Existence and uniqueness for the EEG forward problem

Carsten H. Wolters

Institut für Biomagnetismus und Biosignalanalyse, Westf. Wilhelms-Universität Münster, Germany

Lecture, Oct 29, 2024

6.1.2 Herleitung der Gleichung fuers Korrekturpotential

Das elektrische Vorwärtsproblem

In Kapitel 3 (siehe Gleichung (3.13)) wurde die Poisson-Gleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = \nabla \cdot \mathrm{j}^p = \mathrm{J}^p \;\text{ in } \Omega, \tag{6.1}$$

hergeleitet, die die Verteilung des elektrischen Potentials Φ im Kopfgebiet Ω mit Gewebeleitfähigkeiten $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ (wobei ab jetzt σ ein 3×3 Leitfähigkeitstensor sei) aufgrund der Primärstromdichte j^p im Cortex des menschlichen Gehirns beschreibt. Aufgrund der Stetigkeit der Stromdichte über Grenzflächen gilt folgende homogene Neumann Randbedingung an der Kopfoberfläche $\Gamma = \partial\Omega$ (siehe auch Gleichung (3.15)),

$$\langle \sigma \nabla \Phi, \mathrm{n} \rangle|_{\Gamma} = 0, \tag{6.2}$$

mit der Oberflächennormalen n, und eine Referenzelektrode mit gegebenem Potential

$$\Phi(x_{\mathrm{ref}}) = 0\,. \tag{6.3}$$

Für den Primärstrom (siehe Gleichung (3.2)) hatte sich das Modell des mathematischen Dipols mit Quellort $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und Moment $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^3$ als tauglich erwiesen:

$$\mathrm{J}^p(x) = \nabla \cdot \mathrm{j}^p(x) := \nabla \cdot \mathrm{M}\delta(x - x_0)\,. \tag{6.4}$$

Structure of the lecture

- Existence and uniqueness of the forward problem solution (Chapters 6.1.1-6.1.5 from lecture scriptum)
  - 6.1.1: Basics
  - 6.1.2: The subtraction approach to get rid of the singularity on the right-hand-side (derivation of the equation for the correction potential)
  - 6.1.3: Types of partial differential equations
  - 6.1.4: Sobolev spaces
  - 6.1.5: A variational formulation
  - 6.1.6: Variational formulation, existence and uniqueness of the solution for the correction potential

6.1 Analyse der Potentialgleichung

6.1.1 Grundlagen

Hier seien zunächst einige Grundlagen zusammengetragen, die z.B. in [320; 119] zu finden sind.

Definition 6.1.1 (Linearer Raum). *Ein* **Vektorraum** *(***linearer Raum***) über einem Körper (english: field)* $(\mathbb{K},+,\cdot)$ *ist eine additive abelsche Gruppe* $(V,+)$*, auf der zusätzlich eine Multiplikation mit einem Skalar aus* $\mathbb{K}$ *erklärt ist* $(*:\mathbb{K}\times V\to V)$*. Die Skalarmultiplikation muss dabei für alle* $u,v\in V$ *und* $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ *die folgenden Bedingungen erfüllen:*

1. *Assoziativität:* $\alpha*(\beta*v)=(\alpha\cdot\beta)*v$
2. *Distributivgesetze (english: distributive property):* $\alpha*(u+v)=\alpha*u+\alpha*v$ *und* $(\alpha+\beta)*v=\alpha*v+\beta*v$
3. *Neutralität der 1 des Körpers* $\mathbb{K}$*:* $1*v=v$.

