

# Kapitel 5

## Randelementmethode

Bei Modellierung des Kopfes durch einen schichtweise homogenen, isotropen Leiter kann die Differentialgleichung (4.1) auf analytischem Wege weiter behandelt werden. Als Integralgleichungsmethode bezeichnet man die Überführung einer partiellen Differentialgleichung mit  $d$  Raumvariablen in eine Integralgleichung über einer  $(d-1)$ -dimensionalen Oberfläche. Die entstehende Integralgleichung kann dann über die Randelement- oder BE-Methode numerisch gelöst werden.

### 5.1 Integralgleichungsmethode

Die im schwachen Sinne zu verstehende partielle Differentialgleichung (4.1) mit Neumann-Randbedingungen (4.3) soll im weiteren über die Integralgleichungsmethode in eine Randintegralgleichung überführt werden. Es gelten die folgenden physikalisch sinnvollen Voraussetzungen:

- Das Potential ist stetig im betrachteten Gebiet:

$$\Phi \in C(\Omega) \tag{5.1}$$

- Die Normalkomponente der Volumenstromdichte ist stetig über die Grenzflächen:

$$\sigma < \mathbf{n}, \nabla \Phi > \in C(\Gamma_i) \tag{5.2}$$

- Das Potential ist zweifach stetig differenzierbar innerhalb der Schichten:

$$\Phi \in C^2(\overline{\Omega}_i) \quad \forall i = 1, \dots, p$$

- Die Grenzflächen  $\Gamma_i$  sind genügend glatt und ohne Ecken.

Für die Herleitung der Integralgleichung benötigt man die sogenannte Singularitätenfunktion, welche für das vorliegende Problem speziell als

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

gewählt wird (Hackbusch [17] (2.2.1a)).

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, die Differentialgleichung (4.1) in eine Integralgleichung zu überführen. Im weiteren wird die Herleitung über das sogenannte Doppelschichtpotential gewählt (siehe Hackbusch [18]), welches die Normalableitung der Singularitätenfunktion nach dem zweiten Argument  $\mathbf{y}$  benutzt. Man betrachte zunächst das

Einschichtmodell mit  $\Gamma$  als Oberfläche.

Als Dipolkern bezeichnet man die Funktion

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := 2 \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{y}}} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2 \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_{\mathbf{y}} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma.$$

Der mit dem Dipolkern  $k$  gebildete Integraloperator sei mit  $K$  bezeichnet und lautet

$$(K\Phi)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Für die speziell gewählte Singularitätenfunktion ergibt sich als Kern

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma, \quad (5.3)$$

und als Integraloperator

$$(K\Phi)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (5.4)$$

Der Integrand des Integraloperators besitzt in  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  eine starke Singularität, die Existenz dieses Integrals ist somit zu zeigen.

**Lemma 5.1.1** *Sei  $\Gamma \in C^{1+\mu}$  für ein  $\mu > 0$  und  $\Phi \in L^{\infty}(\Gamma)$  beschränkt. Dann existiert das Integral (4) für alle  $\mathbf{x} \in \Gamma$  als uneigentliches Integral.*

**Beweis:** Hackbusch [18] Lemma 8.2.2

Damit ist  $(K\Phi)(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in \Gamma$  definiert. Für  $\mathbf{x}$  außerhalb von  $\Gamma$  ist der Integrand regulär. Im weiteren kann gezeigt werden:

**Satz 5.1.1 (Kompaktheit)** *Sei  $0 < \mu < 1$ . Unter der Voraussetzung  $\Gamma \in C^{1+\mu}$  gilt:*

- (a)  $K \in L(L^{\infty}(\Gamma), C(\Gamma))$
- (b)  $K \in K(C(\Gamma), C(\Gamma))$

**Beweis:** Hackbusch [18] Satz 8.2.5

**Satz 5.1.2** *Sei  $\Phi \in L^{\infty}(\Gamma)$  beschränkt und im Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$  stetig, dann gilt*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_{\Gamma} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} = -\Phi(\mathbf{x}_0) + (K\Phi)(\mathbf{x}_0)$$

**Beweis:** Hämäläinen [21]

Nach Bronstein [6] gilt

**Satz 5.1.3 (2. Greensche Formel)**  *$\Omega$  sei Normalgebiet,  $u$  und  $v$  seien mit ihren zweiten partiellen Ableitungen in  $\Omega$  stetig und  $\mathbf{n}$  sei die äußere Normale an  $\Gamma$ . Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [u(\mathbf{x}) \Delta v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{x})] d\Omega = \\ \int_{\Gamma} [u(\mathbf{x}) \langle \mathbf{n}, \nabla v(\mathbf{x}) \rangle - v(\mathbf{x}) \langle \mathbf{n}, \nabla u(\mathbf{x}) \rangle] d\Gamma. \end{aligned}$$

Es soll nun die Integralgleichung für das gesuchte Potential  $\Phi$  hergeleitet werden.

Sei zunächst  $\mathbf{x} \in \Omega_i, (i \in \{1, \dots, p\})$ . In  $\Omega_i$  ist die Singularitätenfunktion  $s$  im Punkte  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  nicht differenzierbar. Man definiere deshalb

$$K_\epsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathcal{R}^3 : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \epsilon\},$$

wobei  $\epsilon$  so klein gewählt wird, daß  $\overline{K_\epsilon} \subset \Omega_i$ . Auf den Schichten  $\Omega_j \setminus K_\epsilon(\mathbf{x})$  ( $\forall j = 1, \dots, p$ ) ist die Singularitätenfunktion  $s$  nun zweimal stetig differenzierbar und die zweite Green'sche Formel kann angewendet werden.

Man beachte, daß  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  die äußere Normale auf  $\Gamma_j$  bezeichnet. Bei Anwendung der 2. Green'schen Formel auf das Gebiet  $\Omega_j$  mit innerer Berandung  $\Gamma_{j-1}$  und äußerer Berandung  $\Gamma_j$  erhält man somit zwei Oberflächenintegrale und das Integral über  $\Gamma_{j-1}$  erhält ein negatives Vorzeichen. Auf  $\Omega_i$  ergibt sich das zusätzliche Oberflächenintegral über  $\partial K_\epsilon$ , welches ebenfalls ein negatives Vorzeichen besitzt.  $\sigma_p^+$  bezeichnet die Leitfähigkeit außerhalb des Kopfes und kann deshalb gleich 0 gesetzt werden. Die Indizes  $-$  und  $+$  kennzeichnen Werte innerhalb bzw. außerhalb der jeweiligen Grenzschicht.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \int_{\Omega_j \setminus K_\epsilon(\mathbf{x})} [s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma_j \Delta \Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{y}) \sigma_j \Delta_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y})] d\Omega_y = \\ \sum_{j=1}^p \int_{\Gamma_j} [\sigma_j^- (\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^-(\mathbf{y}) \rangle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \Phi^-(\mathbf{y})) - \\ \sigma_j^+ (\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^+(\mathbf{y}) \rangle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \Phi^+(\mathbf{y}))] d\Gamma_y \\ - \int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} \sigma_i (\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi(\mathbf{y}) \rangle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \Phi(\mathbf{y})) d\Gamma_y \quad (5.5) \end{aligned}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung fällt der zweite Summand des Integranden wegen  $\Delta_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  im Gebiet  $\Omega \setminus K_\epsilon(\mathbf{x})$  direkt weg.

Nun wird das Oberflächenintegral über  $\partial K_\epsilon(\mathbf{x})$  für  $\epsilon$  gegen Null bestimmt. Die Stromdichte  $\sigma_i \langle \mathbf{n}, \nabla \Phi \rangle$  ist auf  $\partial K_\epsilon$  beschränkt und mit

$$\int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} d\Gamma_y = 4\pi\epsilon^2$$

strebt  $\int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_y$  mit der Ordnung  $O(\epsilon)$  gegen 0. Damit gilt

$$\int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} \sigma_i \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi(\mathbf{y}) \rangle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_y \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Da  $K_\epsilon$  eine Kugel ist, ist die Normalenrichtung radial und unter Verwendung von Polarkoordinaten mit Zentrum in  $\mathbf{x}$  und  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \epsilon$  wird  $\frac{\partial s}{\partial n}$  zu  $\frac{\partial s}{\partial r}$ . Man erhält  $\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon^2}$ . Damit läßt sich der zweite Teil berechnen:

$$\int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} \sigma_i \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_y = -\sigma_i \Phi(\mathbf{x}).$$

Es folgt

$$\int_{\partial K_\epsilon(\mathbf{x})} \sigma_i (\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi(\mathbf{y}) \rangle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \Phi(\mathbf{y})) d\Gamma_y \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \sigma_i \Phi(\mathbf{x})$$

Aus Gleichung (5) wird nach Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sigma_i \Phi(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \int_{\Omega_j} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma_j \Delta \Phi(\mathbf{y}) d\Omega_y = \\ \sum_{j=1}^p \int_{\Gamma_j} [\sigma_j^- (\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^-(\mathbf{y}) \rangle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \Phi^-(\mathbf{y})) \\ - \sigma_j^+ (\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^+(\mathbf{y}) \rangle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla_y s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \Phi^+(\mathbf{y}))] d\Gamma_y. \end{aligned}$$

Da das Potential nach Voraussetzung (1) stetig ist, gilt  $\Phi^- = \Phi^+$ . Aus der Voraussetzung (2) und der Neumann-Randbedingung ( $\sigma_p^+ = 0$ ) folgt

$$\sigma_j^- \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^-(\mathbf{y}) \rangle = \sigma_j^+ \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \nabla \Phi^+(\mathbf{y}) \rangle.$$

Wird nun noch auf der linken Seite der Gleichung die Differentialgleichung (4.1) eingesetzt, dann erhält man eine Integralgleichung für das Potential  $\Phi$  für  $\mathbf{x} \notin \Gamma_j$  ( $\forall j = 1, \dots, p$ )

$$\sigma_i \Phi(\mathbf{x}) = \Phi^\infty(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_j \quad (5.6)$$

mit

$$\Phi^\infty(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J_p(\mathbf{y}) d\Omega_y.$$

Um die Integralgleichung für das Potential auf den Schichtgrenzen  $\Gamma_i$  zu erhalten, läßt man  $\mathbf{x}$  gegen die Oberfläche  $\Gamma_i$  laufen und unter Verwendung von Satz 5.1.2 erhält man für  $\mathbf{x} \in \Gamma_i$  die Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art für das Potential  $\Phi$  unter Verwendung des Doppelschichtpotentials:

$$(\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi(\mathbf{x}) = 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_j \quad (5.7)$$

Die Randintegralgleichung (7) soll nun numerisch gelöst werden. Galerkin- und Kollokationsverfahren verwenden Ansatzräume mit Funktionen, für die sich Basisfunktionen mit kleinem Träger als vorteilhaft erwiesen haben. Solche Basisfunktionen heißen finite Elemente, die Kombination der Randintegralmethode mit der Diskretisierung durch finite Elemente bezeichnet man als Randelementmethode.

