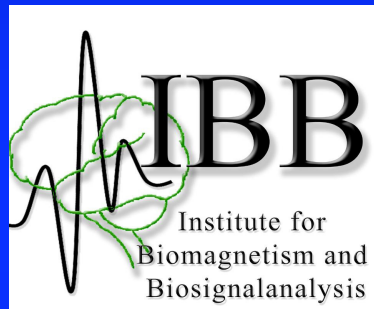


# Maxwell equations and physical modeling in bioelectromagnetism



**Carsten H. Wolters**

Institut für Biomagnetismus und Biosignalanalyse, Westf. Wilhelms-Universität Münster, Germany

---

*Lecture on Oct.22, 2024*

# Maxwell equations and EEG and MEG modeling: Chapter 3 of lecture scriptum that you find here:

<http://www.sci.utah.edu/~wolters/LiteraturZurVorlesung/Vorlesungsskriptum/vorlesungsskriptum.pdf>

## Index of /~wolters/LiteraturZurVorlesung/Literatur/B:\_Basics\_Modeling/A:\_Quasi-Stationarity

|   | <a href="#">Name</a>                                                              | <a href="#">Last modified</a> | <a href="#">Size</a> | <a href="#">Description</a> |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|----------------------|-----------------------------|
|  | <a href="#">Parent Directory</a>                                                  |                               |                      | -                           |
|   | <a href="#">A:_RWTHArbeitspapier_QuasiStat_1994.pdf</a>                           | 2008-04-02 05:13              | 1.7M                 |                             |
|   | <a href="#">Dr._Fionnecyheppner_QuasiStat_Basismod_1997.pdf</a>                   | 2008-04-02 05:12              | 2.7M                 |                             |
|   | <a href="#">C:_ChapterIIIA_of_HaemaelainenEtAl_EMEGReview_RevModPhys_1993.pdf</a> | 2008-03-27 02:45              | 19M                  |                             |
|  | <a href="#">Dr._HuntonEzjn_wyammoezy.pdf</a>                                      | 2008-03-27 02:45              | 3.7M                 |                             |

# Magnetoencephalography—theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain

Matti Hämäläinen, Riitta Hari, Risto J. Ilmoniemi, Jukka Knuutila, and Olli V. Lounasmaa

*Low Temperature Laboratory, Helsinki University of Technology, 02150 Espoo, Finland*

Magnetoencephalography (MEG) is a noninvasive technique for investigating neuronal activity in the living human brain. The time resolution of the method is better than 1 ms and the spatial discrimination is, under favorable circumstances, 2–3 mm for sources in the cerebral cortex. In MEG studies, the weak 10 fT–1 pT magnetic fields produced by electric currents flowing in neurons are measured with multichannel SQUID (superconducting quantum interference device) gradiometers. The sites in the cerebral cortex that are activated by a stimulus can be found from the detected magnetic-field distribution, provided that appropriate assumptions about the source render the solution of the inverse problem unique. Many interesting properties of the working human brain can be studied, including spontaneous activity and signal processing following external stimuli. For clinical purposes, determination of the locations of epileptic foci is of interest. The authors begin with a general introduction and a short discussion of the neural basis of MEG. The mathematical theory of the method is then explained in detail, followed by a thorough description of MEG instrumentation, data analysis, and practical construction of multi-SQUID devices. Finally, several MEG experiments performed in the authors' laboratory are described, covering studies of evoked responses and of spontaneous activity in both healthy and diseased brains. Many MEG studies by other groups are discussed briefly as well.

