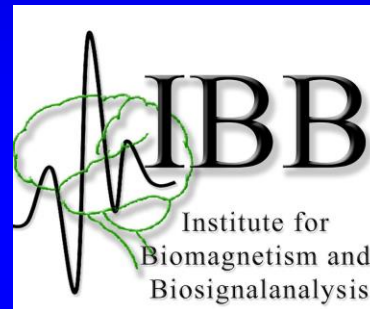


Further topics in EEG and MEG forward modeling



Carsten Wolters

Lectures, part I:

Program for the lecture “Modern Applied Mathematics in Bioelectromagnetism, Part I”

Oct.10: **Wolters:** Preliminary discussion, introduction and motivation

Oct.17: **Wolters:** Basics of Electro- (EEG) and Magnetoencephalography (MEG), EEG/MEG source analysis

Oct.24: **Wolters:** Maxwell equations and physical modeling in bioelectromagnetism

Oct.31: **Wolters:** Basic mathematics for bioelectromagnetism (EEG/MEG, TES/TMS): Scriptum chap 6.1.1 – 6.1.4

Nov.7: **Wolters:** Basic mathematics for bioelectromagnetism (EEG/MEG, TES/TMS): Scriptum chap 6.1.5 – 6.1.6

Nov.14: **Wolters:** Finite element method (FEM) based forward modeling for bioelectromagnetism (EEG/MEG, TES/TMS), Part I: Convergence analysis and source models

Nov.21: **Wolters:** FEM-based forward modeling for bioelectromagnetism (EEG/MEG, TES/TMS), Part II: Convergence analysis and source models 6.5.2-6.5.4, 6.5.7, 6.2 (Analytical solutions in simplified geometries), 6.5.8-6.5.10 (Validation of numerical procedures in simplified geometries)

Nov.28: **Wolters:** FEM-based forward modeling for bioelectromagnetism (EEG/MEG, TES/TMS), Part III: FEM source models and accuracies

Dec.5: **Wolters:** Linear complexity and fast iterative solver techniques for FEM-based forward modeling (EEG/MEG, TES/TMS): Scriptum chap 6.5.1, 6.5.5-6.5.6, 7

Dec.12: **Wolters:** Different FEM approaches (Continuous and Discontinuous Galerkin FEM (CG-, DG-FEM), unfitted FEM such as Unfitted DG (UDG) and CutFEM, mixed FEM in tetrahedral and hexahedral meshes

Dec.19: **Wolters:** Further topics in EEG and MEG forward modeling: Complete electrode model (CEM), Integral equation method, boundary element method (BEM), sensitivity analysis and model error

Jan.9: **Kellinghaus:** Basics of epilepsy and EEG

Jan.16: **Bauer:** Introduction to MRI

Jan.23: **Wolters:** Parametric registration of MRI

Jan.30: **Wolters:** Segmentation of MRI

Structure of the lecture

- The complete electrode model (CEM)
- Integral equation and the boundary element method (BEM)
- Comparing BEM and FEM approaches

The complete electrode model (CEM)

Let Ω be the head domain and e_ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, L$ a set of L electrodes on its exterior boundary $\partial\Omega$ with surface contact area $|e_\ell|$ and potential U_ℓ . The current applied to the ℓ -th electrode is denoted by I_ℓ . For an active (tES) and passive (EEG) electrode, it holds that $|I_\ell| \geq 0$ and $I_\ell = 0$, respectively. Following from the Kirchhoff's law, we assume that the total sum of the currents is zero, i.e., $\sum_{i=1}^L I_\ell = 0$. In other words, we do not take into account small current losses that might exist. Furthermore, the divergence of the total current density $\vec{J}$ in Ω is zero, that is,

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\vec{J}^p - \sigma \nabla u) \quad \text{or} \quad \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = \nabla \cdot \vec{J}^p \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

with u denoting the scalar electric potential field, σ the conductivity distribution of the head and $\vec{J}^p$ the primary current density (neural activity) in the brain. Equation (1) follows from the Maxwell's equations via the quasi-static approximation [28], and it predicts the potential field for both tES and EEG. The right-hand side of (1) is relevant only with respect to the EEG measurements in which $\vec{J}^p$ is to be detected. Namely, the stimulation potential field can be obtained by setting the right-hand side to zero, i.e.,

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0. \quad (2)$$

The complete electrode model (CEM)

In order to solve (1), one can apply the following CEM boundary conditions [7]:

$$0 = \sigma \frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x}), \quad \text{in } \partial\Omega \setminus \cup_{\ell=1}^L e_\ell, \quad (3)$$

$$I_\ell = \int_{e_\ell} \sigma \frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x}) dS, \quad \text{for } \ell = 1, 2, \dots, L, \quad (4)$$

$$U_\ell = u(x) + \tilde{Z}_\ell \sigma \frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x}), \quad \text{for } \ell = 1, 2, \dots, L, \quad \vec{x} \in e_\ell. \quad (5)$$

The first one of these is the assumption that no currents pass the part of the scalp that is not covered by electrodes. The second one states that the total current flux through the ℓ -th electrode equals to the applied current I_ℓ . According to the third one, the ℓ -th electrode voltage U_ℓ is the sum of the skin potential and the skin-electrode potential jump $\tilde{Z}_\ell \sigma \frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x})$ in which $\tilde{Z}_\ell$ (Ohm m²) is a pointwise effective contact impedance (ECI). For simplicity, we assume that ECI is of the form $\tilde{Z}_\ell = Z_\ell |e_\ell|$ with Z_ℓ (Ohm) denoting the average contact impedance (ACI) of the electrode. Consequently, the integral form of (5) can be written as

$$U_\ell = \frac{1}{|e_\ell|} \int_{e_\ell} u dS + Z_\ell I_\ell, \quad (6)$$

The complete electrode model (CEM)

i.e., U_ℓ is the sum of the mean skin potential and the potential jump $Z_\ell I_\ell$. Additionally, the zero potential level is defined as $\sum_{\ell=1}^L U_\ell = 0$. Thus, the potential field $u \in S$ can be approximated by solving the following weak form (Appendix A)

$$\begin{aligned} \text{CEM:} \quad \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dV = & - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{J}^p) v \, dV \\ & + \sum_{\ell=1}^L \frac{I_\ell}{|e_\ell|} \int_{e_\ell} v \, dS \\ & + \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{Z_\ell |e_\ell|^2} \int_{e_\ell} u \, dS \int_{e_\ell} v \, dS \\ & - \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{Z_\ell |e_\ell|} \int_{e_\ell} uv \, dS \quad \text{for all } v \in \mathcal{S} \subset H^1(\Omega) \end{aligned}$$

in which $\mathcal{S}$ is a suitably chosen subspace of $H^1(\Omega)$, i.e., the Sobolev space of square integrable functions with square integrable first-order partial derivatives. In this study, we use the finite element method to discretize Ω . Consequently, $\mathcal{S}$ is assumed to be spanned by continuous finite element basis functions. In the weak form (7) of the CEM, the left-hand side defines a diffusion operator, the first two terms on the right-hand side correspond to neural and stimulation sources, respectively, and the third and fourth term describe the shunting effects: Due to their lower resistance currents tend to flow through the electrodes rather than the skin if the ACI is low enough (Figure 1). The higher the ACI, the weaker are the shunting effects.

