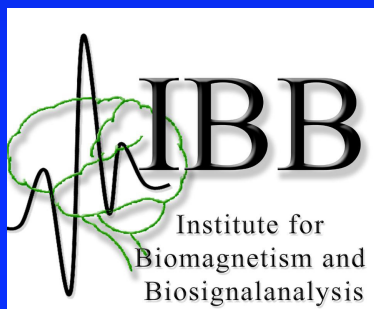


Existence and uniqueness for the EEG forward problem



Carsten H. Wolters

Institut für Biomagnetismus und Biosignalanalyse, Westf. Wilhelms-Universität Münster, Germany

Lecture, Oct 29, 2024

6.1.2 Herleitung der Gleichung fuer Korrekturpotential

Das elektrische Vorwärtsproblem

In Kapitel 3 (siehe Gleichung (3.13)) wurde die Poisson-Gleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = \nabla \cdot \mathbf{j}^p = J^p \quad \text{in } \Omega, \quad (6.1)$$

hergeleitet, die die Verteilung des elektrischen Potentials Φ im Kopfgebiet Ω mit Gewebeleitfähigkeiten $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ (wobei ab jetzt σ ein 3×3 Leitfähigkeitstensor sei) aufgrund der Primärstromdichte $\mathbf{j}^p$ im Cortex des menschlichen Gehirns beschreibt. Aufgrund der Stetigkeit der Stromdichte über Grenzflächen gilt folgende homogene Neumann Randbedingung an der Kopfoberfläche $\Gamma = \partial\Omega$ (siehe auch Gleichung (3.15)),

$$\langle \sigma \nabla \Phi, \mathbf{n} \rangle|_{\Gamma} = 0, \quad (6.2)$$

mit der Oberflächennormalen $\mathbf{n}$, und eine Referenzelektrode mit gegebenem Potential

$$\Phi(x_{\text{ref}}) = 0. \quad (6.3)$$

Für den Primärstrom (siehe Gleichung (3.2)) hatte sich das Modell des mathematischen Dipols mit Quellort $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und Moment $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3$ als tauglich erwiesen:

$$J^p(x) = \nabla \cdot \mathbf{j}^p(x) := \nabla \cdot \mathbf{M} \delta(x - x_0). \quad (6.4)$$

Structure of the lecture

- **Existence and uniqueness of the forward problem solution (Chapters 6.1.1-6.1.5 from lecture scriptum)**
 - 6.1.1: Basics
 - 6.1.2: The subtraction approach to get rid of the singularity on the right-hand-side (derivation of the equation for the correction potential)
 - 6.1.3: Types of partial differential equations
 - 6.1.4: Sobolev spaces
 - 6.1.5: A variational formulation
 - 6.1.6: Variational formulation, existence and uniqueness of the solution for the correction potential

6.1 Analyse der Potentialgleichung

6.1.1 Grundlagen

Hier seien zunächst einige Grundlagen zusammengetragen, die z.B. in [320; 119] zu finden sind.

Definition 6.1.1 (Linearer Raum). *Ein Vektorraum (linearer Raum) über einem Körper (english: field) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ist eine additive abelsche Gruppe $(V, +)$, auf der zusätzlich eine Multiplikation mit einem Skalar aus $\mathbb{K}$ erklärt ist $(* : \mathbb{K} \times V \rightarrow V)$. Die Skalarmultiplikation muss dabei für alle $u, v \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:*

1. *Assoziativität: $\alpha * (\beta * v) = (\alpha \cdot \beta) * v$*
2. *Distributivgesetze (english: distributive property): $\alpha * (u + v) = \alpha * u + \alpha * v$ und $(\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v$*
3. *Neutralität der 1 des Körpers $\mathbb{K}$: $1 * v = v$.*

Definition 6.1.2 (Skalarprodukt). *Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heisst **Skalarprodukt** auf V , falls*

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle &> 0 && \forall 0 \neq x \in V, \\ \langle \lambda x + y, z \rangle &= \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle && \forall \lambda \in \mathbb{K}, x, y, z \in V, \\ \langle x, y \rangle &= \overline{\langle y, x \rangle} && \forall x, y \in V,\end{aligned}$$

wobei $\bar{\cdot}$ die komplex konjugierte Zahl ist.