Definition 6.1.2 (Skalarprodukt). *Die Abbildung* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ *heisst* **Skalarprodukt** *auf* V*, falls*

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &> 0 && \forall 0 \neq x \in V, \\ \langle \lambda x + y, z \rangle &= \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle && \forall \lambda \in \mathbb{K}, x, y, z \in V, \\ \langle x, y \rangle &= \overline{\langle y, x \rangle} && \forall x, y \in V, \end{aligned}$$

wobei $\bar{\cdot}$ *die komplex konjugierte Zahl ist.*

Definition 6.1.3 (Bilinearform). *Die Abbildung* $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ *heisst* **Bilinearform**, *falls* $\forall x, y, z \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a(x, y + \lambda z) &= a(x,y) + \lambda a(x,z) \\ a(x + \lambda y, z) &= a(x,z) + \lambda a(y,z) \end{aligned}$$

Definition 6.1.4 (Beschränktheit in normierten Räumen)**.** *Sei* $(V, ||\cdot||)$ *ein normierter Raum. Genau dann heisst eine Teilmenge* X *von* V **beschränkt** *(bzgl. der Norm* $||\cdot||$*), wenn die Menge* $\{||x||, x \in X\}$ *beschränkt ist.*

Definition 6.1.5 (Berührpunkt und Abgeschlossenheit). *Sei* $(V, ||\cdot||)$ *ein normierter Raum,* $X \subset V$, $a \in V$.

1. *Genau dann heisst a* **Berührpunkt von** X, *wenn a Grenzwert einer konvergenten Folge* $(x_j) \in \mathbb{X}^{\mathbb{N}}$ *ist.*

2. *Die* **Menge aller Berührpunkte** *von X wird mit* $\bar{X}$ *bezeichnet.*

3. X *heisst* **abgeschlossen** *genau dann, wenn* $\bar{X} \subset X$ *gilt, d.h. wenn jeder Berührpunkt von X Element von X ist.*

Definition 6.1.6 (Cauchyfolge)**.** *Sei* $(V, ||\cdot||)$ *ein normierter Raum,* $(x_n) \in V^{\mathbb{N}}$. *Genau dann heisst* (x_n) *eine* **Cauchyfolge** *(bzgl. der Norm* $||\cdot||$*), wenn für jedes* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert mit* $||x_n - x_m|| < \varepsilon$ *für alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *mit* $n > m \geq n_0$.

Theorem 6.1.7. *Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, $(x_n) \in V^{\mathbb{N}}$. Dann gilt:*

1. *Ist (x_n) konvergent, so ist (x_n) Cauchyfolge.*

2. *Ist (x_n) Cauchyfolge, so ist (x_n) beschränkt und besitzt höchstens einen Berührpunkt.*

3. *Ist (x_n) Cauchyfolge und besitzt mindestens einen Berührpunkt, so ist (x_n) konvergent.*

4. *Ist (x_n) Cauchyfolge und V endlich-dimensional, so ist (x_n) konvergent.*

Definition 6.1.8 (Vollständig, Banachraum). *Sei* $(V, ||\cdot||)$ *ein normierter Raum und* $X \subset V$. *Genau dann heisst* $(V, ||\cdot||)$ **vollständig**, *wenn jede Cauchy-Folge* $(x_n) \in V^{\mathbb{N}}$ *bzgl. der Norm* $||\cdot||$ *konvergiert.*
Vollständige normierte Räume werden **Banachräume** *genannt.*
Die Menge X *heisst* **vollständig** *(bzgl. der Norm* $||\cdot||$*) genau dann, wenn jede Cauchy-Folge* $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ *bzgl.* $||\cdot||$ *konvergiert mit* $\lim(x_n) \in X$.

Definition 6.1.9 (Hilbertraum). *Ein Banachraum* X *heisst* **Hilbertraum**, *wenn ein Skalarprodukt* $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ *auf* X *existiert, sodass* $||x||_X = \sqrt{\langle x, x\rangle_X}\ \forall x \in X$.

Definition 6.1.10 (Innere Punkte, Umgebungen, Offenheit)**.** *Sei* $(V, ||\cdot||)$ *ein normierter Raum,* $X \subset V$, $a \in V$.