The complete electrode model (CEM)

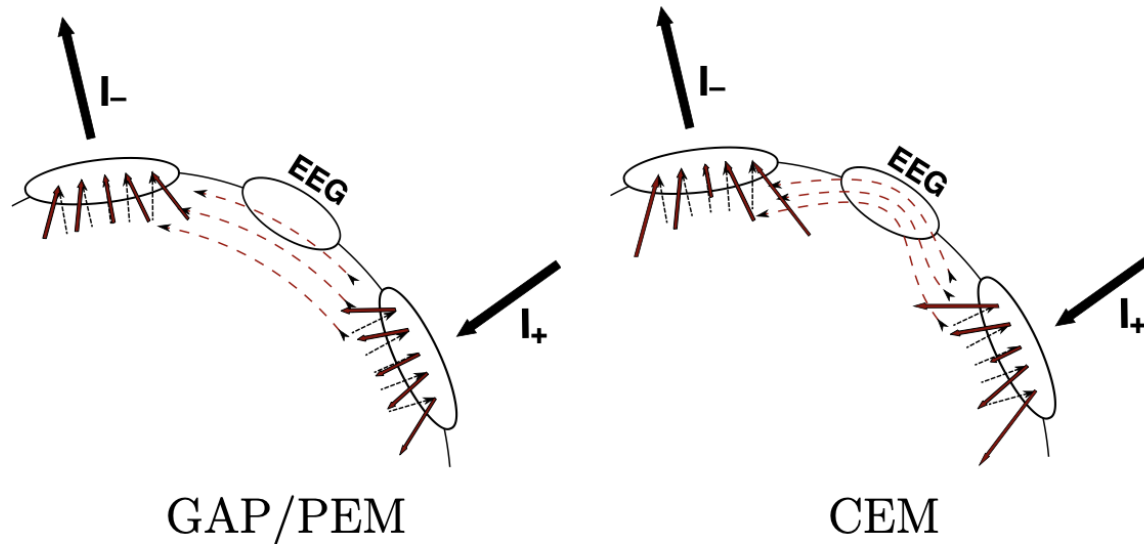


Figure 1. Illustration of expected currents with and without shunting currents.

The gap model (GAP)

In GAP, the second CEM boundary condition (4) is replaced with the following pointwise formula

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n}(\vec{x}) = \frac{I_\ell}{|e_\ell|} \quad \text{for all } \vec{x} \in e_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, L. \quad (8)$$

That is, the normal current density through the skin is assumed to be constant on each electrode (hence shunting effects are not taken into account). Furthermore, the third condition (5) is assumed to hold only in its integral form (6). The resulting weak form is given by (Appendix A)

$$\begin{aligned} \text{GAP:} \quad \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dV = & - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{J}^p) v \, dV \\ & + \sum_{\ell=1}^L \frac{I_\ell}{|e_\ell|} \int_{e_\ell} v \, dS \quad \text{for all } v \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (9)$$

The point electrode model (PEM)

The PEM boundary conditions follow from both the CEM and the GAP, if the support of each electrode tends to one point, i.e., $e_\ell \rightarrow \vec{p}_\ell$ and $|e_\ell| \rightarrow 0$ for $\ell = 1, 2, \dots, L$.

By taking the limit $\frac{1}{|e_\ell|} \int_{e_\ell} f dS \rightarrow f(\vec{p}_\ell)$, the ℓ -th electrode voltage (6) is of the form $U_\ell = u(\vec{p}_\ell) + I_\ell Z_\ell$ and the weak forms (7) and (9) are now given by

$$\begin{aligned} \text{PEM:} \quad \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v dV = & - \int_{\Omega} (\nabla \cdot J^p) v dV \\ & + \sum_{\ell=1}^L I_\ell v(\vec{p}_\ell) \text{ for all } v \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (10)$$

Comparison of CEM, GAP and PEM

Since currents distribute more freely underneath the electrode there is an equalizing effect on the potential underneath the electrode, which leads to a constant potential in the most extreme case (Figure 2).

