_n + v_m) \in V$ ist. Wegen $J(v_n), J(v_m) \to c_1$ folgt $||v_n - v_m||_H \to 0$ für $n, m \to \infty$. Also ist (v_n) eine Cauchy-Folge in H und es existiert $u = \lim_{n\to\infty} v_n$. Da V abgeschlossen ist, gilt auch $u \in V$. Aus der Stetigkeit von J schliessen wir $J(u) = \lim_{n\to\infty} J(v_n) = \inf_{v\in V} J(v)$.

Die Lösung ist eindeutig, denn seien sowohl u_1 als auch u_2 Lösungen, dann wäre $u_1, u_2, u_1, u_2, \ldots$ eine Minimalfolge. Wie wir sahen, ist jede Minimalfolge eine Cauchy-Folge. Das ist nur für $u_1 = u_2$ möglich. $\square$

Definition 6.1.29 (Schwache Lösung). *Eine Funktion* $u \in H_0^1(\Omega)$ *heisst* schwache Lösung *der elliptischen Randwertaufgabe 2.Ordnung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen*

$$\begin{aligned} Lu &= f \;\; in\, \Omega, \\ u &= 0 \;\; auf\, \Gamma, \end{aligned} \tag{6.26}$$

mit

$$Lu := -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i \left(a_{ik} \partial_k u\right) + a_0 u, \tag{6.27}$$

wenn mit der zugehörigen Bilinearform und dem zugehörigen Funktional

$$\begin{aligned} a(u,v) &:= \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_i u \partial_k v + a_0 u v \right] d\Omega, \\ l(v) &:= \int_\Omega f v d\Omega = (f,v)_0 \end{aligned}$$

die Gleichungen

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): \qquad a(u,v) = l(v)$$

gelten.

Definition 6.1.30 (Gleichmässige Elliptizität; uniform ellipticity). *Nach Definition 6.1.17 ist ein Operator L elliptisch in Ω, wenn alle Eigenwerte von $A(x)$ positiv sind. Damit ist also L in Ω elliptisch, wenn*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j > 0 \qquad \forall x \in \Omega, 0 \neq \zeta \in \mathbb{R}^n. \tag{6.28}$$

Für alle $x \in \Omega$ *existiert* $c(x) := \min\{a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j : |\zeta| = 1\}$ *und muss positiv sein (*$c(x)$ *ist der kleinste Eigenwert von* $A(x)$*!). Somit kann man (6.28) auch in der Form*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geq c(x)|\zeta|^2, \qquad c(x) > 0\ \forall x \in \Omega, \zeta \in \mathbb{R}^n. \tag{6.29}$$

schreiben. Der Operator L heisst gleichmässig elliptisch *(english: uniformly elliptic) in Ω, wenn*

$$\inf\{c(x) : x \in \Omega\} > 0. \tag{6.30}$$

Theorem 6.1.31 (Existenzsatz). *Sei L mit*

$$Lu := -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i \left(a_{ik}\partial_k u\right) + a_0 u \tag{6.31}$$

ein gleichmässig elliptischer Differentialoperator 2.Ordnung. Dann hat das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} Lu &= f \;\; in\, \Omega \\ u &= 0 \;\; auf\, \Gamma \end{aligned} \tag{6.32}$$

$\forall f \in L_2(\Omega)$ *stets eine schwache Lösung in $H_0^1(\Omega)$. Diese ist Minimum des Variationsproblems*

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) \rightarrow min!$$

in $H_0^1(\Omega)$, wobei Bilinearform a und Funktional l folgendermassen definiert sind:

$$\begin{aligned} a(u,v) &:= \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\partial_i u \partial_k v + a_0 uv\right] d\Omega, \\ l(v) &:= \int_\Omega f v d\Omega = (f,v)_0. \end{aligned}$$

Proof. Stetigkeit der Bilinearform: Mit $d := \sup\{a_{ik}(x); x \in \Omega, 1 \leq i,k \leq n\}$ erhalten wir mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ik} \partial_i u \partial_k v d\Omega\right| &\leq d \sum_{i,k=1}^{n} \left|\int_{\Omega} \partial_i u \partial_k v d\Omega\right| \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} d \sum_{i,k=1}^{n} \sqrt{\int_{\Omega} (\partial_i u)^2 d\Omega} \sqrt{\int_{\Omega} (\partial_k v)^2 d\Omega} \\
&\leq dn^2 \sqrt{\int_{\Omega} (\partial_j u)^2 d\Omega} \sqrt{\int_{\Omega} (\partial_l v)^2 d\Omega} \\
&\leq dn^2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} (\partial_i u)^2 d\Omega} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} (\partial_i v)^2 d\Omega} \\
&= dn^2 |u|_1 |v|_1
\end{aligned}$$

Wenn ausserdem $C \geq \sup\{a_0(x); x \in \Omega\}$ angenommen wird, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega} a_0 uv d\Omega\right| &\leq C \left|\int_{\Omega} uv d\Omega\right| \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} C||u||_0 ||v||_0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Stetigkeit der Bilinearform bewiesen:

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq C||u||_0||v||_0 + dn^2|u|_1|v|_1 \\
&\leq C\sqrt{||u||_0^2 + |u|_1^2}\sqrt{||v||_0^2 + |v|_1^2} + dn^2\sqrt{|u|_1^2 + ||u||_0^2}\sqrt{|v|_1^2 + ||v||_0^2} \\
&\overset{(6.17)}{=} (C + dn^2)||u||_1||v||_1
\end{aligned}$$

$$||u||_1^2 = ||u||_0^2 + |u|_1^2 \qquad (6.17)$$

Elliptizität der Bilinearform: Die gleichmässige Elliptizität von L bewirkt nun nach adequater Koordinatentransformation $x \to Ux$ mit einer orthogonalen Matrix U, sodass $U^T A(x) U$ diagonal wird:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_i v \partial_k v \geq C_{\mathrm{ell}} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i v)^2.$$

Sei s nun die minimale Kantenlänge des Würfels, der Ω enthält, dann liefert die Integration

$$a(v,v) \geq C_{\mathrm{ell}} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} (\partial_i v)^2 d\Omega = C_{\mathrm{ell}} |v|_1^2 \overset{\text{Satz6.1.21}}{\geq} \frac{C_{\mathrm{ell}}}{1+s} ||v||_1^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

und die Elliptizität von a ist bewiesen.

Also ist a eine H_0^1-elliptische Bilinearform. Da $f \in L_2(\Omega)$, ist l nach Cauchy-Schwarzsscher Ungleichung ein beschränktes Funktional, sodass nach Satz 6.1.28 von Lax-Milgram die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung gesichert ist, die nach Charakterisierungssatz 6.1.24 auch Lösung des Variationsproblems ist. $\square$

$$a(u,v) \quad := \quad \int_{\Omega} \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_i u \partial_k v + a_0 uv \right] d\Omega,$$

Folgende Sätze sind Folgerungen aus der Friedrichsschen Ungleichung (siehe dazu [33]):

Theorem 6.1.21 (Norm-Äquivalenz)**.** *Wenn Ω beschränkt ist, sind in $H_0^m(\Omega)$ die Normen $||\cdot||_m$ und $|\cdot|_m$ äquivalent. Ist Ω in einem Würfel mit Kantenlänge s enthalten, so gilt*

$$|v|_m \leq ||v||_m \leq (1+s)^m |v|_m \quad \forall v \in H_0^m(\Omega)$$

Structure of the lecture

- Existence and uniqueness of the forward problem solution (Chapters 6.1.1-6.1.6 from lecture scriptum)
  - 6.1.1: Basics
  - 6.1.2: The subtraction approach to get rid of the singularity on the right-hand-side (derivation of the equation for the correction potential)
  - 6.1.3: Types of partial differential equations
  - 6.1.4: Sobolev spaces
  - 6.1.5: A variational formulation
  - 6.1.6: Variational formulation, existence and uniqueness of the solution for the correction potential

$$-\nabla\cdot(\sigma\nabla\Phi^{\mathrm{corr}}) = f \;\text{ in }\Omega, \qquad f := \nabla\cdot(\sigma^{\mathrm{corr}}\nabla\Phi^{\infty}), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle\sigma\nabla\Phi^{\mathrm{corr}}, \mathrm{n}\rangle = g \;\text{ on }\Gamma, \qquad g := -\langle\sigma\nabla\Phi^{\infty}, \mathrm{n}\rangle. \tag{6.12}$$

Für die elliptische Differentialgleichung 2.Ordnung mit Divergenzstruktur fürs Korrekturpotential (6.11) mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche (6.12) muss zunächst eine sogenannte Kompatibilitätsbedingung an die rechten Seiten f und g beachtet werden, die sich aus

$$\int_\Omega f d\Omega \overset{(6.11)}{=} -\int_\Omega \nabla\cdot(\sigma\nabla\Phi^{\mathrm{corr}})\,d\Omega \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_\Gamma \langle\sigma\nabla\Phi^{\mathrm{corr}}, \mathrm{n}\rangle d\Gamma \overset{(6.12)}{=} -\int_\Gamma g d\Gamma$$

ergibt. Die Kompatibilitätsbedingung lautet daher

$$\int_\Omega f d\Omega + \int_\Gamma g d\Gamma = 0 \tag{6.33}$$

[Wolters, Lecture scriptum]

$$-\nabla\cdot(\sigma\nabla\Phi^{\mathrm{corr}}) = f \;\text{ in }\Omega, \qquad f := \nabla\cdot(\sigma^{\mathrm{corr}}\nabla\Phi^{\infty}), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle\sigma\nabla\Phi^{\mathrm{corr}}, \mathrm{n}\rangle = g \;\text{ on }\Gamma, \qquad g := -\langle\sigma\nabla\Phi^{\infty}, \mathrm{n}\rangle. \tag{6.12}$$