## CONTENTS

|                                                                           |     |                                                            |     |
|---------------------------------------------------------------------------|-----|------------------------------------------------------------|-----|
| I. Introduction                                                           | 414 | 1. Formulation of the problem                              | 437 |
| A. General comments                                                       | 414 | 2. Selecting the correct model                             | 438 |
| B. The human brain                                                        | 416 | 3. Linear optimization                                     | 438 |
| C. Basics of magnetoencephalography                                       | 416 | 4. Finding dipole positions                                | 439 |
| D. Detection of neuromagnetic fields                                      | 418 | a. The multiple-signal-classification approach             | 439 |
| E. Magnetic fields from the human body                                    | 420 | b. Variable-orientation dipoles                            | 440 |
| II. Neural Basis of Magnetoencephalography                                | 421 | c. Fixed-orientation dipoles                               | 440 |
| A. Constituents of the brain                                              | 421 | d. The combined case                                       | 440 |
| B. The neuron                                                             | 422 | e. Applications and limitations                            | 440 |
| C. Ion mechanisms                                                         | 423 | I. Current-distribution models                             | 440 |
| D. Postsynaptic potentials                                                | 424 | 1. Minimum-norm estimates                                  | 441 |
| E. Action potentials                                                      | 425 | 2. Regularization                                          | 441 |
| III. Neural Generation of Electromagnetic Fields                          | 425 | 3. Minimum-norm estimates with <i>a priori</i> assumptions | 443 |
| A. Quasistatic approximation of Maxwell's equations                       | 425 | J. Future trends                                           | 443 |
| B. Primary current                                                        | 426 | V. Instrumentation for Magnetoencephalography              | 444 |
| C. Current dipole                                                         | 426 | A. Environmental and instrumental noise sources            | 444 |
| D. Integral formulas for $V$ and $B$                                      | 427 | B. Noise reduction                                         | 444 |
| E. Piecewise homogeneous conductor                                        | 427 | 1. Shielded rooms                                          | 444 |
| 1. Integral equations for $V$ and $B$                                     | 427 | 2. Gradiometers                                            | 445 |
| 2. Spherically symmetric conductor                                        | 428 | 3. Electronic noise cancellation                           | 447 |
| 3. Realistically shaped conductor models                                  | 428 | 4. Filtering and averaging of neuromagnetic data           | 447 |
| IV. Inverse Problem                                                       | 430 | 5. rf filters and grounding arrangements                   | 448 |
| A. General                                                                | 430 | C. Dewars and cryogenics                                   | 448 |
| B. Lead field                                                             | 431 | D. Superconducting quantum interference devices            | 449 |
| C. Value of different measurements                                        | 431 | 1. SQUID basics                                            | 449 |
| D. Comparison of magnetoencephalography and electroencephalography        | 432 | 2. Thin-film fabrication techniques                        | 450 |
| E. Combination of magnetoencephalography with tomographic imaging methods | 433 | 3. Sensitivity of the dc SQUID                             | 451 |
| F. Probabilistic approach to the inverse problem                          | 433 | 4. Optimization of flux transformer coils                  | 452 |
| 1. The general solution                                                   | 433 | 5. Examples of dc SQUIDs for neuromagnetic applications    | 453 |
| 2. Gaussian errors                                                        | 434 | 6. Integrated thin-film magnetometers and gradiometers     | 454 |
| 3. Alternative assumptions for noise                                      | 434 | 7. High- $T_c$ SQUIDs                                      | 454 |
| 4. Confidence regions                                                     | 434 | E. dc SQUID electronics                                    | 455 |
| 5. Marginal distributions                                                 | 435 | 1. Electronics based on flux modulation                    | 455 |
| G. The equivalent current dipole                                          | 435 | 2. Direct readout                                          | 457 |
| 1. Finding dipole parameters                                              | 435 | a. Additional positive feedback                            | 458 |
| 2. Estimation of noise                                                    | 436 | b. Amplifier noise cancellation                            | 458 |
| 3. Validity of the model                                                  | 436 | 3. Digital readout                                         | 459 |
| 4. Confidence limits                                                      | 436 | F. Multi-SQUID systems                                     | 460 |
| H. Multidipole models                                                     | 437 | 1. Optimal coil configuration                              | 460 |
|                                                                           |     | 2. Sampling of neuromagnetic signals                       | 460 |

# Maxwell equations and EEG and MEG modeling: Chapter 3 of lecture scriptum that you find here:

<http://www.sci.utah.edu/~wolters/LiteraturZurVorlesung/Vorlesungsskriptum/vorlesungsskriptum.pdf>

## Index of /~wolters/LiteraturZurVorlesung/Literatur/B:\_Basics\_Modeling/A:\_Quasi-Stationarity

|  Name                                                                               | <a href="#">Last modified</a> | <a href="#">Size</a> | <a href="#">Description</a> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|----------------------|-----------------------------|
|  <a href="#">Parent Directory</a>                                                  |                               |                      | -                           |
|  <a href="#">A: _RWTHArbeitspapier_QuasiStat_1994.pdf</a>                           | 2008-04-02 05:13              | 1.7M                 |                             |
|  <a href="#">B: PlonseyHeppner_QuasiStat_BullMath_1967.pdf</a>                      | 2008-04-02 05:12              | 2.2M                 |                             |
|  <a href="#">C: _ChapterIIIA_of_HaemaelainenEtAl_EMEGReview_RevModPhys_1993.pdf</a> | 2008-03-27 02:45              | 19M                  |                             |
|  <a href="#">D: _MunckDijk_Symmetry.pdf</a>                                        | 2008-03-27 02:37              | 370K                 |                             |

# Model for primary source

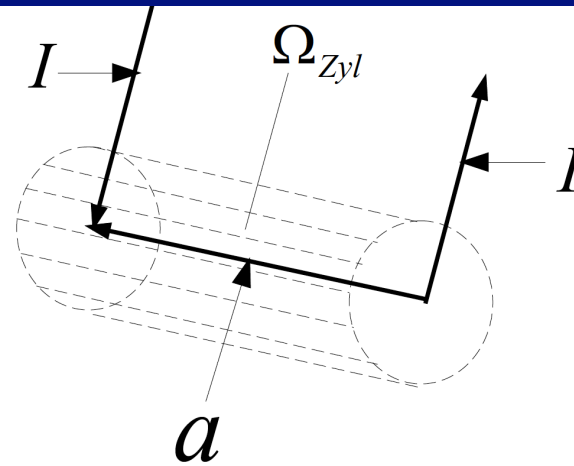


Figure 3.1: Modell des physikalischen Dipols.