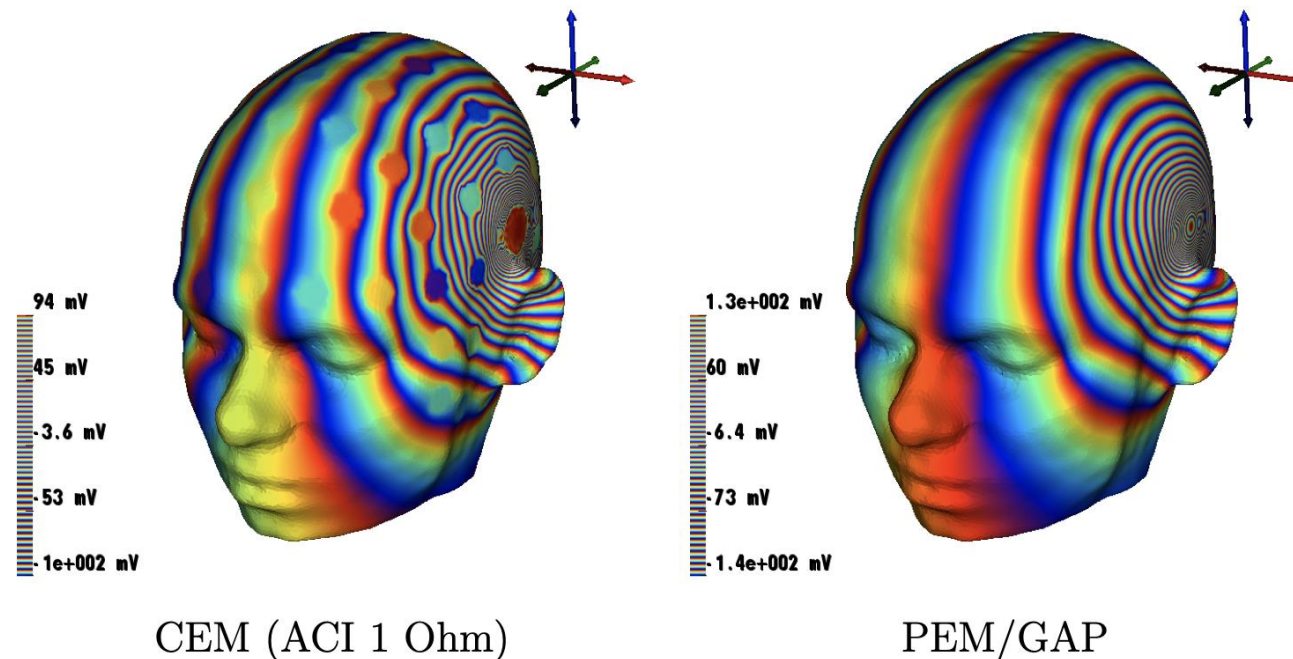


Figure 2. Comparison of potential distributions in combined EEG and tES simulations, using different models. Anode and cathode are placed above the left and right ear. (Note that 1 Ohm is a very low ACI which is used here to illustrate the effects of the CEM. For a more realistic ACI (e.g. 5kOhm) the difference to the GAP is hardly visible.)

Comparison of CEM, GAP and PEM

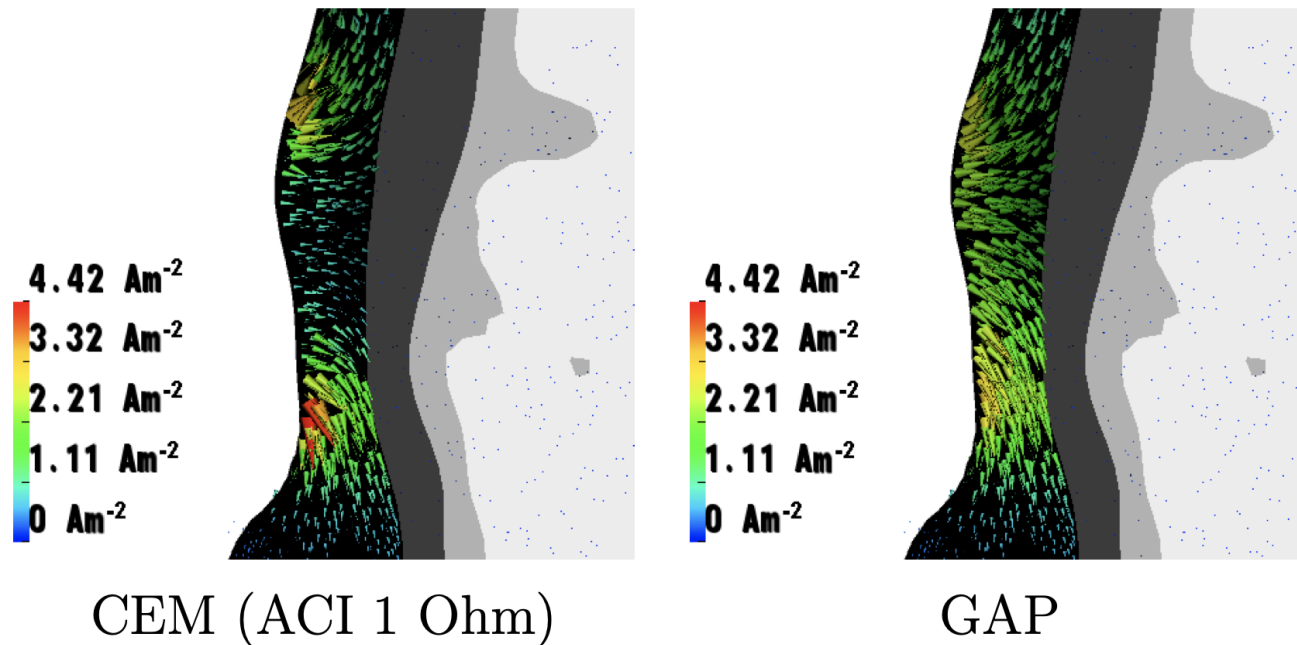


Figure 4. Visualization of the surface current density at the anode. In CEM currents become stronger on the edges due to the shunting effect, i.e., current circulation on the contact surface, which is well visible only for low impedance value (ACI 1 Ohm). In GAP, the normal current density is constant over the contact surface, meaning that the shunting effect is absent.

Comparison of CEM and PEM for EEG source analysis (no injection currents I)

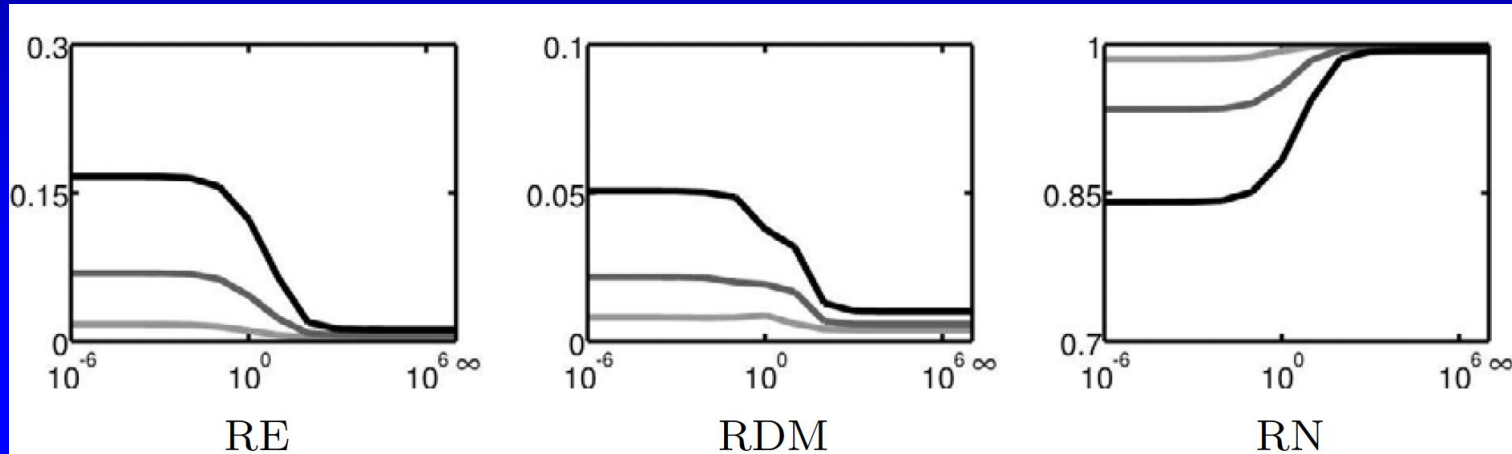


Figure 4. The difference measures RE, RDM and RN between PEM and CEM visualized as a function of the CEM ECI Z, common for all the electrodes. The electrode diameters 6, 12 and 18 mm correspond to light grey, dark grey and black curves, respectively.