Lemma 6.1.32. *Die Differentialgleichung fürs Korrekturpotential (6.11) mit inhomogenen Neumann Randbedingungen (6.12) erfüllt die Kompatibilitätsbedingung (6.33).*

Proof. Mit $\Omega' := \Omega \setminus K(x_0,\varepsilon)$, wobei $K(x_0,\varepsilon)$ eine Kugel mit Radius ε um die Quellposition x_0 ist, gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f + \int_\Gamma g &\overset{\text{Def.}}{=} \int_\Omega \nabla\cdot(\sigma^{\text{corr}}\nabla\Phi^\infty) - \int_\Gamma \langle\sigma\nabla\Phi^\infty, \mathrm{n}\rangle \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_\Gamma \langle\sigma^{\text{corr}}\nabla\Phi^\infty, \mathrm{n}\rangle - \int_\Gamma \langle\sigma\nabla\Phi^\infty, \mathrm{n}\rangle \\
&\overset{\text{Def.}}{=} -\int_\Gamma \langle\sigma^\infty\nabla\Phi^\infty, \mathrm{n}\rangle \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{\Omega'} \nabla\cdot(\sigma^\infty\nabla\Phi^\infty) + \int_{\partial K(x_0,\varepsilon)} \langle\sigma^\infty\nabla\Phi^\infty, \mathrm{n}\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt der obigen Gleichung sind beide Integrale gleich Null: Das Volumenintegral ist Null, da Φ^∞ eine Lösung des homogenen Problems ist und $J^p(x) = 0$ für alle $x \in \Omega'$. Das Oberflächenintegral ist Null, da Φ^∞ das Potential für einen Dipol im Mittelpunkt des kugelförmigen Integrationsgebietes ist und, wenn wir das Gebiet in zwei Halbkugeln aufteilen, das Oberflächenintegral über die eine Halbkugel exakt das Negative des Oberflächenintegrals der zweiten Halbkugel ist. Dazu muss man sich zunächst den Gradienten des Singularitätenpotentials (6.10) anschauen. Legt man $\mathbf{x}_0$, den Mittelpunkt der Kugel, in den Ursprung, dann sieht man, dass für alle Vektoren $\mathbf{r}$ vom Ursprung zu einem Punkt auf dem Kreisrand gilt:

$$\nabla\Phi^\infty(\mathbf{r}) = \nabla\Phi^\infty(-\mathbf{r}), \qquad \mathrm{n}(\mathbf{r}) = -\mathrm{n}(-\mathbf{r})$$

Damit gilt für das Integral über ∂K^-, den unteren Teil der Halbkugel,

$$\int_{\partial K^-} \langle\sigma^\infty\nabla\Phi^\infty(\mathbf{r}), \mathrm{n}(\mathbf{r})\rangle = \int_{\partial K^+} \langle\sigma^\infty\nabla\Phi^\infty(-\mathbf{r}), \mathrm{n}(-\mathbf{r})\rangle = -\int_{\partial K^+} \langle\sigma^\infty\nabla\Phi^\infty(\mathbf{r}), \mathrm{n}(\mathbf{r})\rangle.$$

$\square$

$$-\nabla\cdot(\sigma\nabla\Phi^{\text{corr}}) = f \;\text{ in } \Omega, \qquad f := \nabla\cdot(\sigma^{\text{corr}}\nabla\Phi^\infty), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle\sigma\nabla\Phi^{\text{corr}}, \mathrm{n}\rangle = g \;\text{ on } \Gamma, \qquad g := -\langle\sigma\nabla\Phi^\infty, \mathrm{n}\rangle. \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\Phi^\infty(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\sqrt{\det\sigma^\infty}} \cdot \frac{(\sigma^\infty)^{-1}\mathrm{M}}{\langle(\sigma^\infty)^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \mathbf{x}-\mathbf{x}_0\rangle^{3/2}} \\
&\quad - \frac{1}{4\pi\sqrt{\det\sigma^\infty}} \cdot \frac{3\langle\mathrm{M}, (\sigma^\infty)^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\rangle(\sigma^\infty)^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\langle(\sigma^\infty)^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \mathbf{x}-\mathbf{x}_0\rangle^{5/2}}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$-\nabla\cdot(\sigma\nabla\Phi^{\mathrm{corr}}) = f \;\text{ in } \Omega, \qquad f := \nabla\cdot(\sigma^{\mathrm{corr}}\nabla\Phi^{\infty}), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle\sigma\nabla\Phi^{\mathrm{corr}}, \mathrm{n}\rangle = g \;\text{ on } \Gamma, \qquad g := -\langle\sigma\nabla\Phi^{\infty}, \mathrm{n}\rangle. \tag{6.12}$$