1. *Genau dann heisst a ein* **innerer Punkt** *von X und X eine* **Umgebung** *(english: neighbourhood) von a, wenn X eine* ε*-Umgebung von a enthält.*

2. *Die Menge der inneren Punkte wird mit* $\dot{X}$ *bezeichnet.*

3. **Offen** *heisst X genau dann, wenn* $X \subset \dot{X}$ *ist. Offenbar gilt stets* $\dot{X} \subset X$*; Offenheit von X bedeutet also nichts anderes als* $\dot{X} = X$.

Definition 6.1.11 (Kompakt)**.** *Sei* $(V, ||\cdot||)$ *ein normierter Raum,* $X \subset V$*. Genau dann heisst* X *(bzgl. der Norm* $||\cdot||$*)* **kompakt** *(genauer* **folgenkompakt***), wenn jede Folge* $(x_j) \in X^{\mathbb{N}}$ *(bzgl. der Norm* $||\cdot||$*) einen Berührpunkt* $a \in X$ *besitzt.*

Theorem 6.1.12 (Kompaktheitskriterium)**.** *Sei* $(V, ||\cdot||)$ *ein normierter Raum,* $X \subset V$.

1. *Ist X kompakt, so ist X abgeschlossen und beschränkt.*

2. *Ist X abgeschlossen und beschränkt und V endlich-dimensional, so ist X kompakt.*

Definition 6.1.13 (Dichtheit)**.** *Eine Menge A heisst* **dicht** *(english: dense) in $(X, ||\cdot||_X)$, falls $A \subset X$ und $\bar{A} = X$, d.h. jedes $x \in X$ ist Grenzwert einer Folge $a_n \in A$. Ist $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter, aber nicht vollständiger Raum, so bezeichnet man $(\tilde{X}, ||\cdot||_{\tilde{X}})$ als* **Vervollständigung** *von X, falls X dicht in $\tilde{X}$ und $||x||_{\tilde{X}} = ||x||_X$ für alle $x \in X$.*

Beispiel: $\mathbb{R}$ ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$

Definition 6.1.14 (Dualraum und lineares Funktional)**.** *X sei ein normierter, linearer Raum über $\mathbb{R}$. Als* **Dualraum** *X' bezeichnet man den Raum aller beschränkten, linearen Abbildungen von X nach $\mathbb{R}$:*

$$X' \quad := \quad L(X,\mathbb{R}).$$

X' ist ein Banachraum mit der **Dualnorm**

$$||x'||_{X'} \quad := \quad ||x'||_{\mathbb{R}\leftarrow X} = \sup\{|x'(x)|/||x||_X : 0 \neq x \in X\}.$$

Die Elemente $x' \in X'$ nennt man **lineare Funktionale** *auf X.*

Theorem 6.1.15 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). *Seien $x, y \in V$ Elemente eines Vektorraums V mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann gilt*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

Unter Verwendung der Norm $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ergibt sich daraus

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Beide Seiten sind genau dann gleich, wenn x und y linear abhängig sind. Im Fall quadratisch integrierbarer reeller Funktionen erhält man

$$\left| \int f(x) g(x) dx \right|^2 \leq \left(\int |f(x)|^2 dx \right) \left(\int |g(x)|^2 dx \right).$$

Die letzte Ungleichung wird in folgender Hölderscher Ungleichung ($p = q = 2$) verallgemeinert.

[Wolters, Lecture scriptum]

Theorem 6.1.16 (Hölder-Ungleichung). *Sei Ω ein Maßraum, $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$. Dann ist $fg \in L^1(\Omega)$ und*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Structure of the lecture

- Existence and uniqueness of the forward problem solution (Chapters 6.1.1-6.1.5 from lecture scriptum)
  - 6.1.1: Basics
  - 6.1.2: The subtraction approach to get rid of the singularity on the right-hand-side (derivation of the equation for the correction potential)
  - 6.1.3: Types of partial differential equations
  - 6.1.4: Sobolev spaces
  - 6.1.5: A variational formulation
  - 6.1.6: Variational formulation, existence and uniqueness of the solution for the correction potential