Definition 6.1.3 (Bilinearform). *Die Abbildung $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **Bilinearform**, falls $\forall x, y, z \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:*

$$a(x, y + \lambda z) = a(x, y) + \lambda a(x, z)$$

$$a(x + \lambda y, z) = a(x, z) + \lambda a(y, z)$$

Definition 6.1.4 (Beschränktheit in normierten Räumen). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Genau dann heisst eine Teilmenge X von V **beschränkt** (bzgl. der Norm $\|\cdot\|$), wenn die Menge $\{\|x\|, x \in X\}$ beschränkt ist.

Definition 6.1.5 (Berührungspunkt und Abgeschlossenheit). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $X \subset V$, $a \in V$.

1. Genau dann heisst a **Berührungspunkt von X** , wenn a Grenzwert einer konvergenten Folge $(x_j) \in \mathbb{X}^{\mathbb{N}}$ ist.
2. Die **Menge aller Berührungspunkte** von X wird mit $\bar{X}$ bezeichnet.
3. X heisst **abgeschlossen** genau dann, wenn $\bar{X} \subset X$ gilt, d.h. wenn jeder Berührungspunkt von X Element von X ist.

Definition 6.1.6 (Cauchyfolge). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $(x_n) \in V^{\mathbb{N}}$. Genau dann heisst (x_n) eine **Cauchyfolge** (bzgl. der Norm $\|\cdot\|$), wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m \geq n_0$.

Theorem 6.1.7. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $(x_n) \in V^{\mathbb{N}}$. Dann gilt:*

- 1. Ist (x_n) konvergent, so ist (x_n) Cauchyfolge.*
- 2. Ist (x_n) Cauchyfolge, so ist (x_n) beschränkt und besitzt höchstens einen Berührungspunkt.*
- 3. Ist (x_n) Cauchyfolge und besitzt mindestens einen Berührungspunkt, so ist (x_n) konvergent.*
- 4. Ist (x_n) Cauchyfolge und V endlich-dimensional, so ist (x_n) konvergent.*

Definition 6.1.8 (Vollständig, Banachraum). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $X \subset V$. Genau dann heisst $(V, \|\cdot\|)$ **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge $(x_n) \in V^{\mathbb{N}}$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ konvergiert.

Vollständige normierte Räume werden **Banachräume** genannt.

Die Menge X heisst **vollständig** (bzgl. der Norm $\|\cdot\|$) genau dann, wenn jede Cauchy-Folge $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ bzgl. $\|\cdot\|$ konvergiert mit $\lim(x_n) \in X$.

Definition 6.1.9 (Hilbertraum). Ein Banachraum X heisst **Hilbertraum**, wenn ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ auf X existiert, sodass $\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle_X} \quad \forall x \in X$.

Definition 6.1.10 (Innere Punkte, Umgebungen, Offenheit). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $X \subset V$, $a \in V$.

1. Genau dann heisst a ein **innerer Punkt** von X und X eine **Umgebung** (english: neighbourhood) von a , wenn X eine ε -Umgebung von a enthält.
2. Die Menge der inneren Punkte wird mit $\dot{X}$ bezeichnet.
3. **Offen** heisst X genau dann, wenn $X \subset \dot{X}$ ist. Offenbar gilt stets $\dot{X} \subset X$; Offenheit von X bedeutet also nichts anderes als $\dot{X} = X$.

Definition 6.1.11 (Kompakt). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $X \subset V$. Genau dann heisst X (bzgl. der Norm $\|\cdot\|$) **kompakt** (genauer **folgenkompakt**), wenn jede Folge $(x_j) \in X^{\mathbb{N}}$ (bzgl. der Norm $\|\cdot\|$) einen Berührungspunkt $a \in X$ besitzt.