## 5.2 Das Einschichtmodell

Zunächst wird das Einschichtmodell betrachtet:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{2}{\sigma} \Phi^\infty(\mathbf{x}) - (K\Phi)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (5.8)$$

Da die Quellen im Innenraum von  $\Omega$  liegen, ist es eine sinnvolle Annahme,  $\Phi^\infty(\Gamma)$  als stetige, beschränkte und mehrfach differenzierbare Funktion auf dem Rand anzusehen. Für kompakte Gebiete gilt  $C^1(\Gamma) \subset C_L(\Gamma) \subset C^\lambda(\Gamma)$  (Hackbusch [18], S.16/17). Die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung dieser Gleichung wird somit durch die folgenden Sätze gesichert.

**Satz 5.2.1 (Eindeutigkeit)** Sei  $\Phi^\infty \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $\Gamma \in C_0^{1+\mu}$  für ein  $\mu > 1/2$ . Dann unterscheiden sich zwei Lösungen der Gleichung (8) nur um eine Konstante.

**Beweis:** (Hackbusch [18], Anmerkung S.327 und Satz 8.2.18)

**Lemma 5.2.1** Um die Aufgabe (8) eindeutig zu machen, kann die Zusatzbedingung

$$\int_{\Gamma} \Phi d\Gamma = 0 \quad (5.9)$$

an das gesuchte Potential gestellt werden.

**Beweis:** (Hackbusch [18], Anmerkung S.327 und Zusatz 8.2.20)

**Satz 5.2.2 (Lösbarkeit)** Sei  $\Phi^\infty \in C^\lambda(\Gamma)$ ,  $\Gamma \in C_0^{1+\mu}$  für ein  $0 \leq \mu \leq 1$ . Dann hat die Gleichung (8) in Kombination mit (9) für das Innenraumproblem eine eindeutige Lösung  $\Phi \in C(\Gamma)$ , die zudem zu  $C^\lambda(\Gamma)$  gehört.

**Beweis:** (Hackbusch [18] Anmerkung S.327 und Satz 8.2.21)

Da das Potential auf den Grenzflächen stetig ist, sei im folgenden  $X = C(\Gamma)$  der zugrundeliegende Banachraum. Für die numerische Berechnung des Potentials  $\Phi$  auf dem Rand  $\Gamma$  wird die Kollokationsmethode gewählt. Die Interpolation wird durch disjunkte Stützstellen

$$\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \subset \Gamma$$

festgelegt.  $X_k \subset X$  sei der Unterraum, in dem die interpolierenden Funktionen (Ansatzfunktionen) liegen sollen. Für die numerische Realisierung ist die geeignete Repräsentierung von  $X_k$  durch eine Basis  $h_1, \dots, h_k$  mit

$$X_k = \text{span}\{h_1, \dots, h_k\}$$

von entscheidender Bedeutung. Die Interpolation einer Funktion  $\Phi \in X$  durch  $\Phi_k \in X_k$  mit

$$\Phi_k(\xi_m) = \Phi(\xi_m) \quad \forall 1 \leq m \leq k \quad (5.10)$$

existiert und ist eindeutig, wenn die Matrix  $(h_n(\xi_m))_{m,n=1,\dots,k}$  regulär ist. Unter dieser Voraussetzung definiert die Interpolation die Projektion

$$\Pi_k : \Phi \in X \rightarrow \Phi_k \in X_k.$$

Indem nun die Kollokationspunkte in die auf  $X_k$  projizierte Integralgleichung eingesetzt werden, erhält man die Kollokationsgleichung

$$(-1)\Phi_k(\xi_m) = -\frac{2}{\sigma}\Phi^\infty(\xi_m) + (K\Phi_k)(\xi_m).$$

Die Integralgleichung wird also nur noch in den Kollokationspunkten erfüllt.

Die weitere numerische Aufgabe besteht in der Bestimmung der Koeffizienten  $a_j$  des in der Basis des Raums  $X_k$  dargestellten Potentials

$$\Phi_k = \sum_{n=1}^k a_n h_n.$$

Man erhält das Gleichungssystem  $Aa = ((-1)C - D)a = b$  mit dem Vektor

$$b = (b_m)_{m=1,\dots,k} = \left( -\frac{2}{\sigma} \Phi^\infty(\xi_{\mathbf{m}}) \right)_{m=1,\dots,k},$$

und den Matrizen  $C = (c_{mn})_{m,n=1,\dots,k}$  und  $D = (d_{mn})_{m,n=1,\dots,k}$  mit Einträgen

$$c_{mn} = h_n(\xi_{\mathbf{m}}) \quad (5.11)$$

$$d_{mn} = (Kh_n)(\xi_{\mathbf{m}}). \quad (5.12)$$

**Bemerkung 5.2.1** *Wenn die Basis  $(h_1, \dots, h_k)$  aus den Lagrange-Hutfunktionen gebildet wird (d.h.  $h_n(\xi_{\mathbf{m}}) = \delta_{mn}$ , stückweise linear), so ist  $C = I$ , die Hauptarbeit steckt also in der Berechnung der  $k^2$  Integrale*

$$d_{mn} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \xi_{\mathbf{m}} \rangle}{|\mathbf{y} - \xi_{\mathbf{m}}|^3} h_n(\mathbf{y}) d\Gamma_y.$$

Zur numerischen Berechnung dieser Integrale wird die Oberfläche  $\Gamma$  in Dreiecke  $\{\Delta_m\}_{m=1}^M$  zerlegt, deren Eckpunkte  $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^N$  auf  $\Gamma$  liegen.

Im folgenden werden zwei verschiedene Kollokationsansätze verglichen. Beim Ansatz mit auf den Dreiecken konstanten Basisfunktionen werden die Massenzentren der Dreiecke als Kollokationspunkte gewählt. Beim linearen Ansatz sind die Kollokationspunkte die Eckpunkte der Dreiecke.

Diese beiden Verfahren werden nun ausführlich studiert.

### 5.2.1 Kollokation mit stückweise konstanter Interpolation

Die Kollokationspunkte sind hier die Massenzentren  $\{\mathbf{c}_m\}_{m=1}^M$  der Dreiecke  $\{\Delta_m\}_{m=1}^M$ . Die konstanten Ansatzfunktionen haben die Gestalt

$$h_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & : \mathbf{x} \in \Delta_n \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.13)$$

Die Matrixeinträge  $d_{mn}$  lassen sich über den sogenannten Raumwinkel berechnen (Schaum [53]). Es sei  $dS$  ein Flächenelement. Man verbindet alle Punkte des Randes von  $dS$  mit dem Ursprung und erhält einen Kegel. Diesen Kegel schneidet man mit der Einheitskugel um den Ursprung  $\mathbf{0}$ . Der Raumwinkel, der durch  $dS$  in  $\mathbf{0}$  gebildet wird (Bezeichnung  $\Omega(dS; \mathbf{0})$ ), entspricht dann der Oberfläche jenes Teils der Einheitskugel um den Ursprung, der durch den Kegel abgeschnitten wird. Für die geschlossene Oberfläche  $\Gamma$  gilt

$$\Omega(\Gamma; \mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} d\Gamma_y = \begin{cases} 0 & : \mathbf{x} \text{ außerhalb } \Gamma \\ 2\pi & : \mathbf{x} \text{ auf } \Gamma \\ 4\pi & : \mathbf{x} \text{ innerhalb } \Gamma \end{cases} \quad (5.14)$$

Nach Van Oosterom [56] kann der Raumwinkel des Dreiecks  $\Delta_{123}$  mit Eckpunkten  $\mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{y}_2$  und  $\mathbf{y}_3$  aus der Sicht des Ursprungs berechnet werden:

$$\begin{aligned}\Omega(\Delta_{123}; \mathbf{0}) &= \int_{\Delta_{123}} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &= 2 \arctan \frac{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_3 \rangle}{|\mathbf{y}_1| |\mathbf{y}_2| |\mathbf{y}_3| + |\mathbf{y}_1| \langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3 \rangle + |\mathbf{y}_3| \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle + |\mathbf{y}_2| \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_3 \rangle}\end{aligned}\quad (5.15)$$

Unter diesen Voraussetzungen können nun die Matrixeinträge  $d_{mn}$  berechnet werden:

$$\begin{aligned}d_{mn} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^M \int_{\Delta_l} \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{c}_m, \mathbf{n}(\mathbf{y}) \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m|^3} h_n(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_n} \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{c}_m, \mathbf{n}(\mathbf{y}) \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m|^3} d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \Omega(\Delta_n; \mathbf{c}_m)\end{aligned}\quad (5.16)$$

Mit der Definition  $B := (-1)D$  muß jetzt noch die Fixpunktgleichung  $a = Ba + b$  gelöst werden, um die Potentialwerte in den Massenzentren zu erhalten.

### 5.2.2 Kollokation mit stückweise linearer Interpolation

Bei linearer Interpolation werden die Eckpunkte der Dreiecke als Kollokationspunkte gewählt.  $\Delta_{kln}$  habe die Eckpunkte  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{x}_l$  und  $\mathbf{x}_n$ , die linearen Lagrange-Ansatzfunktionen haben die Gestalt

$$h_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\det(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l, \mathbf{x})}{\det(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l, \mathbf{x}_n)} & : \mathbf{x} \in \Delta_{kln} \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}\quad (5.17)$$

Die Matrixeinträge  $d_{mn}$  der in Dreiecke zerlegten Oberfläche lassen sich analytisch berechnen (de Munck, [12]). Die Vorgehensweise soll nun erläutert werden.

Sei zunächst  $n \neq m$ . Die Lagrange-Hutfunktion  $h_n$  ist nur auf den Dreiecken von Null verschieden, die  $\mathbf{x}_n$  als Eckpunkt besitzen.  $\frac{\mathbf{n}}{A_{kln}}$  sei der normierte Normalenvektor auf dem Dreieck  $\Delta_{kln}$ , welches den Flächeninhalt  $A_{kln}/2$  habe. Es ergibt sich

$$d_{mn} = -\frac{1}{2\pi} \left( \sum_{\Delta_{kln}} \frac{1}{A_{kln}} \int_{\Delta_{kln}} \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}_m, \mathbf{n} \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_m|^3} h_n(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \right).\quad (5.18)$$

Um das Schriftbild zu vereinfachen, wird der durch Dreieck  $\Delta_{kln}$  und den Betrachtungspunkt  $\mathbf{x}_m$  gebildete Kegel in den Ursprung verschoben. Die Ecken des verschobenen Dreiecks werden mit  $\mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{y}_2$  und  $\mathbf{y}_3$  bezeichnet, wobei der Umlaufsinn von  $\mathbf{y}_1 \rightarrow \mathbf{y}_2 \rightarrow \mathbf{y}_3$  um den Normalenvektor  $\mathbf{n}$  die „Rechte-Hand-Regel“ erfülle.  $\mathbf{x}_n$  wird in  $\mathbf{y}_i$  überführt, wobei  $i$  je nach Wahl den Wert 1, 2 oder 3 annehmen kann:

$$d_{mn} = -\frac{1}{2\pi} \left( \sum_{\Delta_{123}} \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle}{|\mathbf{y}|^3} H_i(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \right),\quad (5.19)$$

mit

$$H_i(\mathbf{y}) = \frac{\det(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_{i+1})}{\det(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.20)$$

$\mathbf{y}_4 \equiv \mathbf{y}_1$  und  $\mathbf{y}_0 \equiv \mathbf{y}_3$ .