Wir formulieren nun die Bilinearform $a : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ und das Funktional $l : H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ für die elliptische Differentialgleichung 2.Ordnung mit Divergenzstruktur fürs Korrekturpotential (6.11) mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche (6.12):

$$a(\Phi^{\mathrm{corr}}, v) := \int_\Omega \langle\sigma\nabla\Phi^{\mathrm{corr}}, \nabla v\rangle d\Omega \tag{6.34}$$

$$l(v) := \int_\Omega f v d\Omega + \int_\Gamma g v d\Gamma \tag{6.35}$$

Zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung Φ^{corr} wird des weiteren folgender Unterraum des $H^1(\Omega)$ benötigt:

$$H^1_*(\Omega) := \left\{ v\in H^1(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega v(x)dx = 0 \right\}. \tag{6.36}$$

Zunächst soll gezeigt werden, dass obige Bilinearform (6.34) elliptisch auf dem Raum $H^1_*(\Omega)$ ist.

$$a(\Phi^{\text{corr}}, v) \quad := \quad \int_\Omega \langle \sigma \nabla \Phi^{\text{corr}}, \nabla v \rangle d\Omega \qquad (6.34)$$

Lemma 6.1.33. *Die Bilinearform* $a(\cdot,\cdot)$ *aus* (6.34) *ist stetig auf* $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Proof. Sei $\sigma_{max} := \sup\{\sigma_{ik}(x); x \in \Omega, 1 \leq i,k \leq 3\}$. Dann ist die Bilinearform stetig,

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\overset{(6.34)}{=} \left| \int_\Omega \langle \sigma(x) \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx \right| \leq \sigma_{max} \left| \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx \right| \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sigma_{max} \|\nabla u\|_0 \|\nabla v(x)\|_0 = \sigma_{max} |u|_1 |v|_1 \\
&\leq \sigma_{max} \|u\|_1 \|v\|_1,
\end{aligned}$$

mit der Konstante $C_{\text{stet}} = \sigma_{max}$. □

$$a(\Phi^{\text{corr}}, v) \quad := \quad \int_\Omega \langle \sigma \nabla \Phi^{\text{corr}}, \nabla v \rangle d\Omega \qquad (6.34)$$

Theorem 6.1.22 (Variante der Friedrichsschen Ungleichung). *Es sei Ω ein Gebiet mit Volumen $\mu(\Omega)$, welches in einem Würfel mit Kantenlänge s enthalten ist. Dann gilt für alle $v \in H^1(\Omega)$*

$$||v||_0 \leq |\bar{v}| \sqrt{\mu(\Omega)} + 2s|v|_1, \qquad \bar{v} := \int_\Omega v(x)dx/\mu(\Omega).$$

Lemma 6.1.34. *Die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ aus (6.34) ist $H^1_*(\Omega)$-elliptisch.*

Proof. Sei $\sigma_{min} := \inf\{\sigma_{ik}(x); x \in \Omega, 1 \leq i,k \leq 3\}$ und s, $\bar{v}$ und $\mu(\Omega)$ wie in Satz 6.1.22 (Folgerung der Friedrichsschen Ungleichung). Dann gilt $\forall\, v \in H^1_*(\Omega)$

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_\Omega \langle \sigma(x)\nabla v(x), \nabla v(x)\rangle dx \geq \sigma_{min} \int_\Omega \langle \nabla v(x), \nabla v(x)\rangle dx = \sigma_{min}|v|_1^2 \\
&= \frac{\sigma_{min}}{1+4s^2}(|v|_1^2 + 4s^2|v|_1^2) \overset{|\bar{v}|=0}{=} \frac{\sigma_{min}}{1+4s^2}(|v|_1^2 + (|\bar{v}|\sqrt{\mu(\Omega)} + 2s|v|_1)^2) \\
&\overset{\text{Satz 6.1.22}}{\geq} \frac{\sigma_{min}}{1+4s^2}(|v|_1^2 + \|v\|_0^2) = \frac{\sigma_{min}}{1+4s^2}\|v\|_1^2
\end{aligned}$$

mit Elliptizitätskonstante $C_{\text{ell}} = \sigma_{min}/(1+4s^2)$. $\square$

$$l(v) \quad := \quad \int_\Omega f v d\Omega + \int_\Gamma g v d\Gamma \qquad (6.35)$$

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{corr}) = f \quad \text{in } \Omega, \qquad f := \nabla \cdot (\sigma^{corr} \nabla \Phi^{\infty}), \qquad (6.11)$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle \sigma \nabla \Phi^{corr}, n \rangle = g \quad \text{on } \Gamma, \qquad g := -\langle \sigma \nabla \Phi^{\infty}, n \rangle. \qquad (6.12)$$

Der Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$ enthält auch Funktionen v mit Singularitäten, wie in Bemerkung 6.1.3 vermerkt. Deshalb ist zunächst keineswegs klar, ob denn $\int_\Gamma g v d\Gamma$ in (6.35) existiert. Dazu zunächst folgender Satz:

Theorem 6.1.35 (Spursatz). *Sei Ω beschränkt mit stückweise glattem Rand und erfülle eine Kegelbedingung. Dann gibt es eine beschränkte, lineare Abbildung $\gamma : H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ mit*

$$||\gamma(v)||_{0,\Gamma} \leq c||v||_{1,\Omega}. \qquad (6.37)$$

Proof. Zum Beweis siehe [33, Seiten 46-47].