Physiologisch sinnvoll ist die Modellierung eines aktivierten Neuronenverbands in erster Näherung über einen Zylinder um einen Vektor  $\mathbf{a}$  (siehe Abbildung 3.1). Die Primärstromdichte  $\mathbf{j}^p$  ist parallel zu  $\mathbf{a}$  ausgerichtet und besitzt innerhalb des Zylinders konstante Amplitude, außerhalb ist sie Null. An den Grundflächen des Zylinders wird ein Strom  $I$  eingeleitet bzw. ausgeleitet. Der Vektor  $\mathbf{a}$  ist von der stromausleitenden zur stromeinleitenden Grundfläche gerichtet [225; 221]. Bezeichne  $\Omega_{\text{Zyl}}$  den Zylinder und  $|\Omega_{\text{Zyl}}|$  das Zylindervolumen des aktivierten Neuronenverbands und sei

$$\delta(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1, & \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\text{Zyl}} \\ 0, & \forall \mathbf{x} \notin \Omega_{\text{Zyl}} \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich als Modell für einen aktivierten Neuronenverband der sogenannte physikalische Dipol

$$\mathbf{j}^p(\mathbf{x}) = -I\mathbf{a} \frac{\delta(\mathbf{x})}{|\Omega_{\text{Zyl}}|}. \quad (3.1)$$

Wird der Radius des Zylinders immer kleiner, so nähert sich der physikalische Dipol einer aus zwei Monopolen bestehenden Quellanordnung, einer Senke und einer Quelle, die einen sehr geringen Abstand  $|\mathbf{a}|$  voneinander haben. Die Feldverteilung eines solchen Modells verhält sich in der Fernzone wie ein reines Dipolfeld, wie über eine Taylorentwicklung gezeigt werden kann ([218], Seite 88). Mit dem Grenzübergang

$$\mathbf{M} := \lim_{|\mathbf{a}| \rightarrow 0} I \mathbf{a}$$

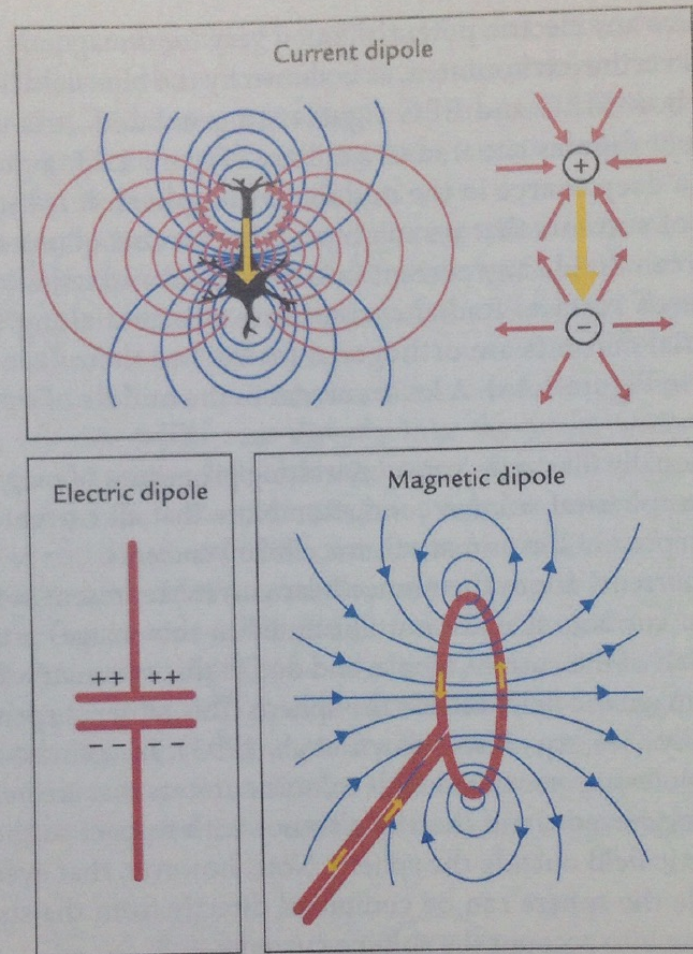
ergibt sich das üblicherweise in der Literatur benutzte Modell des Stromdipols (siehe Kapitel 2.5 und die Referenzen darin):