Das Skalarprodukt  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle$  wird geometrisch als Projektion von  $\mathbf{y}$  auf  $\mathbf{n}$  gedeutet. Wie man sich leicht veranschaulicht, ist dieser Wert für  $\mathbf{y} \in \Delta_{123}$  konstant

$$d := \langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle \quad (5.21)$$

und man erhält

$$d_{mn} = -\frac{1}{2\pi} \left( \sum_{\Delta_{123}} \frac{d}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{1}{|\mathbf{y}|^3} H_i(\mathbf{y}) d\Gamma_y \right). \quad (5.22)$$

Mit der Definition

$$\mathbf{z}_i := \mathbf{y}_{i+1} \times \mathbf{y}_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.23)$$

( $\mathbf{y}_4 \equiv \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0 \equiv \mathbf{y}_3$ ) schreibt sich der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  ( $|\mathbf{n}| = A_{klm}$ ) als Summe der  $\mathbf{z}_i$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \mathbf{z}_k &\stackrel{(23)}{=} \mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_3 \times \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2 \\ &= (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \times \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_2 \\ &= (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \times \mathbf{y}_3 - (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \times \mathbf{y}_2 \\ &= (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \times (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2) \\ &= (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2) \times (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \\ &= \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Jedes  $\mathbf{y} \in \Delta_{123}$  läßt sich darstellen als

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y})(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y})(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1), \quad (5.25)$$

wobei  $b(\mathbf{y}), c(\mathbf{y}) \in [0, 1]$  und  $b(\mathbf{y}) + c(\mathbf{y}) \leq 1$ .

Mit der Berechnung der Determinante dreier Vektoren

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \rangle,$$

erhält man somit

$$\begin{aligned} d &\stackrel{(21)}{=} \langle \mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle \\ &\stackrel{(24)+(25)}{=} \left\langle \left( \sum_{k=1}^3 \mathbf{z}_k \right), \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y})(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y})(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Def.}(23)}{=} \langle \mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_3 + \mathbf{y}_3 \times \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y})(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y})(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - b(\mathbf{y}) - c(\mathbf{y})) \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_3 \rangle + b(\mathbf{y}) \langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3 \times \mathbf{y}_1 \rangle + c(\mathbf{y}) \langle \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2 \rangle \\
&= (1 - b(\mathbf{y}) - c(\mathbf{y})) \det(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) + b(\mathbf{y}) \det(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y}) \det(\mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \\
&= \det(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Man findet eine einfachere Schreibweise für  $H_i$

$$\begin{aligned}
H_i(\mathbf{y}) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\det(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_{i+1})}{\det(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)} \\
&= \frac{1}{d} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}_{i+1} \times \mathbf{y}_{i-1} \rangle \stackrel{\text{Def. (23)}}{=} \frac{1}{d} \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_i \rangle,
\end{aligned} \tag{5.27}$$

und wenn dieses Ergebnis in (22) eingesetzt wird,

$$d_{mn} = -\frac{1}{2\pi} \left( \sum_{\Delta_{123}} \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_i \rangle}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_y \right).$$

Mit der Definition

$$\Omega_i := \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_i \rangle}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_y \tag{5.28}$$

erhält man schließlich

$$d_{mn} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\Delta_{123}} \Omega_i. \tag{5.29}$$

Es soll nun eine Formel für die Berechnung der  $\Omega_i$  hergeleitet werden. Über das Biot-Savartsche Gesetz der Magnetostatik kann die im Ursprung gemessene durch eine konstante Stromdipolverteilung auf dem Dreieck  $\Delta_{123}$  erzeugte magnetische Induktion berechnet werden. Folgende Formel entspricht bis auf eine Konstante diesem B-Feld:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \int_{\Delta_{123}} \nabla_y \frac{1}{|\mathbf{y}|} \times d\Gamma_y \tag{5.30}$$

Hier bezeichnet  $d\Gamma_y = \frac{\mathbf{n}}{A_{123}} d\Gamma_y$ .

Diese Formel wird nun auf zwei verschiedenen Wegen ausgewertet, die beide  $\tilde{\mathbf{B}}$  als Linearkombination von  $\mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{y}_2$  und  $\mathbf{y}_3$  darstellen. Der Koeffizientenvergleich wird dann eine Berechnungsmöglichkeit für die gesuchten  $\Omega_i$  liefern.

Auf dem ersten Weg wertet man den Gradienten aus. Dazu wird das Zwischenresultat

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{z}_k, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}_k &\stackrel{(25)}{=} \langle \mathbf{y}_2 \times \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y})(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y})(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1) \rangle \mathbf{y}_1 \\
&\quad + \langle \mathbf{y}_3 \times \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y})(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y})(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1) \rangle \mathbf{y}_2 \\
&\quad + \langle \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y})(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + c(\mathbf{y})(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1) \rangle \mathbf{y}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - b(\mathbf{y}) - c(\mathbf{y})) \det(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y}) \det(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1) \mathbf{y}_2 \\
&\quad + c(\mathbf{y}) \det(\mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \mathbf{y}_3 \\
&\stackrel{(26)}{=} d((1 - b(\mathbf{y}) - c(\mathbf{y})) \mathbf{y}_1 + b(\mathbf{y}) \mathbf{y}_2 + c(\mathbf{y}) \mathbf{y}_3) \\
&\stackrel{(25)}{=} d\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

(5.31)

benötigt. Der Vektor  $\mathbf{n}$  ist auf einem Dreieck konstant und man erhält

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{B}} &= \frac{\mathbf{n}}{d} \times \left( -\frac{d}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \nabla_y \frac{1}{|\mathbf{y}|} d\Gamma_y \right) = \frac{\mathbf{n}}{d} \times \left( \frac{d}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_y \right) \\
&= \frac{\mathbf{n}}{d} \times \left( \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\mathbf{y}d}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_y \right) \stackrel{(31)}{=} \frac{\mathbf{n}}{d} \times \left( \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \sum_{k=1}^3 \frac{\langle \mathbf{z}_k, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}_k}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_y \right) \\
&= \frac{\mathbf{n}}{d} \times \left[ \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\langle \mathbf{z}_k, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_y \right) \mathbf{y}_k \right] \stackrel{\text{Def. (28)}}{=} \frac{\mathbf{n}}{d} \times \sum_{k=1}^3 \Omega_k \mathbf{y}_k
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Die zweite Möglichkeit der Auswertung von (30) benutzt eine Folgerung des Stokesschen Satzes:

**Satz 5.2.3 (Satz von Stokes für skalare Felder)** *Es sei  $\Gamma$  ein ebenes Gebiet mit der Randkurve  $\partial(\Gamma)$ , die so orientiert sei, daß  $\Gamma$  zur Linken liege,  $\varphi \in C^1(\Gamma)$  sei ein stetig differenzierbares skalares Feld, dann gilt:*

$$\int_{\Gamma} \nabla_y \varphi(\mathbf{y}) \times d\Gamma_y = - \oint_{\partial(\Gamma)} \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

**Beweis:** Bronstein [6] S. 580, Nolting [36] S. 30

Die Anwendung dieses Satzes auf die magnetische Induktion (30) ergibt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{B}} &= - \oint_{\partial(\Delta_{123})} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \\
&= - \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{y}_i \rightarrow \mathbf{y}_{i+1}} \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \\
&= - \sum_{i=1}^3 \int_0^1 \frac{1}{|\mathbf{y}_i + s(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i)|} (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) ds \\
&= \sum_{i=1}^3 (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i+1}) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{y}_i + s(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i), \mathbf{y}_i + s(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) \rangle}} ds \\
&= \sum_{i=1}^3 (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i+1}) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s^2 |\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i|^2 + 2s \langle \mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i \rangle + |\mathbf{y}_i|^2}} ds.
\end{aligned}$$

Mit  $X = as^2 + bs + c$  handelt es sich um ein Integral der Form  $\int ds/\sqrt{X}$  mit  $a > 0$  und  $\Delta = 4ac - b^2 = 0$ . Es ergibt sich  $\frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2as + b)$  (Bronstein [6], S. 49) und nach weiteren Umformungen erhält man für die magnetische Induktion (30)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{B}} &= \sum_{i=1}^3 (\gamma_{i-1}^0 - \gamma_i^0) \mathbf{y}_i \\ \gamma_i^0 &= \frac{-1}{|\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i|} \ln \left( \frac{|\mathbf{y}_i| |\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i| + \langle \mathbf{y}_i, (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) \rangle}{|\mathbf{y}_{i+1}| |\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i| + \langle \mathbf{y}_{i+1}, (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) \rangle} \right).\end{aligned}\quad (5.33)$$

$\gamma_i^0$  kann physikalisch als Potential im Ursprung interpretiert werden, welches durch eine homogene Ladungsverteilung auf dem Liniensegment  $\mathbf{y}_i \rightarrow \mathbf{y}_{i+1}$  erzeugt wurde.

Aus (30) und den beiden Auswertungen (32) und (33) erhält man folgende Gleichung:

$$\sum_{k=1}^3 (\gamma_{k-1}^0 - \gamma_k^0) \mathbf{y}_k = \frac{\mathbf{n}}{d} \times \sum_{k=1}^3 \Omega_k \mathbf{y}_k \quad (5.34)$$

Der Koeffizientenvergleich der Vektoren  $\mathbf{y}_k$  liefert schließlich drei Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten  $\Omega_k$ . Man kann zeigen, daß aufgrund von  $\sum_{k=1}^3 (\gamma_{k-1}^0 - \gamma_k^0) = 0$  das erhaltene Gleichungssystem singularär ist. Zur Bestimmung der  $\Omega_k$  wird somit eine weitere Gleichung benötigt.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 \Omega_i &\stackrel{(28)}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\langle \mathbf{z}_i, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_y \\ &= \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{z}_i, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_y \\ &\stackrel{(24)}{=} \frac{1}{A_{123}} \int_{\Delta_{123}} \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_y \\ &= \int_{\Delta_{123}} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3} d\Gamma_y \\ &\stackrel{(15)}{=} \Omega(\Delta_{123}; \mathbf{0})\end{aligned}\quad (5.35)$$

Das Gleichungssystem ist nun regulär und kann zur Bestimmung der  $\Omega_i$  gelöst werden:

$$\Omega_i = \frac{1}{A_{123}^2} \left( \Omega(\Delta_{123}; \mathbf{0}) \langle \mathbf{z}_i, \mathbf{n} \rangle + d(\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_{i-1}) \cdot \sum_{k=1}^3 \gamma_k^0 (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k+1}) \right) \quad (5.36)$$

(de Munck [12], S. 988)

Nun müssen noch die verbleibenden Hauptdiagonalelemente der Matrix  $A$  bestimmt werden. Die Summe der Hutfunktionen ist für alle  $\mathbf{y}$

$$\sum_{n=1}^N h_n(\mathbf{y}) = 1. \quad (5.37)$$

Die Matrix  $A$  besitzt einen Eigenvektor  $(1, \dots, 1)^t$  zum zugehörigen Eigenwert 0, denn