1. Man zeigt zunächst unter Nutzung der Bedingungen an das Gebiet für $v \in C^1(\bar{\Omega})$, dass $||v||_{0,\Gamma} \leq c||v||_{1,\Omega}$.
2. Die Restriktion $\gamma : H^1(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \to L_2(\Gamma)$ ist also auf einer dichten Menge eine beschränkte Abbildung. Wegen der Vollständigkeit von $L_2(\Gamma)$ kann sie auf ganz $H^1(\Omega)$ erweitert werden, ohne die Schranke zu vergrössern.

$\square$

$$l(v) \quad := \quad \int_\Omega f v d\Omega + \int_\Gamma g v d\Gamma \tag{6.35}$$

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}) = f \quad \text{in } \Omega, \qquad f := \nabla \cdot (\sigma^{\mathrm{corr}} \nabla \Phi^{\infty}), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle \sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}, \mathrm{n} \rangle = g \quad \text{on } \Gamma, \qquad g := -\langle \sigma \nabla \Phi^{\infty}, \mathrm{n} \rangle. \tag{6.12}$$

Nun kann die Beschränktheit des Funktionals (6.35) gezeigt werden:

Lemma 6.1.36. *Das Funktional aus (6.35),*

$$l(v) = \int_\Omega \nabla \cdot (\sigma^{corr} \nabla \Phi^{\infty}) v d\Omega - \int_\Gamma \langle \sigma \nabla \Phi^{\infty}, \mathrm{n} \rangle v d\Gamma,$$

ist wohl-definiert und beschränkt auf $H^1(\Omega)$, insbesondere ist $l \in (H^1_*(\Omega))'$.

Nun kann die Beschränktheit des Funktionals (6.35) gezeigt werden:

Lemma 6.1.36. *Das Funktional aus (6.35),*

$$l(v) = \int_\Omega \nabla \cdot (\sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty)\, v d\Omega - \int_\Gamma \langle \sigma \nabla \Phi^\infty, \mathrm{n} \rangle v d\Gamma,$$

ist wohl-definiert und beschränkt auf $H^1(\Omega)$*, insbesondere ist* $l \in (H^1_*(\Omega))'$.

Proof. Bzgl. des Volumenintegrals greift folgende Überlegung: Beim Subtraktionsansatz wurde angenommen, dass wir ein nicht-leeres Teilgebiet $\Omega^\infty \subset \Omega$ um die Quellposition x_0 herum finden mit homogener konstanter Leitfähigkeit $\underline{\underline{\sigma}}^\infty$, sodass $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{corr}}$ im Teilgebiet Ω^∞ verschwindet: $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{corr}}(x) = 0, \forall x \in \Omega^\infty$. Damit wurde die Singularität aus der rechten Seite entfernt: Sei $\bar{\Phi}^\infty$ eine stetige Erweiterung von $\Phi^\infty|_{\Omega \setminus \Omega^\infty}$ nach Ω. Dann ist $\bar{\Phi}^\infty$ überall glatt und $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{corr}} \nabla \Phi^\infty = \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{corr}} \nabla \bar{\Phi}^\infty$ ($\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{corr}}$ verschwindet in Ω^∞), sodass f quadrat-integrierbar über dem gesamten Gebiet Ω ist. Mit $v \in H^1(\Omega)$ und unter Anwendung der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung folgt, dass das Volumenintegral beschränkt ist.

Nun kann die Beschränktheit des Funktionals (6.35) gezeigt werden:

Lemma 6.1.36. *Das Funktional aus (6.35),*

$$l(v) = \int_\Omega \nabla \cdot (\sigma^{corr} \nabla \Phi^\infty)\, v d\Omega - \int_\Gamma \langle \sigma \nabla \Phi^\infty, \mathrm{n} \rangle v d\Gamma,$$

ist wohl-definiert und beschränkt auf $H^1(\Omega)$, insbesondere ist $l \in (H^1_*(\Omega))'$.

Proof. Bzgl. des Volumenintegrals greift folgende Überlegung: Beim Subtraktionsansatz wurde angenommen, dass wir ein nicht-leeres Teilgebiet $\Omega^\infty \subset \Omega$ um die Quellposition x_0 herum finden mit homogener konstanter Leitfähigkeit $\underline{\underline{\sigma}}^\infty$, sodass $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{corr}}$ im Teilgebiet Ω^∞ verschwindet: $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{corr}}(x) = 0, \forall x \in \Omega^\infty$. Damit wurde die Singularität aus der rechten Seite entfernt: Sei $\bar{\Phi}^\infty$ eine stetige Erweiterung von $\Phi^\infty|_{\Omega \setminus \Omega^\infty}$ nach Ω. Dann ist $\bar{\Phi}^\infty$ überall glatt und $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{corr}} \nabla \Phi^\infty = \underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{corr}} \nabla \bar{\Phi}^\infty$ ($\underline{\underline{\sigma}}^{\mathrm{corr}}$ verschwindet in Ω^∞), sodass f quadrat-integrierbar über dem gesamten Gebiet Ω ist. Mit $v \in H^1(\Omega)$ und unter Anwendung der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung folgt, dass das Volumenintegral beschränkt ist.