$$\mathbf{j}^p = \mathbf{M} \delta_{\mathbf{x}_0} \quad (3.2)$$

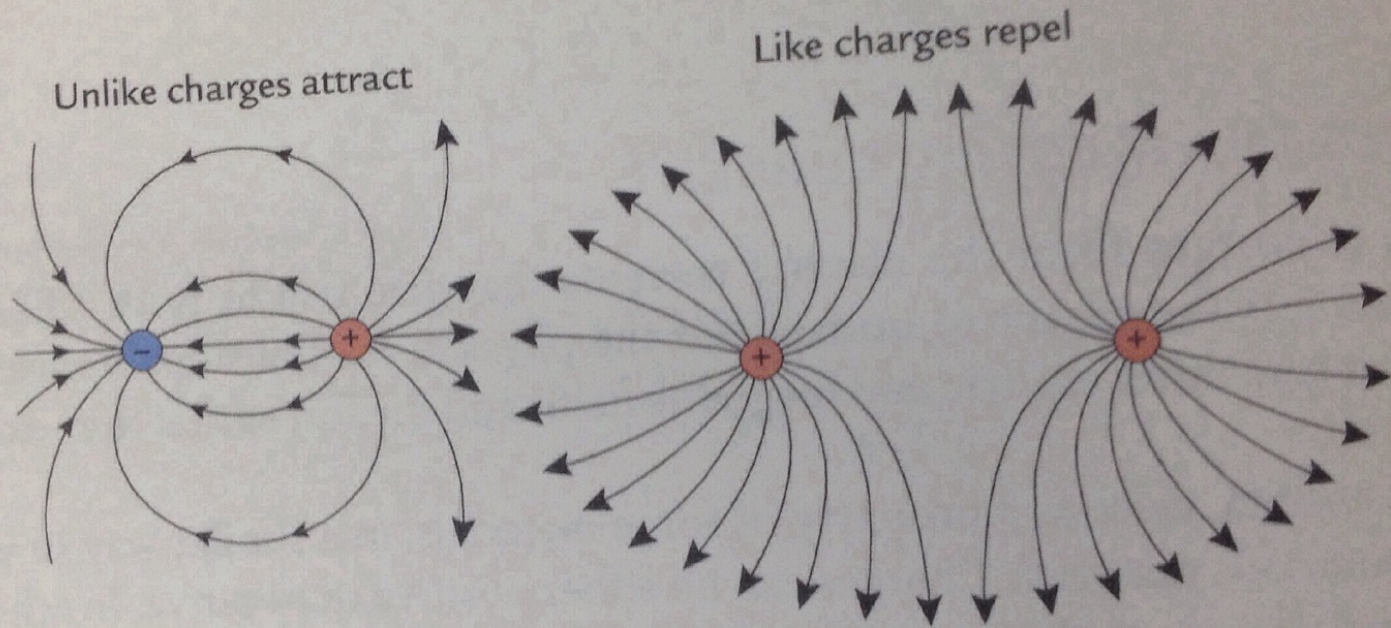
$\mathbf{x}_0$  ist hier der Ort der Quelleinspeisung, die Amplitude wird über eine Dirac-Delta-Distribution (stetiges lineares Funktional auf  $D(\Omega)$  [148]) modelliert.

Es sei angemerkt, daß die Primärstromdichte im Hirn sicherlich eine beschränkte Amplitude besitzt und auch die Annahme einer Quelleinleitung in nur einem Punkte lediglich eine Hilfsvorstellung ist, die aber im Hinblick auf die in der Fernzone betrachtete Feldverteilung sinnvoll ist.

# Dipole models

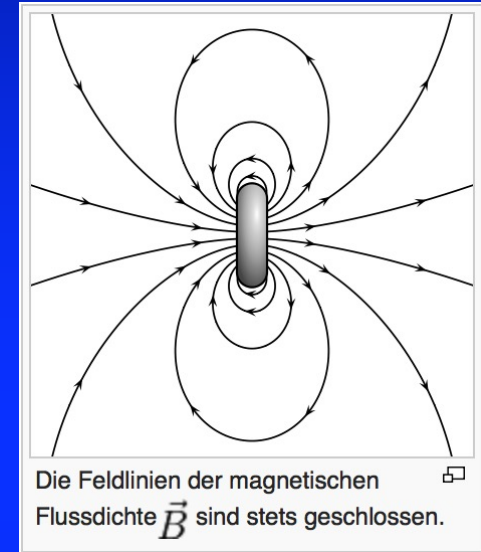
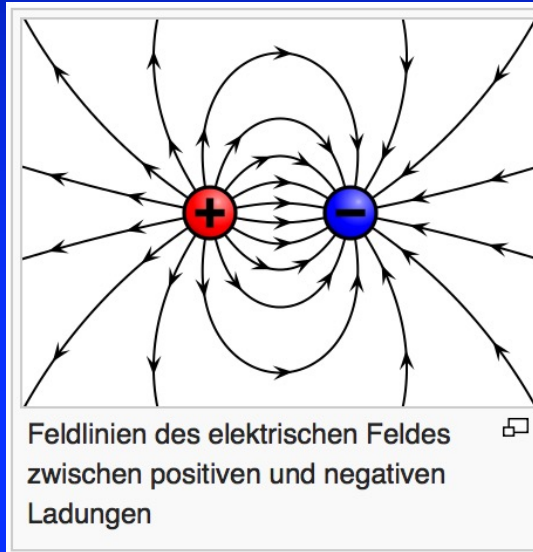
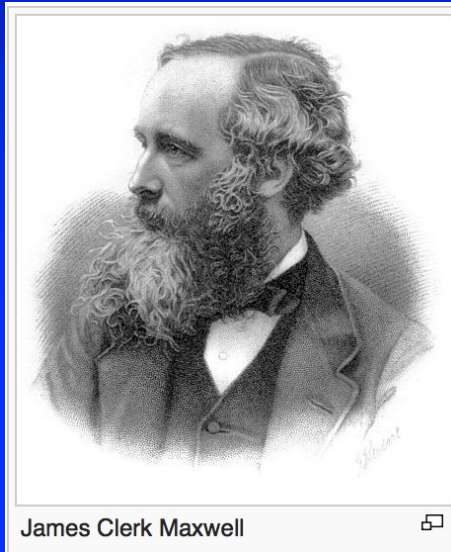


**FIGURE 1.3.** Three types of dipole. **Top.** A current dipole (yellow arrow) depicted in two different ways. At left, the blue lines show the isopotential lines and the red lines show the paths of the volume (return) currents in a schematic neuron. At right, the volume currents have been replaced by two radially symmetric current distributions: currents (red arrows) entering the positive end of the dipole and currents leaving the negative pole of the dipole. **Bottom left.** An electric dipole (a charged capacitor) with no current flow. **Bottom right.** Magnetic dipole (a current loop) with the associated magnetic field lines (shown in blue).