Theorem 6.1.12 (Kompaktheitskriterium). *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $X \subset V$.*

- 1. Ist X kompakt, so ist X abgeschlossen und beschränkt.*
- 2. Ist X abgeschlossen und beschränkt und V endlich-dimensional, so ist X kompakt.*

Definition 6.1.13 (Dichtheit). *Eine Menge A heisst **dicht** (english: dense) in $(X, \|\cdot\|_X)$, falls $A \subset X$ und $\bar{A} = X$, d.h. jedes $x \in X$ ist Grenzwert einer Folge $a_n \in A$. Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter, aber nicht vollständiger Raum, so bezeichnet man $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ als **Vervollständigung** von X , falls X dicht in $\tilde{X}$ und $\|x\|_{\tilde{X}} = \|x\|_X$ für alle $x \in X$.*

Beispiel: $\mathbb{R}$ ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$

Definition 6.1.14 (Dualraum und lineares Funktional). *X sei ein normierter, linearer Raum über $\mathbb{R}$. Als **Dualraum** X' bezeichnet man den Raum aller beschränkten, linearen Abbildungen von X nach $\mathbb{R}$:*

$$X' := L(X, \mathbb{R}).$$

*X' ist ein Banachraum mit der **Dualnorm***

$$\|x'\|_{X'} := \|x'\|_{\mathbb{R} \leftarrow X} = \sup\{|x'(x)| / \|x\|_X : 0 \neq x \in X\}.$$

*Die Elemente $x' \in X'$ nennt man **lineare Funktionale** auf X .*

Theorem 6.1.15 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). *Seien $x, y \in V$ Elemente eines Vektorraums V mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann gilt*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

Unter Verwendung der Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ergibt sich daraus

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Beide Seiten sind genau dann gleich, wenn x und y linear abhängig sind. Im Fall quadratisch integrierbarer reeller Funktionen erhält man

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \left(\int |f(x)|^2 dx \right) \left(\int |g(x)|^2 dx \right).$$

Die letzte Ungleichung wird in folgender Hölderscher Ungleichung ($p = q = 2$) verallgemeinert.

Theorem 6.1.16 (Hölder-Ungleichung). *Sei Ω ein Maßraum, $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$. Dann ist $fg \in L^1(\Omega)$ und*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Structure of the lecture

- **Existence and uniqueness of the forward problem solution (Chapters 6.1.1-6.1.5 from lecture scriptum)**
 - **6.1.1: Basics**
 - **6.1.2: The subtraction approach to get rid of the singularity on the right-hand-side (derivation of the equation for the correction potential)**
 - **6.1.3: Types of partial differential equations**
 - **6.1.4: Sobolev spaces**
 - **6.1.5: A variational formulation**
 - **6.1.6: Variational formulation, existence and uniqueness of the solution for the correction potential**

6.1.2 Herleitung der Gleichung fuer Korrekturpotential

Das elektrische Vorwärtsproblem

In Kapitel 3 (siehe Gleichung (3.13)) wurde die Poisson-Gleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = \nabla \cdot \mathbf{j}^p = J^p \quad \text{in } \Omega, \quad (6.1)$$

hergeleitet, die die Verteilung des elektrischen Potentials Φ im Kopfgebiet Ω mit Gewebeleitfähigkeiten $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ (wobei ab jetzt σ ein 3×3 Leitfähigkeitstensor sei) aufgrund der Primärstromdichte $\mathbf{j}^p$ im Cortex des menschlichen Gehirns beschreibt. Aufgrund der Stetigkeit der Stromdichte über Grenzflächen gilt folgende homogene Neumann Randbedingung an der Kopfoberfläche $\Gamma = \partial\Omega$ (siehe auch Gleichung (3.15)),

$$\langle \sigma \nabla \Phi, \mathbf{n} \rangle|_{\Gamma} = 0, \quad (6.2)$$

mit der Oberflächennormalen $\mathbf{n}$, und eine Referenzelektrode mit gegebenem Potential

$$\Phi(x_{\text{ref}}) = 0. \quad (6.3)$$

Für den Primärstrom (siehe Gleichung (3.2)) hatte sich das Modell des mathematischen Dipols mit Quellort $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und Moment $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3$ als tauglich erwiesen:

$$J^p(x) = \nabla \cdot \mathbf{j}^p(x) := \nabla \cdot \mathbf{M} \delta(x - x_0). \quad (6.4)$$

Die Subtraktionsmethode

Als Literaturgrundlage für die folgende Herleitung der Differentialgleichung fürs Korrekturpotential sei auf [382; 76] verwiesen.