Structure of the lecture

- The complete electrode model (CEM)
- Integral equation and the boundary element method (BEM)
- Comparing BEM and FEM approaches

The integral equation method and the boundary element method (BEM)

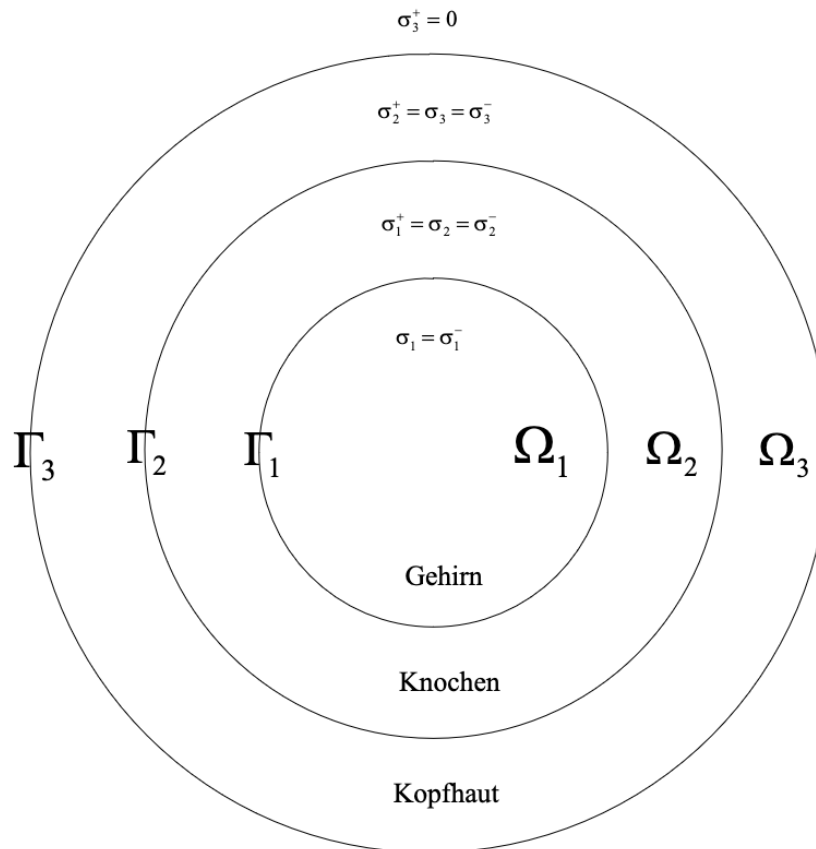


Figure 6.3: *Homogenes und isotropes Dreischalen-Kugelmodell des Kopf-Volumenleiters.*

The integral equation method for the EEG

6.3 Isotropic multicompartment head modeling

Bei Modellierung des Kopfes durch einen schichtweise homogenen, isotropen Leiter kann die Differentialgleichung (6.1) auf analytischem Wege weiter behandelt werden. Als Integralgleichungsmethode bezeichnet man die Überführung einer partiellen Differentialgleichung mit d Raumvariablen in eine Integralgleichung über einer $(d - 1)$ -dimensionalen Oberfläche. Die entstehende Integralgleichung kann dann über die Randelement- oder BE-Methode numerisch gelöst werden. Darauf wird in Kapitel 6.4 eingegangen.

Im Folgenden werden wir im Mehrschalen- oder Mehrschichtmodell den Kopf als schichtweise homogenen Leiter beschreiben. Wenn man zunächst von den Gewebeleitfähigkeits-Anisotropien der weissen Substanz und den Leitfähigkeits-Inhomogenitäten des Schädels absieht, trifft dies in erster Näherung zu. Als Schichten bieten sich Hirn, Liquor, Knochen und Kopfhaut an. Im Dreischichtmodell wird auf den Liquor verzichtet (Abbildung 6.3). Die i -te Schicht Ω_i wird von der inneren Oberfläche Γ_{i-1} und der äußeren Oberfläche Γ_i begrenzt. Das Hirn besitzt nur eine äußere Grenzfläche Γ_1 (Cortexoberfläche). Die Leitfähigkeit σ_i jeder einzelnen Schicht wird häufig in erster Näherung als konstant angenommen (Tabelle 3.1). Im weiteren werden die Bezeichnungen $\sigma_{i-1}^+ = \sigma_i = \sigma_i^-$ verwendet.

The integral equation method for the EEG

6.3.1 Das elektrische Potential im isotropen Mehrschalenmodell

Die im schwachen Sinne zu verstehende partielle Differentialgleichung (6.1) mit Neumann-Randbedingungen (6.2) soll im weiteren über die Integralgleichungsmethode in eine Randintegralgleichung überführt werden. Es gelten die folgenden physikalisch sinnvollen Voraussetzungen:

- Das Potential ist stetig im betrachteten Gebiet:

$$\Phi \in C(\Omega) \quad (6.52)$$

- Die Normalkomponente der Volumenstromdichte ist stetig über die Grenzflächen:

$$\sigma < \mathbf{n}, \nabla \Phi > \in C(\Gamma_i) \quad (6.53)$$

- Das Potential ist zweifach stetig differenzierbar innerhalb der Schichten:

$$\Phi \in C^2(\overline{\Omega_i}) \quad \forall i = 1, \dots, p$$

- Die Grenzflächen Γ_i sind genügend glatt und ohne Ecken.

Für die Herleitung der Integralgleichung benötigt man die sogenannte Singularitätenfunktion, welche für das vorliegende Problem speziell als

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

gewählt wird (Hackbusch [119] (2.2.1a)).