**FIGURE 3.1.** Unlike charges attract and like charges repel. Two unlike charges (on left) attract and two like charges (on right) repel each other. The lines depict the direction of force.

# Maxwell Gleichungen



| Name                              | SI                                                                                          | Physikalischer Inhalt                                                                                  |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Gaußsches Gesetz                  | $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{frei}}$                                           | Die Ladung ist <b>Quelle</b> des elektrischen Feldes.                                                  |
| Gaußsches Gesetz für Magnetfelder | $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$                                                            | Das Feld der magnetischen Flussdichte ist quellenfrei; es gibt keine magnetischen Monopole.            |
| Induktionsgesetz                  | $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$                        | Änderungen des magnetischen Feldes führen zu einem elektrischen Wirbelfeld.                            |
| Erweitertes Durchflutungsgesetz   | $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ | Elektrische Ströme – einschließlich des Verschiebungsstroms – führen zu einem magnetischen Wirbelfeld. |

**D:** elektrische Flussdichte

**E:** elektrische Feldstärke

**H:** magnetische Feldstärke

**B:** magnetische Flussdichte

**D:** Displacement field

**H:** magnetizing field

**Rho:** charge density

# Maxwell Gleichungen

Die folgende Herleitung der quasistatischen Näherung erfolgt für einen unendlich ausgedehnten, homogenen und isotropen Volumenleiter. Es soll damit der Einfluß der zeitlichen Änderung der elektromagnetischen Felder auf ihre Ausbreitung untersucht werden, nicht deren Abhängigkeit vom Volumenleiter. Somit stellt diese Vereinfachung für die folgenden Überlegungen keine Einschränkung dar.

# Maxwell Gleichungen

Sei  $\mathbf{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\mathbf{D}$  die elektrische Flussdichte,  $\rho$  die elektrische Ladungsdichte,  $\mathbf{j}$  die Stromdichte und  $\epsilon$  die Permittivität (Durchlässigkeit eines Materials für elektrische Felder).  $\mathbf{H}$  sei die magnetische Feldstärke,  $\mathbf{B}$  die magnetische Flussdichte und  $\mu$  die magnetische Permeabilität (Durchlässigkeit von Materie für magnetische Felder). Die Grundgleichungen, die zur Beschreibung elektromagnetischer Phänomene zur Verfügung stehen, sind die vier Maxwellgleichungen [218]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (Coulomb) \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (Faraday) \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D} \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.6)$$

Für eine vollständige Beschreibung werden noch Materialgleichungen benötigt. Da sich biologisches Gewebe im Wesentlichen wie ein Elektrolyt verhält, werden deshalb folgende Gleichungen verwendet [243]:

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

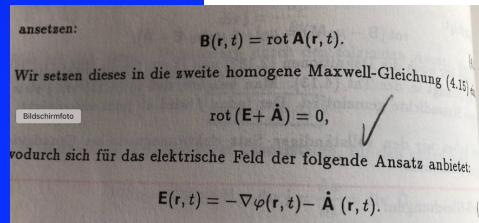
D: Displacement field  
H: magnetizing field  
Rho: charge density  
Eps\_0: permittivity of free space  
Mu\_0: permeability

# Maxwell Gleichungen

Die Stromdichte  $\mathbf{j}$  kann als Summe aus durch die Quellen erzeugter Primärstromdichte  $\mathbf{j}^p$  und der durch Rückflüsse im Volumen hervorgerufenen Volumenstromdichte  $\sigma \mathbf{E}$  definiert werden [126]:

$$\mathbf{j} := \mathbf{j}^p + \sigma \mathbf{E} \quad (3.7)$$

Es können nun Potentiale  $\Phi$  und  $\mathbf{A}$  eingeführt werden [218], so daß sich



$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \partial_t \mathbf{A}$$

schreiben läßt. Aus der dritten Maxwellgleichung ergibt sich

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} + \mathbf{j}^p.$$

Wenn man auf beide Seiten dieser Gleichung die Divergenz anwendet ( $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$ ) und unter der Annahme, daß die Vektorfelder von der Zeit harmonisch ( $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ ) abhängen (Materialeigenschaften linear, siehe [243]), erhält man die verallgemeinerte Poissongleichung in harmonischer Formulierung:

$$\nabla \cdot [(\sigma + i\omega \epsilon \epsilon_0)(\nabla \Phi + i\omega \mathbf{A})] = \nabla \cdot \mathbf{j}^p. \quad (3.8)$$

Hier bezeichne  $\omega$  die Kreisfrequenz.