6.1.2 Herleitung der Gleichung fuers Korrekturpotential

Das elektrische Vorwärtsproblem

In Kapitel 3 (siehe Gleichung (3.13)) wurde die Poisson-Gleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = \nabla \cdot \mathrm{j}^p = \mathrm{J}^p \quad \text{in } \Omega, \tag{6.1}$$

hergeleitet, die die Verteilung des elektrischen Potentials Φ im Kopfgebiet Ω mit Gewebeleitfähigkeiten $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ (wobei ab jetzt σ ein 3×3 Leitfähigkeitstensor sei) aufgrund der Primärstromdichte j^p im Cortex des menschlichen Gehirns beschreibt. Aufgrund der Stetigkeit der Stromdichte über Grenzflächen gilt folgende homogene Neumann Randbedingung an der Kopfoberfläche $\Gamma = \partial\Omega$ (siehe auch Gleichung (3.15)),

$$\langle \sigma \nabla \Phi, \mathrm{n} \rangle|_\Gamma = 0, \tag{6.2}$$

mit der Oberflächennormalen n, und eine Referenzelektrode mit gegebenem Potential

$$\Phi(x_{\mathrm{ref}}) = 0\,. \tag{6.3}$$

Für den Primärstrom (siehe Gleichung (3.2)) hatte sich das Modell des mathematischen Dipols mit Quellort $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und Moment $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^3$ als tauglich erwiesen:

$$\mathrm{J}^p(x) = \nabla \cdot \mathrm{j}^p(x) := \nabla \cdot \mathrm{M}\delta(x - x_0)\,. \tag{6.4}$$

Die Subtraktionsmethode

Als Literaturgrundlage für die folgende Herleitung der Differentialgleichung fürs Korrekturpotential sei auf [382; 76] verwiesen.

Im Folgenden wird angenommen, dass man ein nicht-leeres Teilgebiet $\Omega^\infty \subset \Omega$ um den Quellort x_0 mit homogener konstanter Leitfähigkeit σ^∞ (die homogene Leitfähigkeit der grauen Substanz) finden kann, sodass $x_0 \in \Omega^\infty / \partial\Omega^\infty$.

Für die Subtraktionsmethode wird nun die Leitfähigkeit σ in zwei Teile zerlegt,

$$\sigma = \sigma^\infty + \sigma^{\mathrm{corr}}, \tag{6.5}$$

sodass σ^∞ konstant über den gesamten Volumenleiter Ω und σ^{corr} Null ist im Teilgebiet Ω^∞: $\sigma^{\mathrm{corr}}(x) = 0, \forall x \in \Omega^\infty$. Das Potential Φ wird ebenfalls in zwei Teile zerlegt,

$$\Phi = \Phi^\infty + \Phi^{\mathrm{corr}}. \tag{6.6}$$

Das Singularitätenpotential Φ^∞ wird definiert als Lösung für einen Dipol im unendlich ausgedehnten homogenen Volumenleiter mit konstanter Leitfähigkeit σ^∞.

[Nolting, Elektodynamik, Verlag Zimmermann-Neufang, Ulmen, 1992]

Hilfssätze aus Nolting-Buch

1.6 Zerlegungs- und Eindeutigkeitssatz

Wir wollen in diesem Kapitel zwei Sätze beweisen, die für Vektorfelder von großer Bedeutung sind. Zusammengefaßt besagen sie, daß unter gewissen Voraussetzungen jedes Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ eindeutig durch sein Quellenfeld $\operatorname{div}\mathbf{a}$ und sein Wirbelfeld $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ bestimmt ist. Oder anders ausgedrückt: Jedes Vektorfeld läßt sich eindeutig als Summe eines wirbelfreien und eines quellenfreien Anteils darstellen. Zum Beweis dieser Aussagen sind einige Vorbereitungen notwendig:

Behauptung:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{1.70}$$

Beweis:

Proof can be found in the file ProofOfStatement1.70.pdf on our webside

[Nolting, Seite 61, Elektodynamik, Verlag Zimmermann-Neufang, Ulmen, 1992]