The integral equation method for the EEG

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, die Differentialgleichung (6.1) in eine Integralgleichung zu überführen. Im weiteren wird die Herleitung über das sogenannte Doppelschichtpotential gewählt (siehe Hackbusch [120]), welches die Normalableitung der Singularitätenfunktion nach dem zweiten Argument $\mathbf{y}$ benutzt. Man betrachte zunächst das Einschichtmodell mit Γ als Oberfläche. Als Dipolkern bezeichnet man die Funktion

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := 2 \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{y}}} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2 \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_{\mathbf{y}} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma.$$

The integral equation method for the EEG

Der mit dem Dipolkern k gebildete Integraloperator sei mit K bezeichnet und lautet

$$(K\Phi)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Für die speziell gewählte Singularitätenfunktion ergibt sich als Kern

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma, \quad (6.54)$$

und als Integraloperator

$$(K\Phi)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (6.55)$$

The integral equation method for the EEG

Theorem 6.3.3. *Sei $\Phi \in L^\infty(\Gamma)$ beschränkt und im Punkt $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ stetig, dann gilt*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\Gamma} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} = -\Phi(\mathbf{x}_0) + (K\Phi)(\mathbf{x}_0)$$

Beweis: Vladimirov [338, p.302], see also [266; 126]

Theorem 6.3.4 (2. Greensche Formel). *Ω sei Normalgebiet, u und v seien mit ihren zweiten partiellen Ableitungen in Ω stetig und $\mathbf{n}$ sei die äußere Normale an Γ . Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [u(\mathbf{x}) \Delta v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{x})] d\Omega = \\ \int_{\Gamma} [u(\mathbf{x}) \langle \mathbf{n}, \nabla v(\mathbf{x}) \rangle - v(\mathbf{x}) \langle \mathbf{n}, \nabla u(\mathbf{x}) \rangle] d\Gamma. \end{aligned}$$

The integral equation method for the EEG

Es soll nun die Integralgleichung für das gesuchte Potential Φ hergeleitet werden.

Sei zunächst $\mathbf{x} \in \Omega_i, (i \in \{1, \dots, p\})$. In Ω_i ist die Singularitätenfunktion s im Punkte $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ nicht differenzierbar. Man definiere deshalb

$$K_\varepsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathcal{R}^3 : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon\},$$

wobei ε so klein gewählt wird, daß $\overline{K_\varepsilon} \subset \Omega_i$. Auf den Schichten $\Omega_j \setminus K_\varepsilon(\mathbf{x})$ ($\forall j = 1, \dots, p$) ist die Singularitätenfunktion s nun zweimal stetig differenzierbar und die zweite Greensche Formel kann angewendet werden.

Man beachte, daß $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ die äußere Normale auf Γ_j bezeichnet. Bei Anwendung der 2. Greenschen Formel auf das Gebiet Ω_j mit innerer Berandung Γ_{j-1} und äußerer Berandung Γ_j erhält man somit zwei Oberflächenintegrale und das Integral über Γ_{j-1} erhält ein negatives Vorzeichen. Auf Ω_i ergibt sich das zusätzliche Oberflächenintegral über ∂K_ε , welches ebenfalls ein negatives Vorzeichen besitzt. σ_p^+ bezeichnet die Leitfähigkeit außerhalb des Kopfes und kann deshalb gleich 0 gesetzt werden. Die Indizes $-$ und $+$ kennzeichnen Werte innerhalb bzw. außerhalb der jeweiligen Grenzsicht.

The integral equation method for the EEG

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^p \int_{\Omega_j \setminus K_\varepsilon(\mathbf{x})} [s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma_j \Delta \Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{y}) \sigma_j \Delta_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y})] d\Omega_y = \\
 & \sum_{j=1}^p \int_{\Gamma_j} [\sigma_j^- (< \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^-(\mathbf{y}) > s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \Phi^-(\mathbf{y})) - \\
 & \sigma_j^+ (< \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^+(\mathbf{y}) > s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \Phi^+(\mathbf{y}))] d\Gamma_y \\
 & - \int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{x})} \sigma_i (< \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi(\mathbf{y}) > s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \Phi(\mathbf{y})) d\Gamma_y \quad (6.56)
 \end{aligned}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung fällt der zweite Summand des Integranden wegen $\Delta_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$ im Gebiet $\Omega \setminus K_\varepsilon(\mathbf{x})$ (siehe dazu [218, p.33]) direkt weg.

The integral equation method for the EEG

Nun wird das Oberflächenintegral über $\partial K_\varepsilon(\mathbf{x})$ für ε gegen Null bestimmt. Die Stromdichte $\sigma_i < \mathbf{n}, \nabla \Phi >$ ist auf ∂K_ε beschränkt und mit

$$\int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{x})} d\Gamma_y = 4\pi\varepsilon^2$$

strebt $\int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{x})} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_y$ mit der Ordnung $O(\varepsilon)$ gegen 0. Damit gilt

$$\int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{x})} \sigma_i < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi(\mathbf{y}) > s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_y \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Da K_ε eine Kugel ist, ist die Normalenrichtung radial und unter Verwendung von Polarkoordinaten mit Zentrum in $\mathbf{x}$ und $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \varepsilon$ wird $\frac{\partial s}{\partial n}$ zu $\frac{\partial s}{\partial r}$. Man erhält $< \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon^2}$. Damit läßt sich der zweite Teil berechnen:

$$\int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{x})} \sigma_i < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_y = -\sigma_i \Phi(\mathbf{x}).$$

The integral equation method for the EEG

Es folgt

$$\int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{x})} \sigma_i (< \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi(\mathbf{y}) > s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \Phi(\mathbf{y})) d\Gamma_y \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_i \Phi(\mathbf{x})$$

Aus Gleichung (56) wird nach Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sigma_i \Phi(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \int_{\Omega_j} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma_j \Delta \Phi(\mathbf{y}) d\Omega_y = \\ \sum_{j=1}^p \int_{\Gamma_j} [\sigma_j^- (< \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^-(\mathbf{y}) > s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \Phi^-(\mathbf{y})) \\ - \sigma_j^+ (< \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^+(\mathbf{y}) > s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \Phi^+(\mathbf{y}))] d\Gamma_y. \end{aligned}$$

Da das Potential nach Voraussetzung (52) stetig ist, gilt $\Phi^- = \Phi^+$. Aus der Voraussetzung (53) und der Neumann-Randbedingung ($\sigma_p^+ = 0$) folgt

$$\sigma_j^- < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^-(\mathbf{y}) > = \sigma_j^+ < \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^+(\mathbf{y}) > .$$