Omega: angular frequency

| Bezeichnung | Schicht  | $\sigma [1/\{\Omega \cdot m\}]$ |
|-------------|----------|---------------------------------|
| $\Omega_1$  | Gehirn   | 0.33                            |
| $\Omega_2$  | Liquor   | 1.79 (siehe [23])               |
| $\Omega_3$  | Knochen  | 0.0042                          |
| $\Omega_4$  | Kopfhaut | 0.33                            |

Table 3.1: Leitfähigkeiten der verschiedenen Schichten

Zu den elektrischen Eigenschaften biologischer Gewebe können folgende Aussagen gemacht werden:

- Die bei bioelektrischen Quellen am häufigsten auftretenden Frequenzen liegen bei  $f < 1\text{kHz}$ . Dies liegt daran, daß die Dauer eines Aktionspotentials in der Größenordnung von 1ms liegt [243].
- Der Kopf kann durch einen schichtweise homogenen Leiter modelliert werden. Für gewöhnlich werden drei bzw. vier (mit Liquor) Schichten verwendet (siehe Abbildung 6.3), deren Leitfähigkeiten in Tabelle 3.1 dargestellt sind. Bei den angegebenen Werten handelt es sich lediglich um Näherungen (bis auf die Leitfähigkeit des Liquors, siehe dazu [23]). Die das Hirn versorgenden Blutgefäße zum Beispiel weisen eine höhere Leitfähigkeit auf als das sie umgebende Gewebe. Eine genauere Bestimmung der Leitfähigkeiten im Kopf ist schwierig und stellt mathematisch modelliert ein für sich inverses Problem dar (siehe, z.B.,[103; 105; 378]). Postmortal

Zu den elektrischen Eigenschaften biologischer Gewebe können folgende Aussagen gemacht werden:

- Die bei bioelektrischen Quellen am häufigsten auftretenden Frequenzen liegen bei  $f < 1\text{kHz}$ . Dies liegt daran, daß die Dauer eines Aktionspotentials in der Größenordnung von 1ms liegt [243].
- Der Kopf kann durch einen schichtweise homogenen Leiter modelliert werden. Für gewöhnlich werden drei bzw. vier (mit Liquor) Schichten verwendet (siehe Abbildung 6.3), deren Leitfähigkeiten in Tabelle 3.1 dargestellt sind. Bei den angegebenen Werten handelt es sich lediglich um Näherungen (bis auf die Leitfähigkeit des Liquors, siehe dazu [23]). Die das Hirn versorgenden Blutgefäße zum Beispiel weisen eine höhere Leitfähigkeit auf als das sie umgebende Gewebe. Eine genauere Bestimmung der Leitfähigkeiten im Kopf ist schwierig und stellt mathematisch modelliert ein für sich inverses Problem dar (siehe, z.B.,[103; 105; 378]). Postmortal

| Bezeichnung | Schicht  | $\sigma$ [ $1/\{\Omega \cdot \text{m}\}$ ] |
|-------------|----------|--------------------------------------------|
| $\Omega_1$  | Gehirn   | 0.33                                       |
| $\Omega_2$  | Liquor   | 1.79 (siehe [23])                          |
| $\Omega_3$  | Knochen  | 0.0042                                     |
| $\Omega_4$  | Kopfhaut | 0.33                                       |

Table 3.1: Leitfähigkeiten der verschiedenen Schichten

ändern sich die Leitfähigkeiten schnell, so daß gemessene Werte wiederum nur grobe Näherungen darstellen. Die Empfindlichkeit der Quellsuche auf Leitfähigkeitsänderungen im Kopfmodell wurde bereits in einigen Studien untersucht [245; 253; 375]. Es gibt auch Bemühungen, die Leitfähigkeiten aus gemessenen EEG und/oder MEG-Daten individuell zu schätzen [106; 324; 177].

Für die Abschätzungen in diesem Kapitel wird mit einer Leitfähigkeit von  $\sigma = 0.2 \cdot 1/[\Omega \cdot \text{m}]$  gerechnet.

- Die magnetischen Eigenschaften von biologischem Gewebe können vernachlässigt werden, so daß für die Permeabilität  $\mu\mu_0$  die des Vakuums ( $\mu = 1, \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ ) eingesetzt werden kann.

## Kapazitive Effekte:

Der Term  $(\sigma + i\omega\epsilon\epsilon_0)$  in Gleichung (8) beschreibt die Leiteigenschaften des Volumenleiters. Der Anteil  $i\omega\epsilon\epsilon_0$  resultiert aus Verschiebungsströmen. Zum Vergleich der beiden Anteile wird nun der Quotient  $\frac{\omega\epsilon\epsilon_0}{\sigma}$  betrachtet. In der folgenden Tabelle sind Werte für verschiedene Frequenzen aufgelistet [280]:

| Gewebe     | $\omega\epsilon\epsilon_0/\sigma$ |      |       |
|------------|-----------------------------------|------|-------|
|            | 100Hz                             | 1kHz | 10kHz |
| Lunge      | 0.025                             | 0.05 | 0.14  |
| Fett       | 0.01                              | 0.03 | 0.15  |
| Leber      | 0.035                             | 0.06 | 0.2   |
| Herzmuskel | 0.04                              | 0.15 | 0.32  |

Ein biologischer Volumenleiter kann in guter Näherung als ohmsch angesehen werden [280].