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N A_{mn} &= -1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \xi_{\mathbf{m}} \rangle}{|\mathbf{y} - \xi_{\mathbf{m}}|^3} \sum_{n=1}^N h_n(\mathbf{y}) d\Gamma_y \\
&= -1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x}_{\mathbf{m}} \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_{\mathbf{m}}|^3} d\Gamma_y \\
&\stackrel{(15)}{=} -1 + \frac{1}{2\pi} \Omega(\Gamma; \mathbf{x}_{\mathbf{m}}) \\
&\stackrel{(14)}{=} 0.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Die Hauptdiagonalelemente können also durch die negative Summe aller weiteren Elemente einer Zeile berechnet werden:

$$A_{mm} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N A_{mn} \tag{5.39}$$

### 5.3 $p$ -Schichtmodell

Zur numerischen Berechnung des Potentials  $\Phi$  werden  $p$  Grenzflächen in Dreiecke zerlegt. Die Eckpunkte der Dreiecke auf der  $l$ -ten Grenzfläche ( $1 \leq l \leq p$ ) seien mit  $\mathbf{x}_{\mathbf{m}}^l$  bezeichnet ( $1 \leq m \leq N(l)$ ).  $\mathbf{c}_{\mathbf{m}}^l$  sei das Massenzentrum des Dreiecks  $\Delta_m^l$  der  $l$ -ten Schicht ( $1 \leq m \leq M(l)$ ). Nach der Wahl der Kollokationspunkte  $\xi_{\mathbf{m}}^l$  ( $1 \leq m \leq k(l)$ ) und der Basis  $h_n^l$  ( $1 \leq n \leq k(l)$ ) besteht die numerische Aufgabe in der Bestimmung der Koeffizienten  $\alpha_n^l$  der Darstellung

$$\Phi_k^p = \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{k(l)} \alpha_n^l h_n^l.$$

Die Kollokationsgleichung für das  $p$ -Schichtmodell lautet ( $1 \leq i \leq p; 1 \leq m \leq k(i)$ )

$$\begin{aligned}
&(\sigma_i^- + \sigma_i^+) \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{k(l)} \alpha_n^l h_n^l(\xi_{\mathbf{m}}^i) \\
&= 2\Phi^\infty(\xi_{\mathbf{m}}^i) - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\xi_{\mathbf{m}}^i, \mathbf{y}) \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{k(l)} \alpha_n^l h_n^l(\mathbf{y}) d\Gamma_y.
\end{aligned}$$

#### 5.3.1 Kollokation mit stückweise konstanter Interpolation

Beim Ansatz mit konstanten Basisfunktionen

$$h_n^l(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & : \mathbf{x} \in \Delta_n^l \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \tag{5.40}$$

wählt man als Kollokationspunkte wieder die Massenzentren der Dreiecke. Es ergibt sich die Kollokationsgleichung ( $1 \leq i \leq p; 1 \leq m \leq M(i)$ )

$$\alpha_m^i = \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Phi^\infty(\mathbf{c}_m^i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \int_{\Gamma_j} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i|^3} \sum_{n=1}^{M(l)} \alpha_n^j h_n^j(\mathbf{y}) d\Gamma_y.$$

Nach der Zerlegung der Grenzschichten in Dreiecke erhält man daraus

$$\begin{aligned} \alpha_m^i &= \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Phi^\infty(\mathbf{c}_m^i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \sum_{r=1}^{M(j)} \int_{\Delta_r^j} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i|^3} \sum_{n=1}^{M(l)} \alpha_n^j h_n^j(\mathbf{y}) d\Gamma_y \\ &= \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Phi^\infty(\mathbf{c}_m^i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \sum_{r=1}^{M(j)} \int_{\Delta_r^j} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{c}_m^i|^3} d\Gamma_y \alpha_r^j \\ &\stackrel{(15)}{=} \frac{2}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Phi^\infty(\mathbf{c}_m^i) + \sum_{j=1}^p \sum_{r=1}^{M(j)} \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_i^- + \sigma_i^+} \Omega(\Delta_r^j; \mathbf{c}_m^i) \alpha_r^j \\ &=: b_m^i + \sum_{j=1}^p \sum_{r=1}^{M(j)} B_{mr}^{ij} \alpha_r^j. \end{aligned}$$

Durch das Lösen dieser Fixpunktgleichung  $a = Ba + b$  werden die Potentialwerte in den Massenzentren bestimmt.

### 5.3.2 Kollokation mit stückweise linearer Interpolation

Kollokationspunkte sind die Eckpunkte der Dreiecke, als Basiselemente werden die Lagrange-Hutfunktionen  $h_n^l$  gewählt ( $h_n^l(\mathbf{x}_m^i) = \delta_{li} \delta_{mn}$ , ansonsten linear). Damit erhält man die Kollokationsgleichung ( $1 \leq i \leq p; 1 \leq m \leq N(i)$ )

$$\begin{aligned} &(\sigma_i^- + \sigma_i^+) \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{N(l)} \alpha_n^l h_n^l(\mathbf{x}_m^i) \\ &= 2\Phi^\infty(\mathbf{x}_m^i) - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}_m^i, \mathbf{y}) \sum_{n=1}^{N(j)} \alpha_n^j h_n^j(\mathbf{y}) d\Gamma_y, \end{aligned}$$

welche als Gleichungssystem

$$\sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{N(l)} \left\{ (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \delta_{il} \delta_{mn} + (\sigma_l^- - \sigma_l^+) d_{mn}^{il} \right\} \alpha_n^l = 2\Phi^\infty(\mathbf{x}_m^i),$$

d.h.  $Aa = b$  geschrieben werden kann. Wie für das Einschichtmodell läßt sich

$$d_{mn}^{il} = \int_{\Gamma_l} k(\mathbf{x}_m^i, \mathbf{y}) h_n^l(\mathbf{y}) d\Gamma_y$$

für in Dreiecke zerlegte Grenzschichten und für  $i \neq l$  oder  $m \neq n$  analytisch berechnen. Mit  $\sigma_i^+ = \sigma_{i+1}^-$ ,  $\sigma_p^+ = 0$ ,

$$\sum_{n=1}^{N(l)} h_n^l(\mathbf{y}) = 1 \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma_l \quad (5.41)$$

und der Berechnung des Raumwinkels

$$\Omega(\Gamma_l; \mathbf{x}_m^i) = \int_{\Gamma_l} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i|^3} d\Gamma_y = \begin{cases} 0 & : l < i \\ 2\pi & : l = i \\ 4\pi & : l > i \end{cases} \quad (5.42)$$

ergibt sich wie beim Einschichtmodell für die Matrix  $A$  ein Eigenwert 0 mit zugehörigem Eigenvektor  $e = (1, \dots, 1)^t$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^p \sum_{n=1}^{N(l)} \left\{ (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \delta_{il} \delta_{mn} - \frac{(\sigma_l^- - \sigma_l^+)}{2\pi} \int_{\Gamma_l} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i|^3} h_n^l(\mathbf{y}) d\Gamma_y \right\} \\ &= (\sigma_i^- + \sigma_i^+) - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^p (\sigma_l^- - \sigma_l^+) \int_{\Gamma_l} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i|^3} \sum_{n=1}^{N(l)} h_n^l(\mathbf{y}) d\Gamma_y \\ (41) \quad & \stackrel{=}{=} (\sigma_i^- + \sigma_i^+) - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^p (\sigma_l^- - \sigma_l^+) \int_{\Gamma_l} \frac{\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i \rangle}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_m^i|^3} d\Gamma_y \\ (42) \quad & \stackrel{=}{=} (\sigma_i^- + \sigma_i^+) - (\sigma_i^- - \sigma_i^+) - 2 \sum_{l=i+1}^p (\sigma_l^- - \sigma_l^+) \\ &= 2\sigma_i^+ - 2(\sigma_{i+1}^- - \sigma_p^+) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Durch das Lösen dieses Gleichungssystems erhält man die Potentialwerte in den Dreieckseckpunkten.

## 5.4 Quelleinleitung im BE-Modell

Wie in Kapitel 3.3 erläutert stellt der physikalische Stromdipol (3.5) (Abbildung 3.2) ein physiologisch sinnvolles Quellmodell dar. Die Grenzflächen, auf denen der Primärstromanteil  $\Phi^\infty$  ausgewertet wird, liegen im Vergleich zur Ausdehnung der zylinderförmigen Quelle in der Fernzone, so daß die Verwendung des Stromdipolmodells (3.6) physikalisch und numerisch zu vertreten ist. Man kann die im weiteren vorgestellte Methode zur Quelleinleitung auch als simple Quadraturformel für das Quellmodell des physikalischen Stromdipols ansehen. Sei  $\mathbf{x}_0$  der Ort der Quelleinspeisung durch den Stromdipol. Man definiere:

$$\Phi_n(\mathbf{x}) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \nabla \cdot \{ \mathbf{M} \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\Omega_y.$$

Hier seien die Funktionen  $\delta_n \in C_0^\infty(\Omega)$ , es gelte

$$Tr(\delta_n(\mathbf{x})) = \left\{ |\mathbf{x}| \leq \frac{1}{n} \right\}$$

und  $\int_{\Omega} \delta_n d\Omega = 1 \forall n$ . Die Funktionenfolge  $\{\delta_n\}_n$  konvergiert gegen die Dirac-Delta-Distribution (Jantscher [26]).

Nach Bronstein ([6], S. 577) gilt für ein skalares Feld  $\delta_n$  und ein konstantes Vektorfeld  $\mathbf{M}$

$$\nabla \cdot (\mathbf{M}\delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)) = \mathbf{M} \nabla \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0).$$

Mit partieller Integration (1. Greensche Identität) (wieder wird eine Kugel  $K_\epsilon(\mathbf{x})$  um die Singularität herausgenommen, deren Integral mit  $\epsilon$  gegen 0 geht) erhält man unter Vernachlässigung der Randterme ( $\delta_n|_{\Gamma_i} = 0$  für genügend große  $n$ )

$$\begin{aligned} \Phi_n(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\Omega_y. \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \underbrace{\int_{\Omega} \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) d\Omega_y}_{=1} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \left\{ \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} - \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \right\} d\Omega_y \end{aligned}$$

Der Integrand des zweiten Summanden besitzt den Träger  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| < \frac{1}{n}$ . Es ist

$$\sup_y \left\{ \left| \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} - \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \right| \right\} < \epsilon(n), \quad \forall \mathbf{y} \text{ mit } |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| < \frac{1}{n}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \left\{ \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} - \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \right\} d\Omega_y \\ &< \frac{\epsilon(n)}{4\pi} \underbrace{\int_{\Omega} \delta_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) d\Omega_y}_{=1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Wird der Primärstromanteil  $\Phi^\infty$  mit  $\mathbf{j}_p = \mathbf{M} \delta_{\mathbf{x}_0}$  ausgewertet, so erhält man

$$\Phi^\infty(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}. \quad (5.44)$$

## 5.5 Lösen der entstehenden Gleichungssysteme

Wie in (38) für das Einschichtmodell und in (43) für das  $p$ -Schichtmodell gezeigt wurde, ist das aus dem linearen Ansatz hervorgegangene Gleichungssystem  $A\mathbf{a} = \mathbf{b}$  singular, da die Matrix  $A$  einen Eigenwert 0 mit zugehörigem Eigenvektor  $\mathbf{e} := (1, \dots, 1)^{tr}$  besitzt. Die Matrix  $I - A$  der Fixpunktgleichung  $\mathbf{a} = (I - A)\mathbf{a} + \mathbf{b}$  besitzt somit einen Eigenwert  $\lambda = 1$  mit zugehörigem Eigenvektor  $\mathbf{e}$ .