The integral equation method for the EEG

Wird nun noch auf der linken Seite der Gleichung die Differentialgleichung (6.1) eingesetzt und unter Zuhilfenahme der Berechnungen aus Kapitel 6.1.2 (siehe insbesondere die Berechnungen von Gleichung (6.7) bis (6.8)), dann erhält man eine Integralgleichung für das Potential Φ für $\mathbf{x} \notin \Gamma_j$ ($\forall j = 1, \dots, p$)

$$\sigma_i \Phi(\mathbf{x}) = \Phi^\infty(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_j \quad (6.57)$$

mit

$$\Phi^\infty(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J_p(\mathbf{y}) d\Omega_y.$$

The integral equation method for the EEG

Um die Integralgleichung für das Potential auf den Schichtgrenzen Γ_i zu erhalten, läßt man $\mathbf{x}$ gegen die Oberfläche Γ_i laufen und unter Verwendung von Satz 6.3.3 erhält man für $\mathbf{x} \in \Gamma_i$ die Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art für das Potential Φ unter Verwendung des Doppelschichtpotentials:

$$(\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi(\mathbf{x}) = 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_j \quad (6.58)$$

Die Randintegralgleichung (58) wird in Kapitel 6.4 numerisch gelöst. Galerkin- und Kollokationsverfahren verwenden Ansatzräume mit Funktionen, für die sich Basisfunktionen mit kleinem Träger als vorteilhaft erwiesen haben. Solche Basisfunktionen heißen finite Elemente, die Kombination der Randintegralmethode mit der Diskretisierung durch finite Elemente bezeichnet man als Randelementmethode.

The integral equation method for the MEG

6.3.2 Die magnetische Induktion im isotropen Mehrschalenmodell

Modelliert man den Volumenleiter über das Mehrschichtmodell und ist die Potentialverteilung nur auf den Grenzschichten bekannt (Lösung des direkten Problems über die BE-Methode), kann die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ für einen Punkt $\mathbf{x}$ außerhalb des Volumenleiters wie im folgenden beschrieben berechnet werden. Startpunkt ist das Gesetz von Biot-Savart ([218, p.169])

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \times \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}.$$

Mit Gleichung

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^p + \sigma \mathbf{E}$$

(siehe (3.12)) und $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ wird aus dieser Gleichung

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^p \sigma_j \int_{\Omega_j} \nabla\Phi(\mathbf{y}) \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}$$

mit

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{j}^p(\mathbf{y}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y}.$$

The integral equation method for the MEG

Nach Bronstein ([37, p.574]) gilt

$$\nabla\Phi(\mathbf{y}) \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \nabla \times \left(\Phi(\mathbf{y}) \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) \quad (6.59)$$

und für ein im Gebiet G mit geschlossener Berandung Γ stetiges Vektorfeld $\mathbf{u}$ mit stetigen beschränkten ersten partiellen Ableitungen die Folgerung des Gaußschen Satzes (Bronstein [37], S.579)

$$\int_G \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = - \int_\Gamma \mathbf{u}(\mathbf{y}) \times \mathbf{n}(\mathbf{y}) d\Gamma. \quad (6.60)$$

Mit $\mathbf{n}$ sei wieder die äußere Normale der Oberfläche Γ bezeichnet. Das Vektorfeld $\Phi(\mathbf{y}) \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ ist für $\mathbf{x} \notin \Omega$ im ganzen Gebiet genügend glatt und beschränkt, so daß

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p \sigma_j \int_{\Omega_j} \nabla\Phi(\mathbf{y}) \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\mathbf{y} \stackrel{(59),(60)}{=} \\ & - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} \Phi(\mathbf{y}) \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \times \mathbf{n}_j(\mathbf{y}) d\Gamma_y \end{aligned}$$

gilt. Zur Berechnung der magnetischen Induktion erhält man die Formel von Geselowitz [101]

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} \Phi(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} \times \mathbf{n}_j(\mathbf{y}) d\Gamma_y. \quad (6.61)$$

The boundary element method (BEM)

6.4.2 p -Schichtmodell

Zur numerischen Berechnung des Potentials Φ werden p Grenzflächen in Dreiecke zerlegt. Die Eckpunkte der Dreiecke auf der l -ten Grenzfläche ($1 \leq l \leq p$) seien mit $\mathbf{x}_m^l$ bezeichnet ($1 \leq m \leq N(l)$). $\mathbf{c}_m^l$ sei das Massenzentrum des Dreiecks $\triangle_m^l$ der l -ten Schicht ($1 \leq m \leq M(l)$). Nach der Wahl der Kollokationspunkte ξ_m^l ($1 \leq m \leq k(l)$) und der Basis h_n^l ($1 \leq n \leq k(l)$) besteht die numerische Aufgabe in der Bestimmung der Koeffizienten α_n^l der Darstellung

$$\Phi_k^p = \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{k(l)} \alpha_n^l h_n^l.$$

Die Kollokationsgleichung für das p -Schichtmodell lautet ($1 \leq i \leq p; 1 \leq m \leq k(i)$)

$$\begin{aligned} & (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{k(l)} \alpha_n^l h_n^l(\xi_m^i) \\ &= 2\Phi^\infty(\xi_m^i) - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\xi_m^i, \mathbf{y}) \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{k(l)} \alpha_n^l h_n^l(\mathbf{y}) d\Gamma_y. \end{aligned}$$

The boundary element method (BEM)

Kollokation mit stückweise konstanter Interpolation

Beim Ansatz mit konstanten Basisfunktionen

$$h_n^l(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & : \mathbf{x} \in \Delta_n^l \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (6.98)$$

wählt man als Kollokationspunkte wieder die Massenzentren der Dreiecke.

Es ergibt sich die Kollokationsgleichung ($1 \leq i \leq p; 1 \leq m \leq M(i)$)

$$\alpha_m^i = \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Phi^\infty(\mathbf{c}_m^i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \int_{\Gamma_j} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i|^3} \sum_{n=1}^{M(l)} \alpha_n^j h_n^j(\mathbf{y}) d\Gamma_y.$$

The boundary element method (BEM)

Nach der Zerlegung der Grenzsichten in Dreiecke erhält man daraus

$$\begin{aligned}
 \alpha_m^i &= \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Phi^\infty(\mathbf{c}_m^i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \sum_{r=1}^{M(j)} \int_{\Delta_r^j} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i|^3} \sum_{n=1}^{M(l)} \alpha_n^j h_n^j(\mathbf{y}) d\Gamma_y \\
 &= \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Phi^\infty(\mathbf{c}_m^i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \sum_{r=1}^{M(j)} \int_{\Delta_r^j} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i|^3} d\Gamma_y \alpha_r^j \\
 &\stackrel{(73)}{=} \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Phi^\infty(\mathbf{c}_m^i) + \sum_{j=1}^p \sum_{r=1}^{M(j)} \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Omega(\Delta_r^j; \mathbf{c}_m^i) \alpha_r^j \\
 &=: b_m^i + \sum_{j=1}^p \sum_{r=1}^{M(j)} B_{mr}^{ij} \alpha_r^j.
 \end{aligned}$$

Durch das Lösen dieser Fixpunktgleichung $a = Ba + b$ werden die Potentialwerte in den Massenzentren bestimmt.