Bei uns im Skriptum: Die beiden Gleichungen für E in

Hilfssätze aus Nolting-Buch

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} && (3.9) \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. && (3.10)
\end{aligned}
$$

Durch die Einführung des skalaren Potentials $\varphi(\mathbf{r})$ in (2.24) lassen sich die beiden Maxwell-Gleichungen (2.39) zusammenfassen zur sogenannten Poisson-Gleichung:

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}). \tag{2.41}$$

Die Lösung dieser linearen, inhomogenen, partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung bezeichnet man als das Grundproblem der **Elektrostatik**. Falls $\rho(\mathbf{r}')$ für alle $\mathbf{r}'$ bekannt ist und keine Randbedingungen für $\varphi(\mathbf{r})$ im Endlichen vorliegen, dann läßt sich die Poisson-Gleichung mit Hilfe von (2.25) lösen:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Dies läßt sich mit (1.70) einfach überprüfen:

$$
\begin{aligned}
\Delta \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,\Delta_r \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&\overset{1.70}{=} -\frac{1}{\epsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}). \checkmark
\end{aligned}
$$

Im Folgenden wird eine analytische Lösung für Φ^∞ gegeben. Im Falle von homogener isotroper Leitfähigkeit $\sigma^\infty|_{\Omega^\infty} = \sigma^\infty \mathbf{Id}, \sigma^\infty \in \mathbb{R}$ ist die Lösung der Poisson Gleichung

$$\Delta\Phi^\infty = \frac{\nabla \cdot \mathrm{j}^p}{\sigma^\infty} \tag{6.7}$$

gegeben durch [218, Seite 61]

$$\Phi^\infty(x) = -\frac{1}{4\pi\sigma^\infty} \int_G \frac{\nabla_y \cdot \mathrm{j}^p(y)}{|x-y|} dy,$$

wobei das Gebiet G so gross gewählt wird, dass die Quelle am Ort x_0 innerer Punkt des Gebiets ist. Diese Lösung lässt sich einfach überprüfen [218, Seite 33]:

$$\Delta_x\Phi^\infty(x) = -\frac{1}{4\pi\sigma^\infty} \int_G \nabla_y \cdot \mathrm{j}^p(y)\, \Delta_x \frac{1}{|x-y|} dy = \frac{1}{\sigma^\infty} \int_G \nabla_y \cdot \mathrm{j}^p(y)\, \delta(x-y) dy, = \frac{1}{\sigma^\infty} \nabla \cdot \mathrm{j}^p(x).$$

$$\mathrm{J}^p(x) = \nabla \cdot \mathrm{j}^p(x) := \nabla \cdot \mathrm{M}\delta(x - x_0)\,. \qquad (6.4)$$

Aufgrund der Vektoridentität

$$\nabla_y \cdot \left(\mathrm{j}^p(y)\,|x-y|^{-1}\right) = |x-y|^{-1}\,\nabla_y \cdot \mathrm{j}^p(y) + \mathrm{j}^p(y) \cdot \nabla_y \frac{1}{|x-y|}$$

und

$$\nabla_y \frac{1}{|x-y|} = \frac{x-y}{|x-y|^3}$$

ergibt sich unter Nutzung des mathematischen Dipols (6.4) sowie des Gauss-Theorems

$$\int_G \nabla_y \cdot \left(\mathrm{j}^p(y)\,|x-y|^{-1}\right) \overset{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial G} \left(\mathrm{j}^p(y)\,|x-y|^{-1}\right) \overset{(6.4)}{=} \int_{\partial G} \left(\mathrm{M}\delta(y-x_0)\,|x-y|^{-1}\right) = 0$$

folgende Lösung:

$$\Phi^\infty(x) = \frac{1}{4\pi\sigma^\infty} \frac{\langle \mathrm{M}, (x-x_0)\rangle}{|x-x_0|^3}. \qquad (6.8)$$