Das gesuchte Potential ist nach Satz 5.2.1 nur bis auf eine Konstante genau bestimmt. Es ist somit die Einführung der Zusatzbedingung möglich, daß die Summe über alle zu bestimmenden Potentialwerte an den Kollokationspunkten 0 ergibt (siehe Lemma 5.2.1) Sei dazu  $\mathbf{p} := (1/N, \dots, 1/N)^{tr}$ .  $\mathbf{p}$  besitzt die Eigenschaften  $\mathbf{p}^{tr}\mathbf{a} = 0$  und  $\mathbf{p}^{tr}\mathbf{e} = 1$ . Es ergibt sich die Fixpunktgleichung  $\mathbf{a} = (I - A)\mathbf{a} + \mathbf{b} = (I - A - \mathbf{e}\mathbf{p}^{tr})\mathbf{a} + \mathbf{b}$  mit der Iterationsmatrix  $W = (I - A - \mathbf{e}\mathbf{p}^{tr})$ , die wieder den Eigenwert 0 zum Eigenvektor  $\mathbf{e}$  besitzt.

Das beschriebene Verfahren wird Wieland-Deflation genannt.

Das entstehende reguläre Gleichungssystem  $(A + \mathbf{e}\mathbf{p}^{tr})\mathbf{a} = \mathbf{b}$  kann über direkte Verfahren (z.B. LR-Zerlegung mit Pivotisierung, QR-Zerlegung) gelöst werden. Im Hinblick auf die Erstellung der Einflußmatrix (Kapitel ??) bietet sich ein direkter Löser sogar an, da die Matrix nur von der Geometrie abhängt und eine einmal berechnete Zerlegung für verschiedene Quelleinleitungen (rechte Seite  $\mathbf{b}$ ) immer wieder verwendet werden kann.

Für die Kollokation in den Massenzentren der Dreiecke mit konstanten Ansatzfunktionen wurde die Beschaffenheit der Matrix  $B$  hinsichtlich iterativer Löser genauer untersucht.

**Lemma 5.5.1**  *$B$  hat den Eigenwert  $\lambda = 1$  der Vielfachheit 1 mit zugehörigem Eigenvektor  $\mathbf{e}$ .*

**Beweis:** Lynn und Timlake [28]

**Satz 5.5.1** *Sei*

$$\lambda_j = \frac{\sigma_j^- - \sigma_j^+}{\sigma_j^- + \sigma_j^+} \quad \forall j = 1, \dots, p.$$

$\lambda_j$  ist Eigenwert der Matrix  $B$  ( $\forall j = 1, \dots, p$ ).

**Beweis:** Lynn und Timlake [28]

Aus  $\sigma_p^+ = 0$  folgt somit  $\lambda_p = 1$ . Dieser Eigenwert kann wie bereits beschrieben über eine Wieland-Deflation der Geometriematrix ( $W = (B - \mathbf{e}\mathbf{p}^{tr})$ ) vermieden werden. Aus praktischen Erfahrungen geht man davon aus, daß alle weiteren Eigenwerte  $\ll 1$  sind (Lynn und Timlake [28]) und somit Konvergenz erzielt wird (Spektralradius der Iterationsmatrix  $W$  kleiner als 1, Werner [59], S. 123). Der Eigenwert  $\lambda_m$  wird ebenfalls sehr nahe bei 1 liegen, wenn  $\Omega_{m+1}$  die Knochenschicht mit im Vergleich zu den anderen Schichten geringer Leitfähigkeit  $\sigma_m^+$  bezeichne. Hier bietet sich eine Multideflation der Iterationsmatrix an (Lynn und Timlake [28]). Diese Technik kann ebenfalls mit klassischen Iterationsverfahren wie Jakobi, Gauss-Seidel und SOR gekoppelt werden.

Am INSERM U280 de Lyon wurden verschiedene iterative Verfahren für die Kollokation im Massenzentrum getestet, unter anderem die klassischen Methoden wie Gauss-Seidel, Jakobi und SOR. Die Verfahren wurden mit einfacher Deflation und auch mit Multideflation kombiniert. Die Anwendung des Gauss-Seidel Verfahrens auf die durch einfache Deflation bestimmte Iterationsmatrix erzielte die besten Konvergenzergebnisse.

Für die Kollokation in den Dreieckseckpunkten mit stückweise linearer Interpolation, analytischer Berechnung der auftretenden Integrale und einfacher Deflation der Geometriematrix wurde ebenfalls eine gute Konvergenz mit dem Gauss-Seidel Verfahren erzielt. Im Hinblick auf das Erstellen der Einflußmatrix sollten aber direkte Verfahren vorgezogen werden.

## 5.6 Die Isolierung der schlecht leitenden Knochenschicht

Sei im folgenden die Knochenschicht die  $(m + 1)$ -te Schicht  $\Omega_{m+1}$  im  $p$ -Schichtmodell mit innerer Grenzfläche  $\Gamma_m$  und äußerer Grenzfläche  $\Gamma_{m+1}$ . Die Leitfähigkeit der Knochenschicht  $\sigma_m^+ = \sigma_{m+1}^-$  beträgt nur ca. ein hunderstel der Leitfähigkeiten der anderen

Schichten (Tabelle 3.1).

Der Fehler, der durch die numerische Berechnung des Volumenterms gemacht wird, wird durch die geringe Leitfähigkeit des Knochens bei direktem Lösen der  $p$ -Schichtintegralgleichung

$$\begin{aligned} & (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi(\mathbf{x}) \\ &= 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) d\Gamma_y \end{aligned}$$

verstärkt (Meijs et al. [32]). Diese Fehlerverstärkung kann durch die Isolierung der Knochenschicht verhindert werden (Meijs et al. [33]). Dazu wird das Potential  $\Phi$  als Summe zweier Komponenten geschrieben:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_i^0(\mathbf{x}) + \Phi_i(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i \quad (5.45)$$

$\Phi_i^0$  ist das sogenannte isolierte Potential unter der Annahme, daß die Leitfähigkeit der Knochenschicht null ist ( $\sigma_m^+ = \sigma_{m+1}^- = 0$ ). Die Annahme führt dazu, daß der Volumenstromanteil auf den Schichten außerhalb der Knochenschicht verschwindet, da die Quelleinleitung auf die Gehirnschicht beschränkt ist, so daß  $\Phi_i^0(\mathbf{x}) = 0$  ( $(m+1) \leq i \leq p$ ) gilt. Die Gleichung für das isolierte Potential lautet damit

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i \Phi_i^0(\mathbf{x}) &= 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m \Delta\sigma_j \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_j^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad (5.46) \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m-1} \Delta\sigma_j \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_j^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y &= \\ -\bar{\sigma}_i \Phi_i^0(\mathbf{x}) + 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - \sigma_m^- \int_{\Gamma_m} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_m^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y & \end{aligned}$$

mit  $\bar{\sigma}_i = (\sigma_i^- + \sigma_i^+)$ ,  $1 \leq i < m$ ,  $\Delta\sigma_j = (\sigma_j^- - \sigma_j^+)$ ,  $1 \leq j < m$  und  $\bar{\sigma}_m = \sigma_m^-$ ,  $\Delta\sigma_m = \sigma_m^-$ . Das Restpotential  $\Phi_i$  berechnet sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned} (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi_i(\mathbf{x}) &= 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi_i^0(\mathbf{x}) \\ &- \left\{ \sum_{j=1}^m (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_j^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y + \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_j(\mathbf{y}) d\Gamma_y \right\} \end{aligned}$$

Wird nun Gleichung (46) in diese Gleichung eingesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi_i(\mathbf{x}) &= 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) - (\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi_i^0(\mathbf{x}) + \bar{\sigma}_i \Phi_i^0(\mathbf{x}) - 2\Phi^\infty(\mathbf{x}) \\ &+ \sigma_m^- \int_{\Gamma_m} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_m^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y - (\sigma_m^- - \sigma_m^+) \int_{\Gamma_m} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_m^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y \\ &- \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_j(\mathbf{y}) d\Gamma_y. \end{aligned}$$

Die Gleichung für das Restpotential lautet somit

$$(\sigma_i^- + \sigma_i^+) \Phi_i(\mathbf{x}) = \Phi_i^\infty(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^p (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{\Gamma_j} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_j(\mathbf{y}) d\Gamma_y, \quad (5.47)$$

wobei sich  $\Phi_i^\infty$  aus dem isolierten Potential ergibt:

$$\Phi_i^\infty(\mathbf{x}) = \sigma_m^+ \left\{ \int_{\Gamma_m} k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_m^0(\mathbf{y}) d\Gamma_y - \delta_{im} \Phi_m^0(\mathbf{x}) \right\} \quad (5.48)$$

Beide Gleichungen (46) und (47) sind Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art. Zunächst wird die Gleichung für das isolierte Potential (46) über die beschriebenen numerischen Verfahren gelöst. Damit kann  $\Phi_i^\infty$  für die Gleichung des Restpotentials berechnet werden (nach (48)) und durch Lösen von (47) werden die Potentiale auf den äußeren Schichten bestimmt.

Durch diese Vorgehensweise kann der Fehler verringert werden. Zunächst enthält der Volumenleiter zur Berechnung des isolierten Potentials keine Schicht mehr mit geringer Leitfähigkeit.

Das Restpotential zeigt ebenfalls keine Fehlerverstärkung, denn der Quellterm  $\Phi_i^\infty$  ist proportional zu  $\sigma_m^+$  und das Restpotential auf den inneren Schichten  $\Phi_i$ ,  $1 \leq i < m$  ist gering (einige Prozent des Gesamtpotentials  $\Phi$ ) und fällt mit  $\sigma_m^+$ . Da also sowohl Quellterm als auch Volumenterm des Restpotentials mit  $\sigma_m^+$  fallen, wird eine Fehlerverstärkung verhindert.

## 5.7 Konvergenz- und Fehlerbetrachtungen

Es sollen nun einige Aussagen zur Konvergenz der numerischen Methoden gemacht werden (Hackbusch [18], Kapitel 9.1.4 und die Kapitel 4.4 und 4.6). Die grundlegenden Definitionen der Konvergenz, Stabilität und Konsistenz können ebenfalls diesem Buch entnommen werden.