Wird der Primärstromanteil Φ^∞ mit $\mathbf{j}_p = \mathbf{M} \delta_{\mathbf{x}_0}$ ausgewertet, so erhält man

$$\Phi^\infty(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}. \quad (6.102)$$

Structure of the lecture

- The complete electrode model (CEM)
- Integral equation and the boundary element method (BEM)
- Comparing BEM and FEM approaches

Biomed Tech 2012; 57 (Suppl. 1) © 2012 by Walter de Gruyter · Berlin · Boston. DOI 10.1515/bmt-2012-4152

Comparison of Boundary Element and Finite Element Approaches to the EEG Forward Problem

J. Vorwerk¹, M. Clerc², M. Burger³, C.H. Wolters¹
j.vorwerk@uni-muenster.de

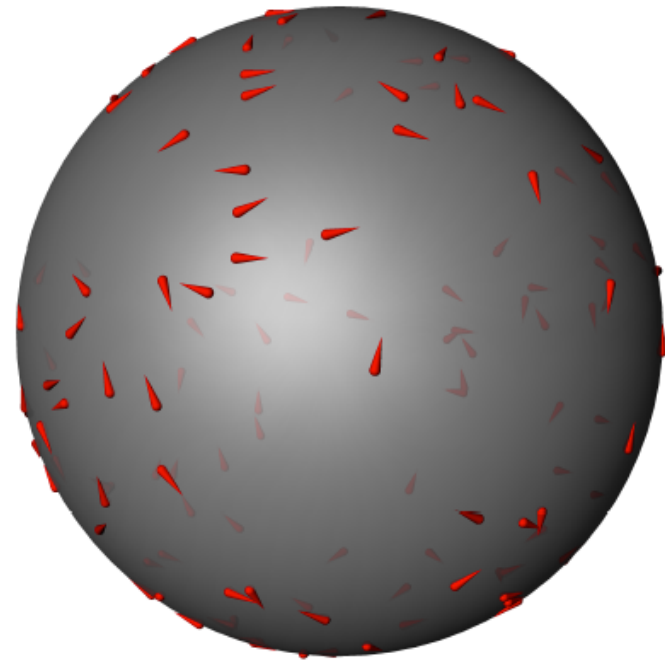
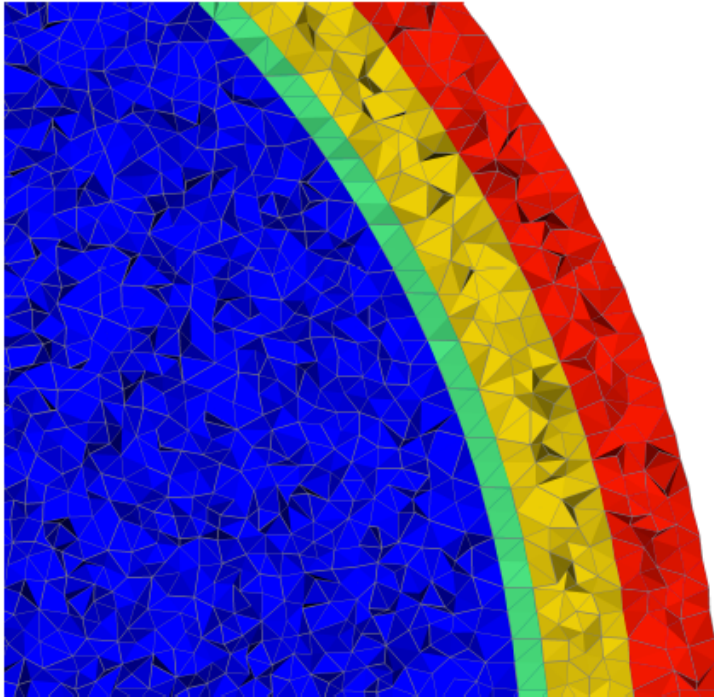
¹ Institute for Biomagnetism and Biosignalanalysis, University of Münster, 48149, Münster, Germany