Im Folgenden wird angenommen, dass man ein nicht-leeres Teilgebiet $\Omega^\infty \subset \Omega$ um den Quellort x_0 mit homogener konstanter Leitfähigkeit σ^∞ (die homogene Leitfähigkeit der grauen Substanz) finden kann, sodass $x_0 \in \Omega^\infty / \partial\Omega^\infty$.

Für die Subtraktionsmethode wird nun die Leitfähigkeit σ in zwei Teile zerlegt,

$$\sigma = \sigma^\infty + \sigma^{\text{corr}}, \quad (6.5)$$

sodass σ^∞ konstant über den gesamten Volumenleiter Ω und σ^{corr} Null ist im Teilgebiet Ω^∞ : $\sigma^{\text{corr}}(x) = 0, \forall x \in \Omega^\infty$. Das Potential Φ wird ebenfalls in zwei Teile zerlegt,

$$\Phi = \Phi^\infty + \Phi^{\text{corr}}. \quad (6.6)$$

Das Singularitätenpotential Φ^∞ wird definiert als Lösung für einen Dipol im unendlich ausgedehnten homogenen Volumenleiter mit konstanter Leitfähigkeit σ^∞ .

Hilfssätze aus Nolting-Buch

1.6 Zerlegungs- und Eindeutigkeitssatz

Wir wollen in diesem Kapitel zwei Sätze beweisen, die für Vektorfelder von großer Bedeutung sind. Zusammengefaßt besagen sie, daß unter gewissen Voraussetzungen jedes Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ eindeutig durch sein Quellenfeld $\text{div } \mathbf{a}$ und sein Wirbelfeld $\text{rot } \mathbf{a}$ bestimmt ist. Oder anders ausgedrückt: Jedes Vektorfeld läßt sich eindeutig als Summe eines wirbelfreien und eines quellenfreien Anteils darstellen. Zum Beweis dieser Aussagen sind einige Vorbereitungen notwendig:

Behauptung:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.70)$$

Beweis:

Proof can be found in the file ProofOfStatement1.70.pdf on our website

Bei uns im Skriptum:
Die beiden Gleichungen
für E in

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\quad \begin{aligned}(3.9) \\ (3.10)\end{aligned}$$

Hilfssätze aus Nolting-Buch

Durch die Einführung des skalaren Potentials $\varphi(\mathbf{r})$ in (2.24) lassen sich die beiden Maxwell-Gleichungen (2.39) zusammenfassen zur sogenannten Poisson-Gleichung:

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}). \quad (2.41)$$

Die Lösung dieser linearen, inhomogenen, partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung bezeichnet man als das Grundproblem der Elektrostatik. Falls $\rho(\mathbf{r}')$ für alle $\mathbf{r}'$ bekannt ist und keine Randbedingungen für $\varphi(\mathbf{r})$ im Endlichen vorliegen, dann läßt sich die Poisson-Gleichung mit Hilfe von (2.25) lösen:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Dies läßt sich mit (1.70) einfach überprüfen:

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \Delta_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\stackrel{1.70}{=} -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}). \quad \checkmark$$

Im Folgenden wird eine analytische Lösung für Φ^∞ gegeben. Im Falle von homogener isotroper Leitfähigkeit $\sigma^\infty|_{\Omega^\infty} = \sigma^\infty \mathbf{Id}$, $\sigma^\infty \in \mathbb{R}$ ist die Lösung der Poisson Gleichung

$$\Delta \Phi^\infty = \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}^p}{\sigma^\infty} \quad (6.7)$$

gegeben durch [218, Seite 61]

$$\Phi^\infty(x) = -\frac{1}{4\pi\sigma^\infty} \int_G \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{j}^p(y)}{|x-y|} dy,$$

wobei das Gebiet G so gross gewählt wird, dass die Quelle am Ort x_0 innerer Punkt des Gebiets ist. Diese Lösung lässt sich einfach überprüfen [218, Seite 33]:

$$\Delta_x \Phi^\infty(x) = -\frac{1}{4\pi\sigma^\infty} \int_G \nabla_y \cdot \mathbf{j}^p(y) \Delta_x \frac{1}{|x-y|} dy = \frac{1}{\sigma^\infty} \int_G \nabla_y \cdot \mathbf{j}^p(y) \delta(x-y) dy = \frac{1}{\sigma^\infty} \nabla \cdot \mathbf{j}^p(x).$$

$$J^p(x) = \nabla \cdot j^p(x) := \nabla \cdot M \delta(x - x_0). \quad (6.4)$$

Aufgrund der Vektoridentität

$$\nabla_y \cdot \left(j^p(y) |x - y|^{-1} \right) = |x - y|^{-1} \nabla_y \cdot j^p(y) + j^p(y) \cdot \nabla_y \frac{1}{|x - y|}$$

und

$$\nabla_y \frac{1}{|x - y|} = \frac{x - y}{|x - y|^3}$$

ergibt sich unter Nutzung des mathematischen Dipols (6.4) sowie des Gauss-Theorems

$$\int_G \nabla_y \cdot \left(j^p(y) |x - y|^{-1} \right) \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial G} \left(j^p(y) |x - y|^{-1} \right) \stackrel{(6.4)}{=} \int_{\partial G} \left(M \delta(y - x_0) |x - y|^{-1} \right) = 0$$

folgende Lösung:

$$\Phi^\infty(x) = \frac{1}{4\pi\sigma^\infty} \frac{\langle M, (x - x_0) \rangle}{|x - x_0|^3}. \quad (6.8)$$

Im Falle von homogener anisotroper Leitfähigkeit σ^∞ in Ω^∞ findet man [382]

$$\Phi^\infty(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \sigma^\infty}} \frac{\langle \mathbf{M}, (\sigma^\infty)^{-1}(x - x_0) \rangle}{\langle (\sigma^\infty)^{-1}(x - x_0), x - x_0 \rangle^{3/2}} . \quad (6.9)$$

Der Gradient des Singularitätenpotentials von (6.9) kann ebenfalls analytisch berechnet werden

$$\begin{aligned} \nabla \Phi^\infty(\mathbf{x}) = & \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \sigma^\infty}} \cdot \frac{(\sigma^\infty)^{-1} \mathbf{M}}{\langle (\sigma^\infty)^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle^{3/2}} \\ & - \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \sigma^\infty}} \cdot \frac{3 \langle \mathbf{M}, (\sigma^\infty)^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle (\sigma^\infty)^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\langle (\sigma^\infty)^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle^{5/2}} . \end{aligned} \quad (6.10)$$

In beiden Fällen hat das Potential Φ^∞ eine Singularität am Ort $x = x_0$ und ist ansonsten glatt. Setzt man (6.5–6.7) in (6.1) ein, dann erhält man die Poisson Gleichung für das Korrekturpotential

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi^{\text{corr}}) = f \text{ in } \Omega, \quad f := \nabla \cdot (\sigma^{\text{corr}} \nabla \Phi^\infty), \quad (6.11)$$

mit inhomogenen Neumann Randbedingungen an der Kopfoberfläche

$$\langle \sigma \nabla \Phi^{\text{corr}}, n \rangle = g \text{ on } \Gamma, \quad g := -\langle \sigma \nabla \Phi^\infty, n \rangle. \quad (6.12)$$

Diese Gleichung wird numerisch nach Φ^{corr} gelöst, um dann das Potential Φ schliesslich über (6.6) zu berechnen.

Function $\Phi^\infty(x)$ from equation (6.9) fulfils the Neumann boundary conditions at infinity ($x \rightarrow \infty$). The singularity of $\Phi^\infty(x)$ at $x = x_0$ is of order 2, so that $\Phi^\infty(x)$ does not belong to the Sobolev-space $H^1(\Omega)$, not even to $L^2(\Omega)$ (the space of square-integrable functions). See definitions of function spaces in Section 6.1.4. However, Φ^∞ belongs to $L^1(\Omega)$, i.e., it is integrable.

Thank you for your attention!



SIM-NEURO work-group at IBB