**Satz 5.7.1**  *$X$  sei ein Banachraum, die Projektionsfolge  $\{\Pi_n\}$  mit  $\Pi_n \in L(X, X)$  sei konvergent, d.h.*

$$\Pi_n x \rightarrow x \quad \text{in } X \quad \forall x \in X$$

*und  $K$  sei kompakt  $K \in K(X, X)$ . Dann konvergieren die Operatoren  $K_n = \Pi_n K$  der semidiskreten Projektionsgleichung*

$$\lambda f_n = g_n + K_n f_n \quad g_n := \Pi_n g \quad (5.49)$$

*in der Operatornorm gegen  $K$ :*

$$\|K_n - K\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

*Wenn  $\lambda$  ein regulärer Wert ist, d.h.  $(\lambda I - K)^{-1} \in L(X, X)$ , ist die Diskretisierung (49) durch Projektion konvergent, stabil und konsistent. Die Projektionslösungen  $f_n$  erfüllen*

$$f_n \rightarrow f = (\lambda I - K)^{-1} g \quad \text{in } X \quad (5.50)$$

**Beweis:** Hackbusch [18], Satz 4.3.11

Zur Beurteilung der Brauchbarkeit der numerischen Methode hat man außer der Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  auch die Konvergenzgeschwindigkeit in Betracht zu ziehen. Man versucht also, eine quantitative Abschätzung des Fehlers  $(f_n - f)$  für einen festen Diskretisierungsparameter  $n$  zu erhalten. Folgender Satz gibt Aufschluß über die Ordnung der Konvergenz:

**Satz 5.7.2** Sei  $X = C(D)$ . Die Integralgleichung  $\lambda f = g + Kf$  habe eine Lösung  $f \in C^\tau(D)$  mit  $\tau > 0$ . Die Diskretisierung (49) sei stabil und die Projektion  $\Pi_n$  erfülle

$$\|f - \Pi_n f\|_\infty \leq cn^{-\tau} \|f\|_{C^\tau(D)} \quad (5.51)$$

Dann ist die Projektionsmethode konvergent von der Ordnung  $\tau$ :

$$\|f - f_n\|_\infty = O(n^{-\tau}) \quad (5.52)$$

**Beweis:** Hackbusch [18], Satz 4.3.15

Bezüglich der Konvergenzordnung werden somit Aussagen über die Glattheit der Lösung  $f$  von  $\lambda f = g + Kf$  benötigt.

Für das Einschichtmodell liefert Satz 5.2.2 die Konvergenzordnung  $O(n^{-\lambda})$  bezüglich der Maximumnorm.

Folgende Sätze sind nach Bemerkungen im Kapitel 9.1.4 [18] und nach Satz 4.4.7 [18] ebenfalls auf höherdimensionale Gebiete übertragbar und sollen zitiert werden:

**Satz 5.7.3 (Fehlerordnung)**  $f_n$  sei die Lösung der Kollokationsmethode mit stückweise linearer Interpolation in  $\Omega = I = [a, b]$  und äquidistanten Stützstellen  $\xi_m := a + (b-a)(m-1)/(n-1)$ ,  $1 \leq m \leq n$ .  $\lambda$  sei regulärer Wert des kompakten Operators  $K$ . Die Lösung  $f$  von  $\lambda f = g + Kf$  gehöre zu  $C_L^1(\Omega)$ . Für hinreichend großes  $n_0$  existieren die Lösungen  $f_n$  ( $n \geq n_0$ ) und konvergieren von zweiter Ordnung in der Maximumsnorm, d.h.

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \text{const} \cdot h_n^2.$$

**Beweis:** Hackbusch [18], Satz 4.4.7

Für die stückweise konstanten Ansatzfunktionen kann für eindimensionale Gebiete die Konvergenz erster Ordnung in der Maximumsnorm nachgewiesen werden (Bemerkung 4.4.8 [18]).

Bessere Abschätzungen sind in schwächeren Normen, durch stärkere Regularitätsforderungen an die Lösung  $f$  oder speziell in den Kollokationspunkten möglich.

Nach Definition der Projektion  $\Pi_n$  beim Kollokationsverfahren gilt für alle Kollokationspunkte  $\xi$   $f(\xi) = (\Pi_n f)(\xi)$ . Es entfällt in diesen Punkten der Fehler  $(f - \Pi_n f)(\xi)$ , so daß bleibt

$$f(\xi) - f_n(\xi) = (f - \Pi_n f)(\xi) + (\Pi_n f - f_n)(\xi) = (\Pi_n f - f_n)(\xi).$$

Dem folgenden Satz liegt eine eindimensionale Geometrie zugrunde, er kann aber wieder auf höherdimensionale Gebiete verallgemeinert werden:

**Satz 5.7.4 (Konvergenz in den Kollokationspunkten)** Sei  $\lambda$  kein Eigenwert des Integraloperators  $K \in K(C(I), C(I))$ .

1. Für das Kollokationsverfahren mit stückweise konstanten Ansatzfunktionen gilt für die Kollokationspunkte  $\xi$

$$\max\{|f(\xi) - f_n(\xi)|\} \leq \text{const} \cdot h \cdot \|f\|_{H^1(I)} \quad \forall f \in H^1(I),$$

falls  $K \in L(L^2(I), L^\infty(I))$  und

$$\max\{|f(\xi) - f_n(\xi)|\} \leq \text{const} \cdot h^2 \cdot \|f\|_{H^2(I)} \quad \forall f \in H^2(I),$$

falls  $K \in L(H^1(I)', L^\infty(I))$ , wobei  $(H^1)'$  den Dualraum des  $H^1$  bezeichne.

2. Für das Kollokationsverfahren mit stückweise linearen Ansatzfunktionen gilt für die Kollokationspunkte  $\xi$

$$\max\{|f(\xi) - f_n(\xi)|\} \leq \text{const} \cdot h^2 \cdot \|f\|_{H^2(I)} \quad \forall f \in H^2(I),$$

falls  $K \in L(L^2(I), L^\infty(I))$ .

**Beweis:** Hackbusch [18], Satz 4.4.17

In den Kollokationspunkten kann also unter gewissen Voraussetzungen eine sogenannte Superkonvergenz nachgewiesen werden.

Im mehrdimensionalen Fall muß zusätzlich der geometrische Diskretisierungsfehler betrachtet werden, da die Oberflächengeometrie durch Dreiecke angenähert wird. Es ergibt sich ein zusätzlicher Fehler von

$$\|D - D_\Delta\|_\infty \leq O(h),$$

wobei  $D$  die Matrix (12) sei und  $D_\Delta$  die zugehörige Matrix nach Diskretisierung der Oberfläche (Hackbusch [18], Kapitel 9.2.4).

Für weitere Konvergenz- und Fehleruntersuchungen sei auf die Literatur (Wendland [58]) verwiesen.

## 5.8 Programmierung und Auswertung

### 5.8.1 Programmierung

Zu Beginn der Arbeit lag am INSERM U280 de Lyon ein Programm zur Lösung des direkten Problems über die Randelementmethode mit Kollokation im Massenzentrum und stückweise konstanten Ansatzfunktionen vor (im folgenden Massenzentrumsmethode genannt). Von Interesse war ein Genauigkeitsvergleich mit der Kollokation in den Dreieckseckpunkten und stückweise linearer Interpolation auf den Oberflächenelementen mit analytischer Berechnung der auftretenden Integrale (Methode der linearen Interpolation). Im Programm sollte der Speicherbedarf dynamisch an gegebene Oberflächengitter angepaßt werden. In Lyon wurde unter dem Betriebssystem UNIX in der Programmiersprache C ein Einschichtmodell entwickelt, welches nach der Rückkehr nach Aachen in ein Dreischichtmodell erweitert wurde. Die Implementation des isolierten Problems wurde begonnen, wegen der Dringlichkeit der Weiterentwicklung der inversen Methoden im FE-Programmsystem CAUCHY aber nicht abgeschlossen.

Auf Kugelgeometrien existieren analytische Lösungen für das gesuchte Potential unter Monopol- und Dipolquelleinleitung (Zhang et al. [64], de Munck [13], Wieringa [60], Herleitung über Legendre-Polynome). An bereits implementierten analytischen Lösungen für ein Einschicht- und für ein Dreischichtkugelmodell sollte ein Vergleich der beiden Kollokationsmethoden durchgeführt werden. Es wurden radiale und tangentiale Dipole mit verschiedenen Exzentrizitäten, d.h. Entfernungen zum Kugelmittelpunkt, verwendet.

Die drei überlagerten Kugeln des Dreischichtkugelmodells haben die Radien 0.0783, 0.0828 und 0.09. Die Exzentrizität des Dipols sei definiert über die Dipolentfernung zum Ursprung im Verhältnis zum Radius der äußeren Kugel. Sie befindet sich somit im Bereich 0 bis  $0.87 = \frac{0.0783}{0.09}$ . Mit Exzentrizität 0.87 würde sich der Dipol somit auf der inneren Grenzfläche  $\Gamma_1$  befinden. Auch beim Einschichtmodell bedeute eine Exzentrizität von 0.87

im weiteren Lage des Dipols auf der Kugeloberfläche.

Zwei verschieden feine Dreiecksdiskretisierungen der Kugeloberflächen wurden vom INSERM U280 zur Verfügung gestellt, 600 Dreiecke pro Oberfläche (300 Dreieckseckpunkte) bzw. 300 Dreiecke pro Oberfläche (153 Eckpunkte).

Bei der Massenzentrumsmethode wird für das Einschichtmodell ein Gleichungssystem  $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b}$  der Größe  $M \times M$  ( $M$  : Anzahl Dreiecke) gelöst, bei der Methode der linearen Interpolation ein Gleichungssystem der Größe  $N \times N$  ( $N$  : Anzahl Eckpunkte). Die Matrizen sind rein geometrieabhängig, bei Änderung der Quelleinleitung wird nur der Vektor  $\mathbf{b}$  verändert. Für die Berechnung der Geometriematrix stehen den  $(36 \cdot M^2)$  Punktoperationen plus  $(M^2)$  Arcustangensauswertungen bei der Massenzentrumsmethode  $(186 \cdot M \cdot N)$  Punktoperationen plus  $(M \cdot N)$  Arcustangens- und  $(M \cdot N \cdot 3)$  Logarithmusauswertungen für die lineare Interpolation gegenüber.

Zur Ermittlung der Einflußmatrix werden die Gleichungssysteme sehr häufig für verschiedene Dipole bei gleicher Geometrie gelöst. Somit rechtfertigt der Rechenaufwand einen Vergleich der Kollokation im Massenzentrum mit 300 Dreiecken pro Oberfläche mit der feineren Diskretisierung für die lineare Interpolation. Die Berechnung der Geometriematrix wird bei der linearen Interpolation und 600 Dreiecken mit 33.48 Millionen Punktoperationen, 180000 Arcustangens- und 540000 Logarithmusauswertungen gegenüber 3.24 Millionen Punktoperationen und 90000 Arcustangensauswertungen bei der Massenzentrumsmethode mit 300 Dreiecken mehr Rechenzeit benötigen (auf modernen Rechenanlagen einige Sekunden).

### 5.8.2 Fehlerkriterien

Bezeichne  $\tilde{\Phi}$  die numerische und  $\Phi$  die analytische Lösung des auf den Grenzflächen berechneten Potentials. Diese sollen nun auf der äußeren Kugeloberfläche verglichen werden.  $\Phi_n$  sei das analytisch,  $\tilde{\Phi}_n$  das numerisch berechnete Potential im Massenzentrum des Dreiecks  $\Delta_n$ . Es wurden zwei Fehlerkriterien verwendet (Meijs [33]), der RDM (Relative difference measure) und der MAG (Magnification factor).

Der

$$\text{RDM} := \sqrt{\int_{\Gamma_p} \left( \frac{\Phi}{\sqrt{\int_{\Gamma_p} \Phi^2 d\Gamma}} - \frac{\tilde{\Phi}}{\sqrt{\int_{\Gamma_p} \tilde{\Phi}^2 d\Gamma}} \right)^2 d\Gamma},$$

ist ein Maß für den Fehler in der Topographie (Optimum RDM = 0), der

$$\text{MAG} := \frac{\sqrt{\int_{\Gamma_p} \tilde{\Phi}^2 d\Gamma}}{\sqrt{\int_{\Gamma_p} \Phi^2 d\Gamma}},$$

gibt Aufschluß über den Fehler in der Amplitude (Optimum MAG = 1).