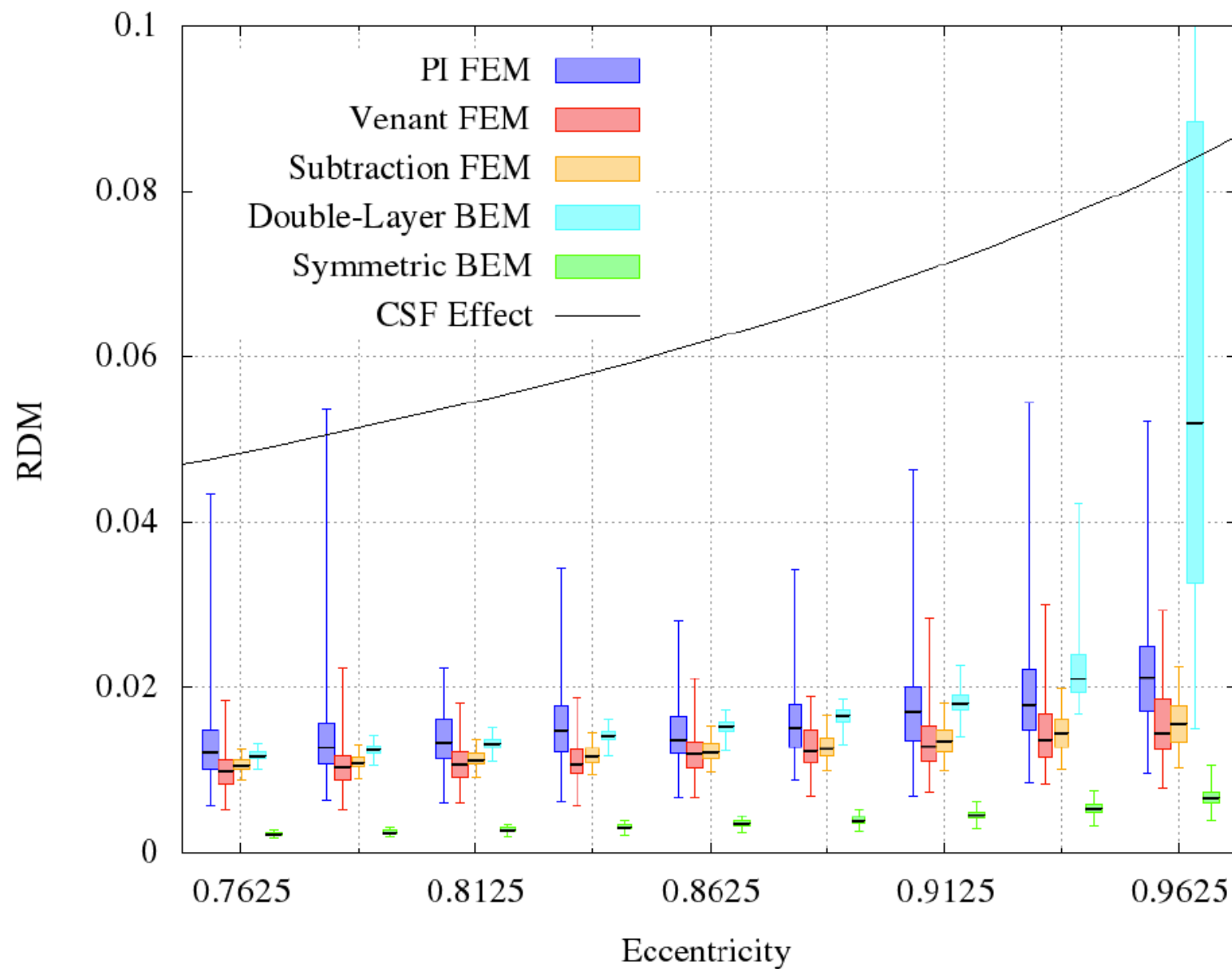
² Inria Sophia-Antipolis—Méditerranée, 06904, Sophia-Antipolis Cedex, France

³ Institute for Computational and Applied Mathematics, University of Münster, 48149, Münster, Germany

Experimental Setup, Sources

- ▶ Four layer tetrahedral sphere models (skin, skull, CSF, brain)
- ▶ 125 dipoles distributed randomly at different radii with tangential direction





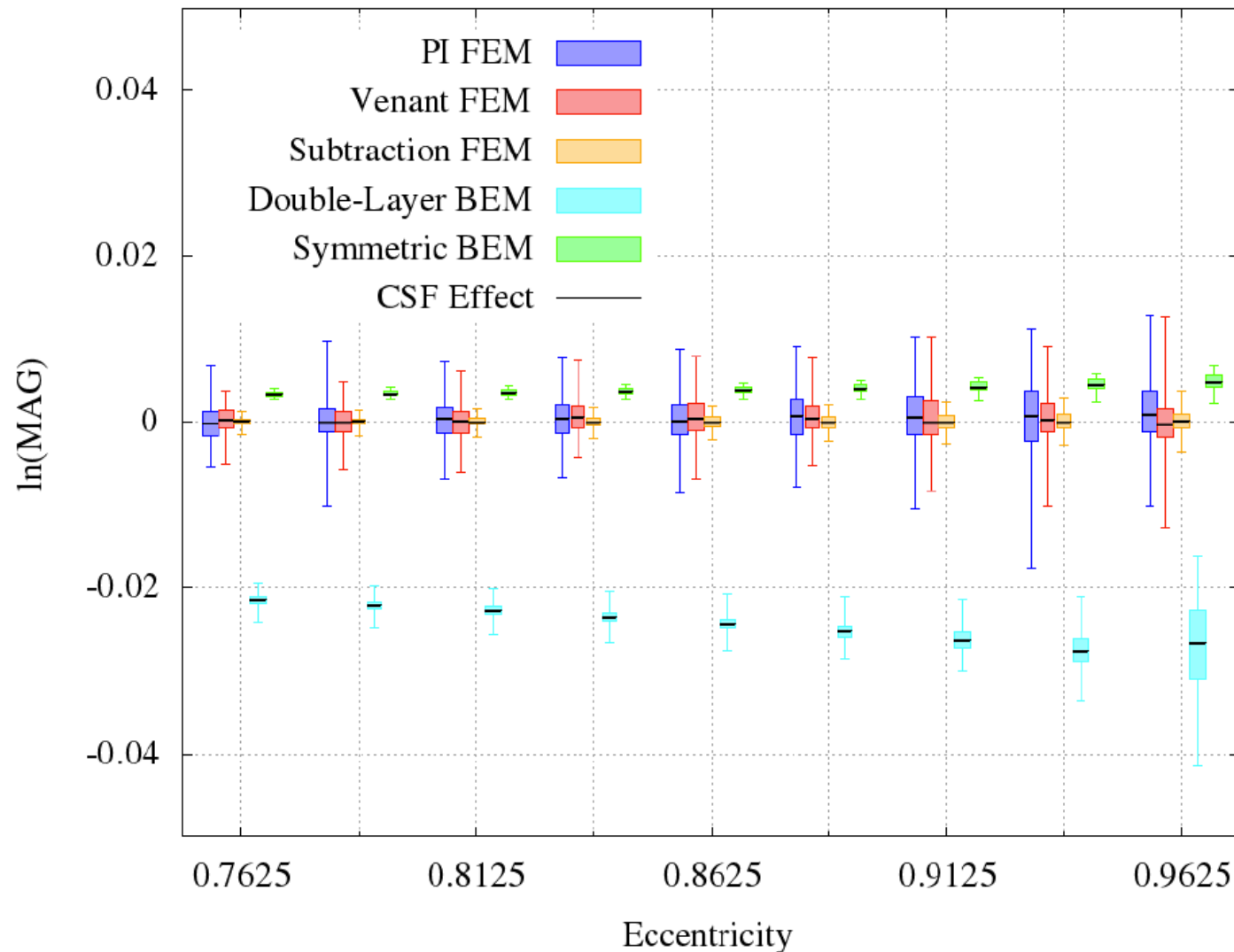


Figure 1: RDM and $\ln(\text{MAG})$ for tangential dipoles in a three layer sphere model. CSF effect is out of range in the

Thank you for your attention!



SIM-NEURO work-group at IBB