Bzgl. des Oberflächenintegrals ist nach Satz 6.1.35 (Spursatz) die Restriktion von $v \in H^1(\Omega)$ auf den Rand Γ eine $L_2(\Gamma)$-Funktion. Da die Quelle fern von der Kopfoberfläche lokalisiert ist, ist auch die Funktion $\langle \underline{\underline{\sigma}} \nabla \Phi^\infty, \mathbf{n} \rangle$ eine $L_2(\Gamma)$-Funktion. Mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung folgt, dass auch das Oberflächenintegral beschränkt ist. $\square$

$$a(\Phi^{\mathrm{corr}}, v) \quad := \quad \int_\Omega \langle \sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}, \nabla v \rangle d\Omega \tag{6.34}$$

$$l(v) \quad := \quad \int_\Omega f v d\Omega + \int_\Gamma g v d\Gamma \tag{6.35}$$

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}) = f \quad \text{in } \Omega, \qquad f := \nabla \cdot (\sigma^{\mathrm{corr}} \nabla \Phi^{\infty}), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle \sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}, \mathrm{n} \rangle = g \quad \text{on } \Gamma, \qquad g := -\langle \sigma \nabla \Phi^{\infty}, \mathrm{n} \rangle. \tag{6.12}$$

Theorem 6.1.37 (Existenz und Eindeutigkeit). *Sei Ω kompakt mit stückweise glattem Rand und erfülle eine Kegelbedingung. Dann hat die Variationsaufgabe*

$$\textit{Suche } v \in H^1_*(\Omega): \quad J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - l(v) \to \textit{min!} \tag{6.38}$$

mit $a(\cdot,\cdot)$ aus (6.34) und $l(\cdot)$ aus (6.35) genau eine Lösung $\Phi^{corr} \in H^1_*(\Omega)$. Diese Lösung ist durch

$$a(\Phi^{corr}, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{6.39}$$

charakterisiert.

$$a(\Phi^{\text{corr}}, v) \;:=\; \int_\Omega \langle \sigma\nabla\Phi^{\text{corr}}, \nabla v\rangle d\Omega \qquad (6.34)$$

$$l(v) \;:=\; \int_\Omega f v d\Omega + \int_\Gamma g v d\Gamma \qquad (6.35)$$

$$-\nabla\cdot(\sigma\nabla\Phi^{\text{corr}}) = f \text{ in } \Omega, \qquad f := \nabla\cdot(\sigma^{\text{corr}}\nabla\Phi^\infty), \qquad (6.11)$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle\sigma\nabla\Phi^{\text{corr}}, \mathrm{n}\rangle = g \text{ on } \Gamma, \qquad g := -\langle\sigma\nabla\Phi^\infty, \mathrm{n}\rangle. \qquad (6.12)$$

Proof. Die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ aus (6.34) ist H^1-stetig (Lemma 6.1.33) und $H^1_*(\Omega)$-elliptisch (Lemma 6.1.34) und das Funktional $l(\cdot)$ aus (6.35) ist beschränkt (Lemma 6.1.36). Aufgrund des Satzes 6.1.28 von Lax-Milgram finden wir genau ein $\Phi^{\text{corr}} \in H^1_*(\Omega)$, welches das Variationsproblem

$$\text{Suche } \Phi^{\text{corr}} \in H^1_*(\Omega): \quad \forall v \in H^1_*(\Omega), \quad a(\Phi^{\text{corr}}, v) = l(v)$$

löst. Nach Charakterisierungssatz 6.1.24 löst dieses Φ^{corr} auch die Variationsaufgabe (6.38).

Für $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$ nutzen wir das Splitting $\tilde{v} = v + c\cdot 1, v \in H^1_*(\Omega)$ und finden zunächst, dass

$$a(\Phi^{\text{corr}}, \tilde{v}) = a(\Phi^{\text{corr}}, v) + c\cdot a(\Phi^{\text{corr}}, 1) \overset{(6.34)}{=} a(\Phi^{\text{corr}}, v)$$

und, da nach Lemma 6.1.32 die Kompatibilitätsbedingung (6.33) erfüllt ist,

$$l(\tilde{v}) = l(v) + c\cdot l(1) \overset{(6.35)}{=} l(v) + c\cdot\left(\int_\Omega f + \int_\Gamma g\right) \overset{\text{Kompat.}}{=} l(v).$$

Damit gilt also insbesondere, dass $\Phi^{\text{corr}} \in H^1_*(\Omega)$ durch (6.39) charakterisiert ist. $\square$