Im Falle von homogener anisotroper Leitfähigkeit σ^∞ in Ω^∞ findet man [382]

$$\Phi^\infty(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\det\sigma^\infty}} \frac{\langle M, (\sigma^\infty)^{-1}(x-x_0)\rangle}{\langle(\sigma^\infty)^{-1}(x-x_0), x-x_0\rangle^{3/2}} \quad . \tag{6.9}$$

Der Gradient des Singularitätenpotentials von (6.9) kann ebenfalls analytisch berechnet werden

$$\begin{aligned}\nabla\Phi^\infty(\mathbf{x}) \quad = \quad & \frac{1}{4\pi\sqrt{\det\sigma^\infty}} \cdot \frac{(\sigma^\infty)^{-1}M}{\langle(\sigma^\infty)^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \mathbf{x}-\mathbf{x}_0\rangle^{3/2}} \\ & - \frac{1}{4\pi\sqrt{\det\sigma^\infty}} \cdot \frac{3\langle M, (\sigma^\infty)^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\rangle\,(\sigma^\infty)^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\langle(\sigma^\infty)^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \mathbf{x}-\mathbf{x}_0\rangle^{5/2}} .\end{aligned} \tag{6.10}$$

In beiden Fällen hat das Potential Φ^∞ eine Singularität am Ort $x = x_0$ und ist ansonsten glatt. Setzt man (6.5–6.7) in (6.1) ein, dann erhält man die Poisson Gleichung für das Korrekturpotential

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}) = f \ \text{ in } \Omega, \qquad f := \nabla \cdot (\sigma^{\mathrm{corr}} \nabla \Phi^\infty), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle \sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}, \mathrm{n} \rangle = g \ \text{ on } \Gamma, \qquad g := -\langle \sigma \nabla \Phi^\infty, \mathrm{n} \rangle. \tag{6.12}$$

Diese Gleichung wird numerisch nach Φ^{corr} gelöst, um dann das Potential Φ schliesslich über (6.6) zu berechnen.

Function $\Phi^\infty(x)$ from equation (6.9) fulfils the Neumann boundary conditions at infinity ($x \to \infty$). The singularity of $\Phi^\infty(x)$ at $x = x_0$ is of order 2, so that $\Phi^\infty(x)$ does not belong to the Sobolev-space $H^1(\Omega)$, not even to $L^2(\Omega)$ (the space of square-integrable functions). See definitions of function spaces in Section 6.1.4. However, Φ^∞ belongs to $L^1(\Omega)$, i.e., it is integrable.

Structure of the lecture

- Existence and uniqueness of the forward problem solution (Chapters 6.1.1-6.1.6 from lecture scriptum)
  - 6.1.1: Basics
  - 6.1.2: The subtraction approach to get rid of the singularity on the right-hand-side (derivation of the equation for the correction potential)
  - 6.1.3: Types of partial differential equations
  - 6.1.4: Sobolev spaces
  - 6.1.5: A variational formulation
  - 6.1.6: Variational formulation, existence and uniqueness of the solution for the correction potential

6.1.3 Typeneinteilung

Ob Anfangs- oder Randwerte bei partiellen Differentialgleichungen vorzugeben sind, hängt vom *Typ der Differentialgleichung* ab. Die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in n Variablen hat die Gestalt

$$-\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x). \tag{6.13}$$

Falls die Funktionen a_{ik}, b_i und c unabhängig von x sind, spricht man von einer *Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*. Weil für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u_{x_i x_k} = u_{x_k x_i}$ gilt, kann o.E.d.A. die Symmetrie $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$ vorausgesetzt werden. Die zugeordnete $n \times n$ Matrix

$$A(x) := (a_{ik}(x))$$

ist dann symmetrisch.

Definition 6.1.17 (Typ der Differentialgleichung).