### Ausbreitungseffekt:

Die Potentiale lassen sich für den unendlich ausgedehnten, homogenen und isotropen Volumenleiter bestimmen [243]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}^p(\mathbf{y}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}}{R} d\mathbf{y} \\ \Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi(\sigma + i\omega\epsilon\epsilon_0)} \int \frac{-\nabla \cdot (\mathbf{j}^p(\mathbf{y})) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}}{R} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Hier ist  $\mathbf{R}$  der Abstandsvektor vom Meßpunkt zum Quellort,  $R$  seine Länge und  $\mathbf{k}$  der Wellenvektor, für den

$$k^2 = -i \left( 1 + \frac{i\omega\epsilon\epsilon_0}{\sigma} \right) \mu\mu_0\omega\sigma$$

gilt (siehe, z.B., [218, Seiten 245-246]). Skalares Potential  $\Phi$  und Vektorpotential  $\mathbf{A}$  hängen vom Phasenfaktor  $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}$  ab. Dieser Faktor beschreibt die Ausbreitung der Wellenfront. Das bedeutet, daß die elektromagnetischen Felder einer zeitlichen Veränderung der Quellen mit einer Verzögerung folgen, die vom Abstand  $R$  zum Ort der Quellen abhängt. Unter Berücksichtigung dieses Effektes ist es sehr schwer, die bei einem EEG gemessene Potentialverteilung zu deuten. Schließlich trifft die Information über die Veränderung der elektrischen Aktivität einer Quelle an den unterschiedlichen Ableitelektroden zu verschiedenen Zeitpunkten ein.

Für  $R$  kann ein Wert von  $R_{\max} = 0.5\text{m}$  angenommen werden. Durch Einsetzen der oben genannten Zahlenwerte erhält man [243]

$$(k \cdot R_{\max}) \approx 0.0063(1 - i).$$

Der Faktor  $e^{-ikR}$  kann also mit einem Fehler von weniger als 1% vernachlässigt werden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Felder im biologischen Gewebe ist also so groß, daß sich zeitliche Änderungen überall im Volumenleiter gleichzeitig bemerkbar machen.

### Induktionseffekte:

Der Term  $(\nabla\Phi + i\omega\mathbf{A})$  in Gleichung (8) besagt, daß sich das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  nicht nur aus einem skalaren Potential  $\Phi$  ableitet, sondern ein Teil durch ein zeitlich veränderliches Vektorpotential  $\mathbf{A}$  induziert wird. Es kann gezeigt werden [243], daß

$$\frac{|\omega\mathbf{A}|}{|\nabla\Phi|} = |k \cdot R|^2,$$

so daß mit einem Fehler in der Größenordnung  $10^{-4}$  ein induktiver Effekt vernachlässigt werden kann.

# Forward problem in EEG

## Zusammenfassung:

Die Abschätzung einzelner Effekte, die mit zeitlich veränderlichen Quellen verbunden sind, hat gezeigt, daß die quasistatische Näherung im betrachteten Frequenzbereich in biologischem Gewebe ein sinnvolles Modell darstellt. Zusammenfassend erhält man in der quasistatischen Formulierung

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{3.9}\tag{3.10}$$

Das elektrische Feld kann über

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi\tag{3.11}$$

berechnet werden. Die Stromdichte lässt sich in Primär-Stromdichte  $\mathbf{j}^p$  und Sekundär-Stromdichte  $-\sigma\nabla\Phi$  aufteilen

$$\mathbf{j} \stackrel{(3.7)}{:=} \mathbf{j}^p + \sigma\mathbf{E} \stackrel{(3.11)}{=} \mathbf{j}^p - \sigma\nabla\Phi.\tag{3.12}$$

Bildet man die Divergenz von Gleichung (3.9) und setzt Gleichung (3.12) ein, dann resultiert folgende Poisson-Gleichung fürs elektrische Potential im Kopfvolumen  $\Omega$

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = \nabla \cdot \mathbf{j}^p \quad \text{in } \Omega\tag{3.13}$$

## Das elektrische Vorwärtsproblem

In Kapitel 3 (siehe Gleichung (3.13)) wurde die Poisson-Gleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = \nabla \cdot \mathbf{j}^p = J^p \text{ in } \Omega, \quad (6.1)$$

hergeleitet, die die Verteilung des elektrischen Potentials  $\Phi$  im Kopfgebiet  $\Omega$  mit Gewebeleitfähigkeiten  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  (wobei ab jetzt  $\sigma$  ein  $3 \times 3$  Leitfähigkeitstensor sei) aufgrund der Primärstromdichte  $\mathbf{j}^p$  im Cortex des menschlichen Gehirns beschreibt. Aufgrund der Stetigkeit der Stromdichte über Grenzflächen gilt folgende homogene Neumann Randbedingung an der Kopfoberfläche  $\Gamma = \partial\Omega$  (siehe auch Gleichung (3.15)),