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}) = f \quad \text{in } \Omega, \qquad f := \nabla \cdot (\sigma^{\mathrm{corr}} \nabla \Phi^{\infty}), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle \sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}, \mathrm{n} \rangle = g \quad \text{on } \Gamma, \qquad g := -\langle \sigma \nabla \Phi^{\infty}, \mathrm{n} \rangle. \tag{6.12}$$

$$\textit{Suche } v \in H^1_*(\Omega): \quad J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - l(v) \to \textit{min!} \tag{6.38}$$

Theorem 6.1.38 (Klassische Lösung). *Sei Ω kompakt mit stückweise glattem Rand und erfülle eine Kegelbedingung. Unter der Bedingung stetig differenzierbarer Leitfähigkeiten ist die Lösung der Variationsaufgabe (6.38) genau dann in $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ enthalten, wenn eine klassische Lösung der Differentialgleichung (6.11) mit inhomogenen Neumann Randbedingungen (6.12) existiert. Die beiden Lösungen sind dann identisch.*

Theorem 6.1.37 (Existenz und Eindeutigkeit). *Sei Ω kompakt mit stückweise glattem Rand und erfülle eine Kegelbedingung. Dann hat die Variationsaufgabe*

$$\text{Suche } v \in H^1_*(\Omega): \quad J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) \to \min! \tag{6.38}$$

mit $a(\cdot,\cdot)$ aus (6.34) und $l(\cdot)$ aus (6.35) genau eine Lösung $\Phi^{corr} \in H^1_*(\Omega)$. Diese Lösung ist durch

$$a(\Phi^{corr}, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{6.39}$$

charakterisiert.

Theorem 6.1.31 (Existenzsatz). *Sei L mit*

$$Lu := -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i(a_{ik}\partial_k u) + a_0 u \tag{6.31}$$

ein gleichmässig elliptischer Differentialoperator 2.Ordnung. Dann hat das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} Lu &= f \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma \end{aligned} \tag{6.32}$$

$\forall f \in L_2(\Omega)$ stets eine schwache Lösung in $H^1_0(\Omega)$. Diese ist Minimum des Variationsproblems

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) \to \min!$$

in $H^1_0(\Omega)$, wobei Bilinearform a und Funktional l folgendermassen definiert sind:

$$\begin{aligned} a(u,v) &:= \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\partial_i u \partial_k v + a_0 uv\right] d\Omega, \\ l(v) &:= \int_\Omega fv d\Omega = (f,v)_0. \end{aligned}$$

$$-\nabla\cdot(\sigma\nabla\Phi^{corr}) = f \text{ in } \Omega, \qquad f := \nabla\cdot(\sigma^{corr}\nabla\Phi^\infty), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle\sigma\nabla\Phi^{corr}, n\rangle = g \text{ on } \Gamma, \qquad g := -\langle\sigma\nabla\Phi^\infty, n\rangle. \tag{6.12}$$

Proof. $\Rightarrow$:
Sei $\Phi^{corr} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$ eine Lösung der Variationsaufgabe (6.38). Nach Satz 6.1.37 ist diese durch (6.39) charakterisiert. Für $v \in H^1_0(\Omega)$ ist $\gamma(v) = 0$, und wir schliessen aus (6.39), dass

$$a(\Phi^{corr}, v) = l(v) \overset{(6.35)}{=} \int_\Omega fv d\Omega + \int_\Gamma gv d\Gamma = (f,v)_0 \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

Nach Satz 6.1.31 ist Φ^{corr} damit zugleich Lösung von

$$-\nabla\cdot(\sigma\nabla\Phi^{corr}) = f \text{ in } \Omega. \tag{6.40}$$

Damit gilt für $v \in H^1(\Omega)$

$$a(\Phi^{corr}, v) - (f,v)_0 - (g,v)_{0,\Gamma} \overset{\text{Green}}{=} \int_\Omega v(-\nabla\cdot(\sigma\nabla\Phi^{corr}) - f)\, d\Omega + \int_\Gamma v(\langle\sigma\nabla\Phi^{corr}, n\rangle - g)\, d\Gamma. \tag{6.41}$$

Aus (6.39) und (6.40) folgt, dass das zweite Integral auf der rechten Seite von (6.41) verschwindet.

Angenommen, die Funktion $u_0 := \langle\sigma\nabla\Phi^{corr}, n\rangle - g$ verschwindet nicht. Dann ist $\int_\Gamma u_0^2 d\Gamma > 0$. Weil $C^1(\bar\Omega)$ dicht in $C^0(\bar\Omega)$ ist, gibt es ein $v \in C^1(\bar\Omega)$ mit $\int_\Gamma u_0 v d\Gamma > 0$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass das Integral für alle $v \in H^1(\Omega)$ verschwindet. Damit muss die Randbedingung (6.12) erfüllt sein.