### 5.8.3 Diskussion der Ergebnisse im Kugelmodell

Im Programm wurden simple Quadraturformeln zur Berechnung der Fehler implementiert. Der RDM wurde über

$$\text{RDM} = \sqrt{\sum_{n=1}^M \left( \frac{\Phi_n}{\sqrt{\sum_{n=1}^M \Phi_n^2 A(\Delta_n)}} - \frac{\tilde{\Phi}_n}{\sqrt{\sum_{n=1}^M \tilde{\Phi}_n^2 A(\Delta_n)}} \right)^2} A(\Delta_n) \quad (5.53)$$

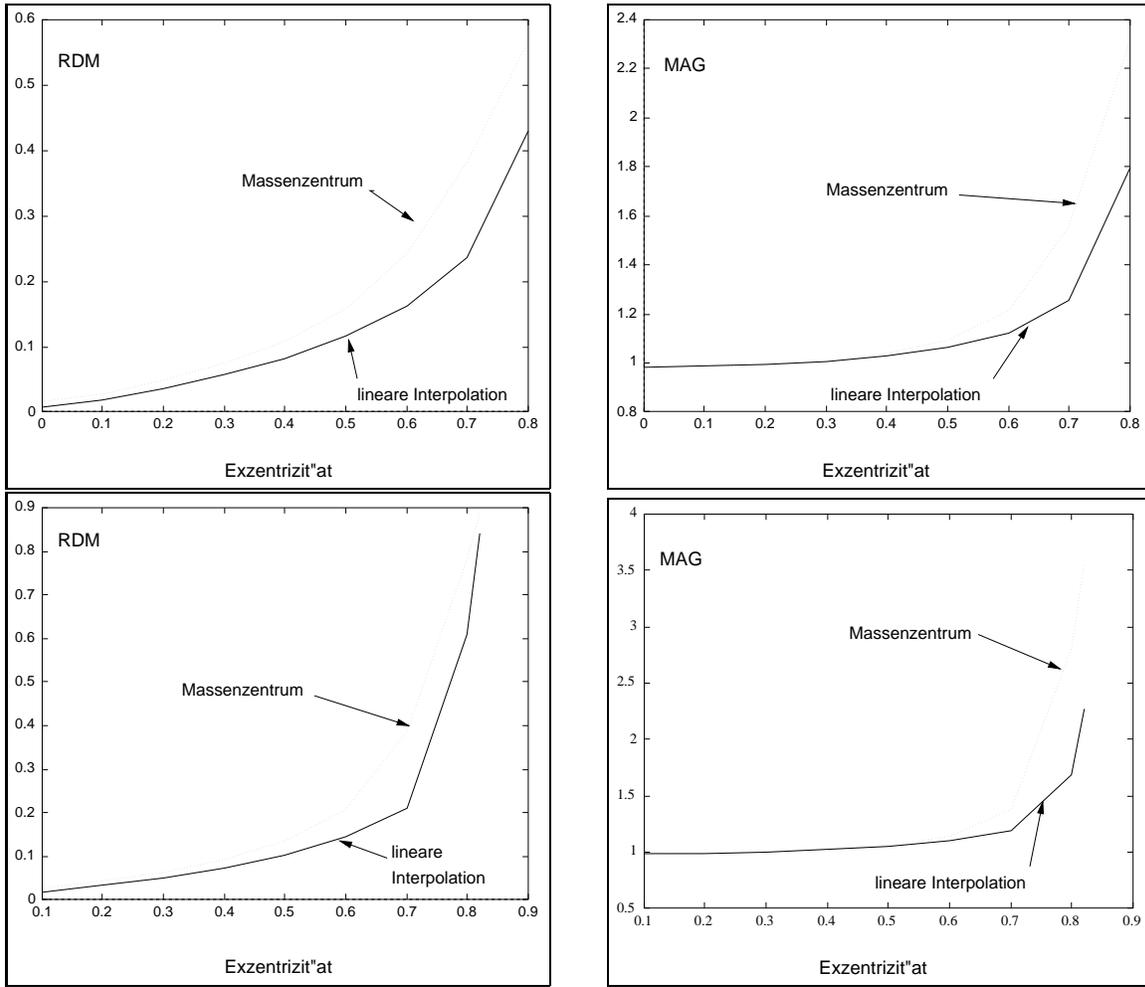


Abbildung 5.1: RDM und MAG für die Quelleinleitung über einen Stromdipol im Einschichtmodell; oben radiale, unten tangentielle Ausrichtung.

bestimmt, der MAG über

$$\text{MAG} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^M \tilde{\Phi}_n^2 A(\Delta_n)}}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \Phi_n^2 A(\Delta_n)}}. \quad (5.54)$$

Seien die Eckpunkte des Dreiecks  $n$  mit  $\mathbf{x}_0^n$ ,  $\mathbf{x}_1^n$  und  $\mathbf{x}_2^n$  und das zugehörige Massenzentrum mit  $\mathbf{x}_c^n$  bezeichnet.

Für die Methode der linearen Interpolation wurden aus den berechneten Potentials auf den Dreieckseckpunkten über

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_c^n) &= \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_0^n)h_0^n(\mathbf{x}_c^n) + \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_1^n)h_1^n(\mathbf{x}_c^n) + \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_2^n)h_2^n(\mathbf{x}_c^n). \\ &= \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_0^n) \frac{\det(\mathbf{x}_c^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)}{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)} + \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_1^n) \frac{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_c^n, \mathbf{x}_2^n)}{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)} + \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_2^n) \frac{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_c^n)}{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)} \\ &= \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_0^n) \frac{\det(\mathbf{x}_c^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)}{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)} + \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_1^n) \frac{\det(\mathbf{x}_c^n, \mathbf{x}_2^n, \mathbf{x}_0^n)}{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)} + \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_2^n) \frac{\det(\mathbf{x}_c^n, \mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n)}{\det(\mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n, \mathbf{x}_2^n)} \end{aligned}$$

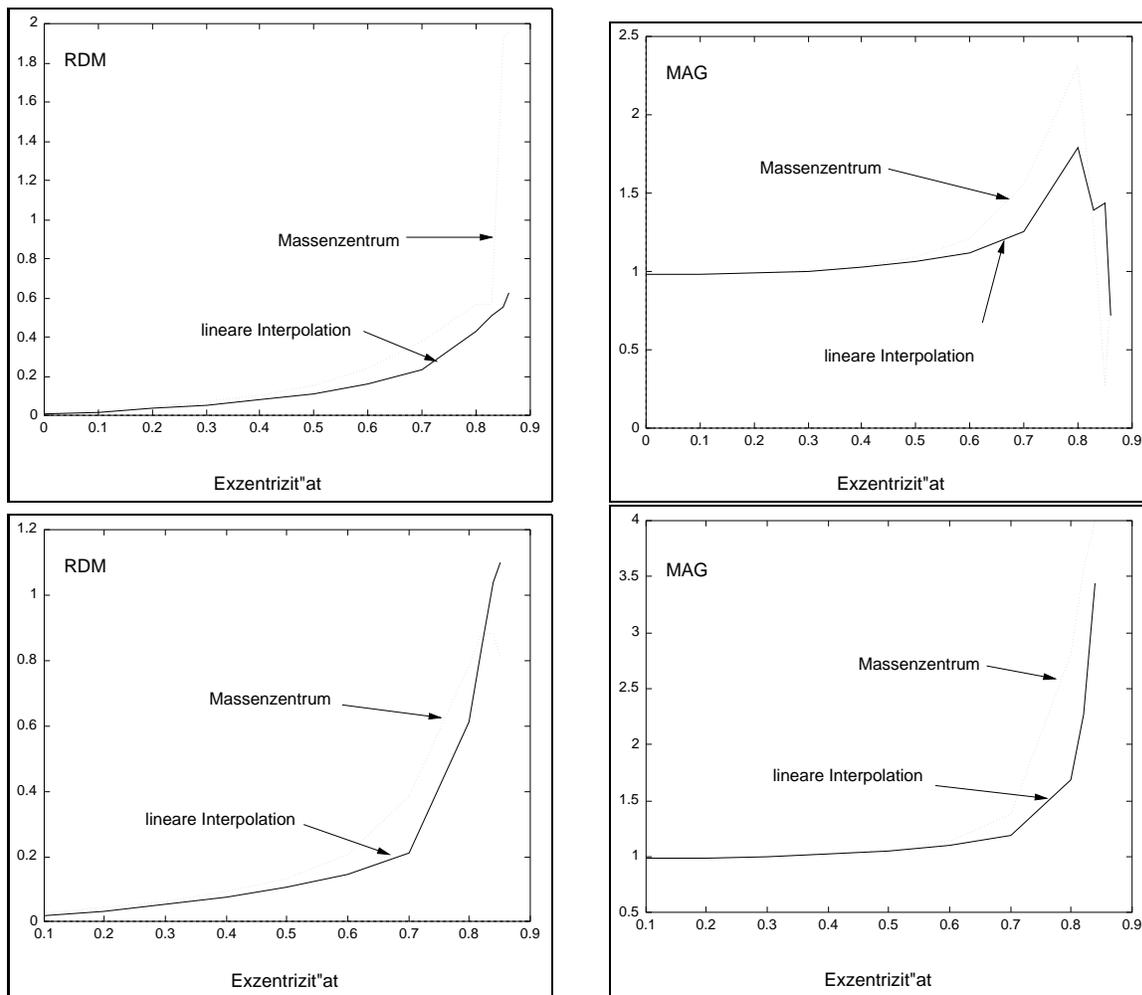


Abbildung 5.2: RDM und MAG für die Quelleinleitung über einen Stromdipol im Dreischichtmodell; oben radiale, unten tangentielle Ausrichtung.

$$= \sum_{i=0}^2 \tilde{\Phi}(\mathbf{x}_i^n) \frac{\langle \mathbf{x}_c^n, \mathbf{x}_{(i+1) \bmod 3}^n \times \mathbf{x}_{(i+2) \bmod 3}^n \rangle}{\langle \mathbf{x}_0^n, \mathbf{x}_1^n \times \mathbf{x}_2^n \rangle} \quad (5.55)$$

die Potentiale im Massenzentrum berechnet.

Diese Vorgehensweise wird sich sicherlich zuungunsten der Methode der linearen Interpolation auswirken. In den Kollokationspunkten kann nach Kapitel 5.7 eine bessere Konvergenz erwartet werden, so daß die Methode der linearen Interpolation durch die Auswertung im Massenzentrum benachteiligt ist.  $\tilde{\Phi}$  wird zudem für den linearen Ansatz nicht exakt integriert.

Die Abbildung 5.1 zeigt Topographie- und Amplitudenfehler bei radialer bzw. tangentialer Quelleinleitung durch einen Stromdipol für das Einschichtmodell. Trotz Benachteiligung der linearen Interpolation durch die Fehlerformeln erkennt man die bessere Approximation des gesuchten Potentials im Vergleich zur Massenzentrumsmethode. Mit steigender Exzentrizität des Dipols nimmt die Genauigkeit beider Kollokationsmethoden stark ab.