$$\langle \sigma \nabla \Phi, \mathbf{n} \rangle|_{\Gamma} = 0, \quad (6.2)$$

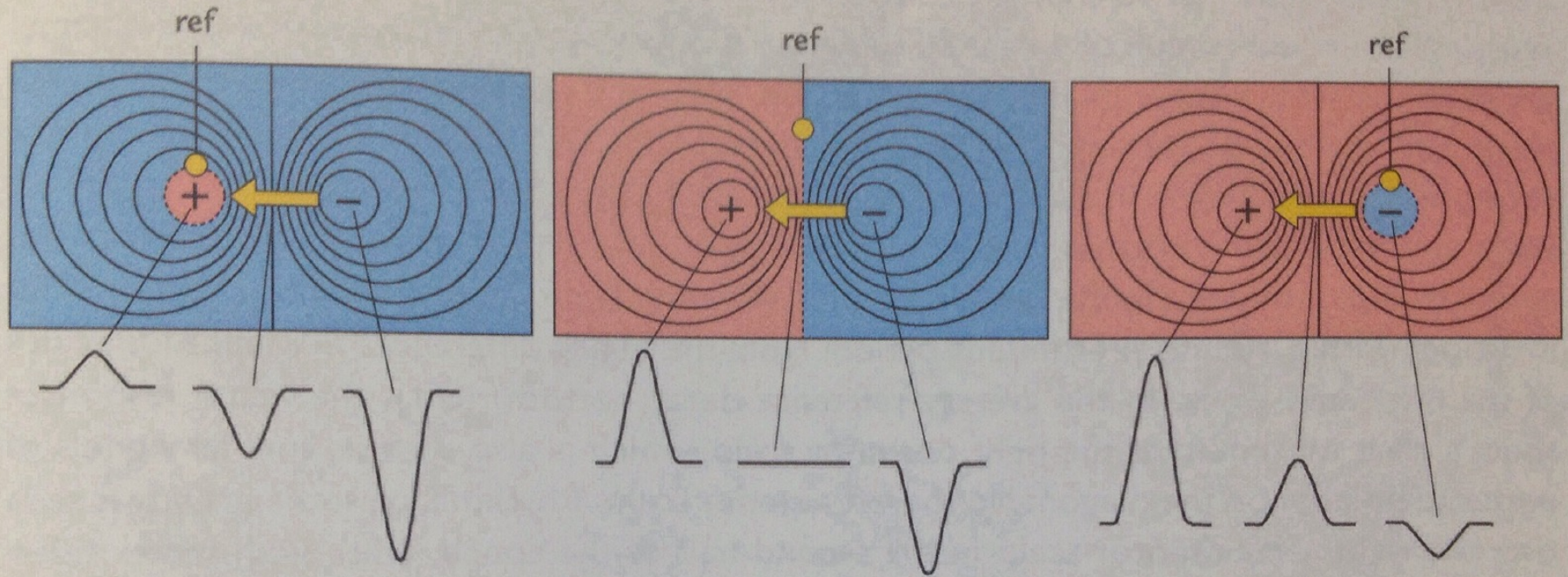
mit der Oberflächennormalen  $\mathbf{n}$ , und eine Referenzelektrode mit gegebenem Potential

$$\Phi(x_{\text{ref}}) = 0. \quad (6.3)$$

Für den Primärstrom (siehe Gleichung (3.2)) hatte sich das Modell des mathematischen Dipols mit Quellort  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  und Moment  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3$  als tauglich erwiesen:

$$J^p(x) = \nabla \cdot \mathbf{j}^p(x) := \nabla \cdot \mathbf{M} \delta(x - x_0). \quad (6.4)$$

# The reference electrode



**FIGURE 5.5.** Schematic illustration of the effect of reference electrode. The potential distribution associated with a tangential current dipole (yellow arrow). The colors indicate positive (pink) and negative (blue) potentials. As the site of the reference electrode (yellow sphere) changes, its relative potential also changes. Therefore, the border between areas of positive and negative potentials changes, whereas the shape of the topographic distribution remains the same irrespective of reference electrode location. The polarities and amplitudes of responses recorded from three different locations (bottom row) also clearly depend on the reference location.

## Equations for the magnetic flux:

Since the divergence of  $\mathbf{B}$  is zero (see Maxwell equation (3.10)) and the head domain is convex, a magnetic potential  $\mathbf{A}$  with  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  can be introduced and, using Coulomb's gauge  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  and Equations (3.7) and (3.11), Maxwell's equation (3.9) transforms to

$$\mu_0 (\mathbf{j}^p - \sigma \nabla \Phi) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}.$$

The source term is vanishing outside the volume conductor, so that the solution of this Poisson equation is given by [218]

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}^p(\mathbf{y}) - \sigma(\mathbf{y}) \nabla \Phi(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}.$$

$$\mathbf{j} := \mathbf{j}^p + \sigma \mathbf{E} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad (3.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (3.9)$$

The magnetic flux  $\Psi$  through an MEG magnetometer flux transformer  $\Upsilon$  (see Figure 3.2) is determined as a surface integral over the magnetic induction for the coil area  $F$  enclosed by  $\Upsilon$ , or, using Stokes theorem [218], as

$$\Psi = \int_F \mathbf{B} dF = \oint_{\Upsilon} \mathbf{A}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

If we consider the mathematical dipole (3.2) and define

$$\mathbf{C}(\mathbf{y}) = \oint_{\Upsilon} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{x}, \quad (3.16)$$

the final equations for *primary magnetic flux*,  $\Psi_p$ , and *secondary magnetic flux*,  $\Psi_s$ , emerging from primary and secondary (return) currents, resp., are given by

$$\Psi_p \stackrel{(3.2)}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{M}, \mathbf{C}(\mathbf{x}_0)) \quad (3.17)$$

$$\Psi_s = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} (\sigma(\mathbf{y}) \nabla \Phi(\mathbf{y}), \mathbf{C}(\mathbf{y})) d\mathbf{y} \quad (3.18)$$

$$\Psi = \Psi_p + \Psi_s.$$

# Thank you for your attention!



## SIM-NEURO work-group at IBB