1. *Die Gleichung (6.13) heisst* elliptisch *im Punkte x, wenn $A(x)$ positiv definit ist.*

2. *Die Gleichung (6.13) heisst* hyperbolisch *im Punkte x, wenn $A(x)$ einen negativen und $n-1$ positive Eigenwerte hat.*

3. *Die Gleichung (6.13) heisst* parabolisch *im Punkte x, wenn $A(x)$ positiv semidefinit, aber nicht definit ist und der Rang von $(A(x), b(x))$ gleich n ist.*

4. *Eine Gleichung heisst* elliptisch, hyperbolisch *oder* parabolisch, *wenn sie für alle Punkte des Gebiets die betreffende Eigenschaft hat.*

In beiden Fällen hat das Potential Φ^∞ eine Singularität am Ort $x = x_0$ und ist ansonsten glatt. Setzt man (6.5–6.7) in (6.1) ein, dann erhält man die Poisson Gleichung für das Korrekturpotential

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}) = f \text{ in } \Omega, \qquad f := \nabla \cdot (\sigma^{\mathrm{corr}} \nabla \Phi^\infty), \tag{6.11}$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle \sigma \nabla \Phi^{\mathrm{corr}}, \mathrm{n} \rangle = g \text{ on } \Gamma, \qquad g := -\langle \sigma \nabla \Phi^\infty, \mathrm{n} \rangle. \tag{6.12}$$

Diese Gleichung wird numerisch nach Φ^{corr} gelöst, um dann das Potential Φ schliesslich über (6.6) zu berechnen.

Comment 6.1.1 (Typ der Differentialgleichung). *Die Differentialgleichung (6.11) fürs Korrekturpotential ist von elliptischem Typ, da*

$$A(x) = \sigma(x)$$

der positiv definite Leitfähigkeitstensor am Ort $x \in \Omega$ ist.

Structure of the lecture

- **Existence and uniqueness of the forward problem solution (Chapters 6.1.1-6.1.6 from lecture scriptum)**
  - **6.1.1: Basics**
  - **6.1.2: The subtraction approach to get rid of the singularity on the right-hand-side (derivation of the equation for the correction potential)**
  - **6.1.3: Types of partial differential equations**
  - **6.1.4: Sobolev spaces**
  - **6.1.5: A variational formulation**
  - **6.1.6: Variational formulation, existence and uniqueness of the solution for the correction potential**

[Braess, Finite Elemente, *Springer-Verlag*, 1992]

Kapitel II
Konforme Finite Elemente

Die mathematische Behandlung der Finite-Element-Verfahren fußt auf der Variationsformulierung elliptischer Differentialgleichungen. Die Lösungen der wichtigsten Differentialgleichungen lassen sich durch Minimaleigenschaften charakterisieren. Die Variationsaufgaben besitzen Lösungen in den Funktionenräumen, die man als Sobolev-Räume bezeichnet. Für die numerische Behandlung führt man die Minimierung in endlich-dimensionalen Unterräumen durch. Als passend — sowohl aus praktischer als auch aus theoretischer Sicht — haben sich die sogenannten Finite-Element-Räume erwiesen.

Für lineare Differentialgleichungen kommt man mit Hilbert-Raum-Methoden aus. Insbesondere erhält man auf diese Weise sehr schnell die Existenz sogenannter schwacher Lösungen. Regularitätsaussagen werden, soweit sie für die Finite-Element-Theorie von Belang sind, ohne Beweis angegeben.

Der Inhalt dieses Kapitels ist eine Theorie der einfachen Methoden, die für die Bewältigung skalarer elliptischer Differentialgleichungen 2. Ordnung ausreichen. Die allgemeineren Aussagen dienen zugleich der Vorbereitung anderer elliptischer Probleme, für deren Behandlung die in Kapitel III genannten zusätzlichen Überlegungen und Methoden erforderlich sind.