Theorem 6.1.37 (Existenz und Eindeutigkeit). *Sei Ω kompakt mit stückweise glattem Rand und erfülle eine Kegelbedingung. Dann hat die Variationsaufgabe*

$$\text{Suche } v \in H^1_*(\Omega): \quad J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) \to \min! \tag{6.38}$$

mit $a(\cdot,\cdot)$ aus (6.34) und $l(\cdot)$ aus (6.35) genau eine Lösung $\Phi^{corr} \in H^1_*(\Omega)$. Diese Lösung ist durch

$$a(\Phi^{corr}, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{6.39}$$

charakterisiert.

Proof. $\underline{\Rightarrow:}$
Sei $\Phi^{\text{corr}} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ eine Lösung der Variationsaufgabe (6.38). Nach Satz 6.1.37 ist diese durch (6.39) charakterisiert. Für $v \in H^1_0(\Omega)$ ist $\gamma(v) = 0$, und wir schliessen aus (6.39), dass

$$a(\Phi^{\text{corr}}, v) = l(v) \overset{(6.35)}{=} \int_\Omega f v d\Omega + \int_\Gamma g v d\Gamma = (f,v)_0 \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

Nach Satz 6.1.31 ist Φ^{corr} damit zugleich Lösung von

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{\text{corr}}) = f \quad \text{in } \Omega. \tag{6.40}$$

Damit gilt für $v \in H^1(\Omega)$

$$a(\Phi^{\text{corr}}, v) - (f,v)_0 - (g,v)_{0,\Gamma} \overset{\text{Green}}{=} \int_\Omega v(-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{\text{corr}}) - f) d\Omega + \int_\Gamma v(\langle \sigma \nabla \Phi^{\text{corr}}, \mathrm{n}\rangle - g) d\Gamma. \tag{6.41}$$

Aus (6.39) und (6.40) folgt, dass das zweite Integral auf der rechten Seite von (6.41) verschwindet.

Angenommen, die Funktion $u_0 := \langle \sigma \nabla \Phi^{\text{corr}}, \mathrm{n}\rangle - g$ verschwindet nicht. Dann ist $\int_\Gamma u_0^2 d\Gamma > 0$. Weil $C^1(\bar{\Omega})$ dicht in $C^0(\bar{\Omega})$ ist, gibt es ein $v \in C^1(\bar{\Omega})$ mit $\int_\Gamma u_0 v d\Gamma > 0$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass das Integral für alle $v \in H^1(\Omega)$ verschwindet. Damit muss die Randbedingung (6.12) erfüllt sein.

Theorem 6.1.31 (Existenzsatz). *Sei L mit*

$$Lu := -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i (a_{ik} \partial_k u) + a_0 u \tag{6.31}$$

ein gleichmässig elliptischer Differentialoperator 2.Ordnung. Dann hat das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} Lu &= f \ \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \ \text{ auf } \Gamma \end{aligned} \tag{6.32}$$

$\forall f \in L_2(\Omega)$ stets eine schwache Lösung in $H^1_0(\Omega)$. Diese ist Minimum des Variationsproblems

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) \to \min!$$

in $H^1_0(\Omega)$, wobei Bilinearform a und Funktional l folgendermassen definiert sind:

$$\begin{aligned} a(u,v) &:= \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \partial_i u \partial_k v + a_0 u v\right] d\Omega, \\ l(v) &:= \int_\Omega f v d\Omega = (f,v)_0. \end{aligned}$$

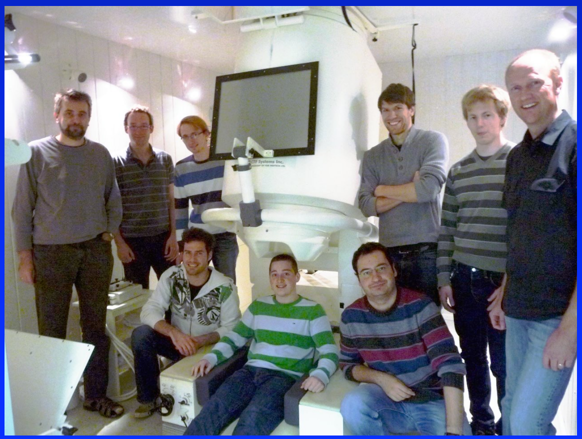
$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{\text{corr}}) = f \ \text{ in } \Omega, \qquad f := \nabla \cdot (\sigma^{\text{corr}} \nabla \Phi^{\infty}), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle \sigma \nabla \Phi^{\text{corr}}, \mathrm{n}\rangle = g \ \text{ on } \Gamma, \qquad g := -\langle \sigma \nabla \Phi^{\infty}, \mathrm{n}\rangle. \tag{6.12}$$

$\underline{\Leftarrow:}$
Aus (6.41) liest man sofort ab, dass jede klassische Lösung $\Phi^{\text{corr}} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ der Differentialgleichung (6.11) mit inhomogenen Neumann Randbedingungen (6.12) die Bedingung (6.39) erfüllt. $\square$

Thank you for your attention!



SIM-NEURO work-group at IBB