Man betrachtet im allgemeinen eine Arbeit von Courant [1943] als den ersten mathematischen Beitrag zu einem Finite-Element-Ansatz. Eine Arbeit von Schellbach [1851] entstand ein Jahrhundert vorher, auch bei Euler findet man bei nicht zu enger Auslegung schon Finite Elemente. Populär wurde die Methode erst Ende der Sechziger Jahre, als auch Anwender aus dem Ingenieurbereich unabhängig auf diese Methode stießen und ihr den heute üblichen Namen gaben. Als erstes Lehrbuch machte das Buch von Strang und Fix [1973] Geschichte. Fast gleichzeitig hatten Babuška und Aziz [1972] mit einem langen Übersichtsartikel für eine breite Basis bei den tiefer liegenden funktionalanalytischen Hilfsmitteln gesorgt.

Unabhängig davon hatte sich im Ingenieurbereich die Methode der Finiten Elemente bei Berechnungen im Rahmen der Strukturmechanik durchgesetzt. Die Entwicklung begann dort 1956 u. a. mit der Arbeit von Turner, Clough, Martin und Topp [1956] und Argyris [1957].

6.1.4 Sobolev Räume

Die *Sobolev-Räume* werden auf dem Funktionenraum $L_2(\Omega)$ aufgebaut. $L_2(\Omega)$ besteht aus allen Funktionen u, deren Quadrat über Ω Lebesque-integrierbar ist. Dabei werden zwei Funktionen u und v miteinander identifiziert, wenn $u(x) = v(x)$ für $x \in \Omega$ abgesehen von einer Nullmenge gilt. Durch das Skalarprodukt

$$(u,v)_0 := (u,v)_{L_2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

wird $L_2(\Omega)$ zu einem Hilbert-Raum mit der Norm

$$||u||_0 = \sqrt{(u,u)_0}.$$

Definition 6.1.18 (Schwache Ableitung). *$u \in L_2(\Omega)$ besitzt die (schwache) Ableitung $v = \partial^\alpha u$, falls $v \in L_2(\Omega)$ und*

$$(w, v)_0 = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha w, u)_0 \quad \forall\, w \in C_0^\infty(\Omega) \tag{6.14}$$

gilt. In dieser Definition ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multiindex mit Ordnung $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. $C^\infty(\Omega)$ bezeichnet den Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen und $C_0^\infty(\Omega)$ den Unterraum der Funktionen, die nur in einer kompakten Teilmenge von Ω von 0 verschiedene Werte annehmen.

$$(w,v)_0 = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha w, u)_0 \quad \forall\, w \in C_0^\infty(\Omega) \tag{6.14}$$

Comment 6.1.2 (Schwache Ableitung).

- *Wenn eine Funktion im klassischen Sinne differenzierbar ist, existiert auch die schwache Ableitung, und beide Ableitungen stimmen überein. Dann beinhaltet (6.14) gerade die Greensche Formel für die partielle Integration.*

- *Der Begriff der schwachen Ableitung wird auf andere Differentialoperatoren entsprechend übertragen. Sei z.B. $u \in L_2(\Omega)^n$ ein Vektorfeld. Dann ist $v \in L_2(\Omega)$ die Divergenz im schwachen Sinne, kurz $v = div\ u$, wenn*

$$(w,v)_0 = -(\nabla w, u)_0 \quad \forall\, w \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt.

Definition 6.1.19. *Für ganzzahliges $m \geq 0$ bezeichnet $H^m(\Omega)$ die Menge aller Funktionen $u \in L_2(\Omega)$, die schwache Ableitungen $\partial^\alpha u$ für alle $|\alpha| \leq m$ besitzen. In $H^m(\Omega)$ wird durch*

$$(u,v)_m := \sum_{|\alpha|\leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0$$

ein Skalarprodukt mit der zugehörigen Norm

$$||u||_m := \sqrt{(u,u)_m} = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha u||_0^2} \tag{6.15}$$

erklärt. Daneben betrachtet man die Seminorm

$$|u|_m := \sqrt{\sum_{|\alpha|=m} ||\partial^\alpha u||_0^2}. \tag{6.16}$$

Thank you for your attention!

SIM-NEURO work-group at IBB