Die grobe Vergitterung der Kugeloberfläche reicht nicht mehr aus.

Die Abbildung 5.2 zeigt Topographie- und Amplitudenfehler bei radialer bzw. tangentialer Quelleinleitung durch einen Stromdipol für das Dreischichtmodell ohne Isolation der Knochenschicht. Wie schon beim Einschichtmodell zeigen sich Vorteile der Kollokation mit linearen Ansatzfunktionen und analytischer Berechnung der Integrale. Tests mit Quadraturverfahren höherer Ordnung für das analytische Potential und exakter Integration von  $\Phi$  sollten durchgeführt werden, da sie diese Vorteile stärker herausstellen werden. Im Vergleich Dreischichtmodell mit linearem Ansatz ohne Isolation der Knochenschicht gegen Kollokation im Massenzentrum mit isoliertem Knochen (ohne Abbildung) zeigt sich bei tangentialem Dipol mit einer Exzentrizität von 0.8, wie wichtig die gesonderte Behandlung des Potentials auf den Schichtgrenzen innerhalb der Knochenschicht ist (RDM 0.755 gegen 0.7217, MAG 2.181 gegen 1.3426).

Für beide Methoden führt eine hohe Exzentrizität zu großen numerischen Fehlern. Nähert sich eine Quelle der inneren Grenzschicht, so weist das Potential auf der Grenzfläche in der Nähe der Quelle einen großen Gradienten auf. Hier reicht die grobe Vergitterung der Kugeloberflächen nicht mehr aus und es ergeben sich größere Fehler.

Am INSERM U280 wurde die numerische Genauigkeit der Massenzentrumsmethode mit Isolation der Knochenschicht im Dreischichtkugelmodell anhand der analytischen Lösung für sechs verschieden feine Oberflächenvernetzungen untersucht (Yvert et al. [62]). Es wurden globale Netzdichten (GD, Global Density) von GD= 0.16 bis GD= 1.33 Dreiecken pro Quadratcentimeter getestet, die zugehörige Anzahl Dreiecke wird mit  $N$  bezeichnet (Abbildung 5.3). Eine Dipoltiefe von 78.3 mm entspricht einer Exzentrizität 0, eine Dipoltiefe von 1.8 mm der Exzentrizität 0.85. Setzt man die Akzeptanzschwelle für den RDM-Fehler bei 5% an, so sieht man, daß selbst bei einer globalen Netzdichte von GD= 1.33 der Topographie-Fehler für oberflächennahe Quellen nicht zu akzeptieren ist.

Es wurden dann lokal verfeinerte Netze getestet [62]. Die Dipole wurden auf der z-Achse mit verschiedener Exzentrizität gesetzt. Die lokale Netzdichte (LD, Local Density) wurde von LD= 2.8 bis auf LD= 18 Dreiecke pro Quadratcentimeter erhöht. Bei einer lokalen Netzdichte von ca. 10 Dreiecken pro Quadratcentimeter blieb der Topographiefehler auch für stark exzentrische Dipole unter 5%. Der MAG bewegte sich für alle getesteten Exzentrizitäten zwischen 0.9 und 0.95 und scheint stärker von der globalen Netzdichte abzuhängen.

#### 5.8.4 Numerische Tests in realer Geometrie

Anhand von Kernspinresonanz-Tomographie-Bildern wurden die Oberflächen von Kopfhaut, Knochen und Hirn rekonstruiert und vernetzt (siehe Abbildung 5.5). Da für die reale Geometrie keine analytische Berechnung des Potentials mehr möglich ist, wurden auf einem sehr feinen Gitter (globale Netzdichte 1.3 und lokale Netzdichte 15 Dreiecke pro  $\text{cm}^2$ , insgesamt 6016 Dreiecke pro Oberfläche) für radiale und tangentiale Dipole Referenzlösungen an 66 Elektrodenpositionen (gemäß internationalem 10-20 System) ermittelt. Die Lösungen anhand von gröberem Gittern wurden dann an diesen 66 Punkten mit der Referenzlösung verglichen und der Fehler RMS ausgewertet. RMS.T steht für tangentiale, RMS.R für radiale Dipole. Die ersten getesteten Netze (set 1) wurden nicht lokal verfeinert. Es wurden die Potentialwerte an den Elektrodenpositionen bei globalen Netzdichten zwischen GD= 0.25 und GD= 1.3 Dreiecken pro Quadratcentimeter mit der Lösung des Referenzmodells verglichen. Für exzentrische Dipole ergaben sich wieder in-

akzeptable Abweichungen. Im weiteren wurden dann im temporalen Bereich verfeinerte Netze verwendet. Bei lokaler Verfeinerung im Bereich  $LD= 3.2$  und globaler Netzdichte von  $GD= 0.9$  konnte der RMS auch für exzentrische Quellen unter 15 % gedrückt werden. Tiefe Quellen sind weniger problematisch.

# Anhang B

## Verzeichnis der verwendeten Symbole

Bezeichnung	Erklärung
$a(\cdot, \cdot)$	Bilinearform
$A$	Kompakter Operator $\in K(X, Y)$
$A^+$	Verallgemeinerte Inverse zu $A$
$\mathbf{A}$	Vektorpotential
$\alpha$	Elliptizitätskonstante
$ \beta $	Ordnung des Multiindex $\beta$
$\mathbf{B}$	Magnetische Induktion
BE-Methode	Boundary-Element-Methode
$C$	Diagonalmatrix zur Wichtung der Meßkanäle
$\text{CL}^-$	Chlor-Ion
$C(\Omega)$	Menge der auf $\Omega$ stetigen Funktionen
$C^k(\Omega)$	Menge der Funktionen mit stetigen Ableitungen der Ordnung $k$
$C_0^k(\Omega)$	Unterraum von $C^k(\Omega)$ der Funktionen mit kompaktem Träger
$C_U^{\text{klass}}$	$\{v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \int_{\Omega} v d\Omega = 0\}$
COF	Complete Orthogonal Factorization
C.-S.	Ungleichung von Cauchy-Schwarz
$\mathbf{D}$	Dielektrische Verschiebung
$d\Gamma$	Oberflächenelement der Oberfläche $\Gamma$
$d\mathbf{\Gamma}$	$\mathbf{n} d\Gamma$
$d(\Phi, V)$	Abstand des Elements $\Phi$ vom Raum $V$
$D_K(\Omega)$	Funktionen $\varphi$ in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\text{Tr}(\varphi) \subset K$
$D(\Omega)$	$\bigcup_{K \subset \Omega} D_K(\Omega)$
$\nabla \cdot \mathbf{A}$	Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{A}$
$E$	Einflußmatrix
$E_q$	Einflußmatrix zum Quellorttupel $q$
$\mathbf{E}$	Elektrische Feldstärke
EEG	Elektroencephalographie
EP	Evozierte Potentiale
$\epsilon_i$	Rauschen des Meßkanals $i$
$\epsilon$	Relative Dielektrizitätszahl
$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante des Vakuums

EPSP	Exzitatorisches postsynaptisches Potential
$E^{tr}$	Transponierte der Matrix $E$
$F_\gamma$	Filter des Regularisierungsverfahrens $T_\gamma$
FE-Methode	Methode der finiten Elemente
$\forall$	für alle
F.-U.	Friedrichssche Ungleichung
$\Gamma$	Berandung des Gebiets $\Omega$
$\Gamma_i$	Äußere Grenzfläche der Schicht $\Omega_i$
$g_{K^+}$	Kalium-Leitfähigkeit der Neuronmembran
$g_{NA^+}$	Natrium-Leitfähigkeit der Neuronmembran
$\exists$	gibt es
Inf	Menge der Einflußknoten $\{i_1, \dots, i_{n_{\text{inf}}}\}$
$i_j$	$j$ -te Einflußknoten
$n$	$n_{\text{dip}} \cdot n_{\text{rich}}$
$\mathbf{n}(\mathbf{y})$	Auswärts gerichtete Einheitsnormale am Punkt $\mathbf{y}$
$\partial/\partial n$	Ableitung in Richtung der äußeren Normalen
$\nabla U$	Gradient des skalaren Feldes $U$
$\mathbf{H}$	Magnetische Feldstärke
$h_i$	$i$ -tes Basiselement
$h_T, \rho_T$	Umkreis- bzw. Inkreisradius von $T$
$I$	Stromstärke, Einheit: Ampère (A)
IPSP	Inhibitorisches postsynaptisches Potential
$\mathbf{j}$	Elektrische Stromdichte
$\mathbf{j}_p$	Primärstromdichte
$J_p$	Stromquellendichte ( $J_p = \nabla \cdot \mathbf{j}_p$ )
$k$	Komplexe Wellenzahl
$K^+$	Kalium-Ion
$K(X, Y)$	$\{T \in L(X, Y) : T \text{ ist kompakt}\}$
$K_\epsilon(\mathbf{x})$	Kugel mit Radius $\epsilon$ um den Punkt $\mathbf{x}$
$\partial K_\epsilon$	Oberfläche der Kugel $K_\epsilon$
$\lambda$	Eigenwert
$\lambda(T)$	Spektrum des Operators $T$ : $\lambda(T) := \{\lambda \in \mathcal{R} : \lambda I - T \text{ ist nicht invertierbar}\}$
$\Delta$	Laplace-Operator
$l(\cdot)$	Funktional
$L(X, Y)$	Raum der linearen Operatoren von $X$ nach $Y$
$L^2(\Omega)$	Raum der über $\Omega$ quadrat-integrierbaren Funktionen
$L^\infty(\Omega)$	Raum der über $\Omega$ beschränkten Funktionen
$\mathbf{M}$	Moment des mathematischen Stromdipols
$\mu$	Relative Permeabilitätszahl
$\mu(\Omega)$	Volumen von $\Omega$
$\mu_0$	Permeabilitätszahl des Vakuums
$\mathcal{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$NA^+$	Natrium-Ion
$N(E)$	Kern des Operators $E$ : $\{M \in \mathcal{R}^n : EM = 0\}$
NC	NormalenConstraint (anatomische Vorüberlegung)
$n_{\text{inf}}$	Anzahl Einflußknoten
$n_{\text{rich}}$	Anzahl Richtungen der Quelleinspeisung
$n_{\text{dip}}$	Geschätzte Anzahl aktiver Quellen bei der scharfen inversen Quellsuche

$m$	Anzahl der Meßabnehmer (EEG/MEG)
MEG	Magnetoencephalographie
$O(\cdot)$	Landau-Symbol: $f(x) = O(g(x))$ , falls $ f(x)  \leq \text{const}  g(x) $
OC	Ohne Normalenconstraint (ohne anatomische Vorüberlegung)
$\omega$	Kreisfrequenz
$\Omega$	Gebiet des Volumenleiters Kopf
$\Omega_i$	$i$ -te Schicht im Mehrschichtmodell
$\overline{\Omega_i}$	Abschluß der Schicht $\Omega_i$
$\Omega_{\text{Zyl}}$	Gebiet des aktivierten Neuronenverbands (Zylinder)
$p$	Anzahl Schichten des schichtweise homogenen Volumenleiters
$P_{\overline{R(A)}}$	Projektion auf $\overline{R(A)}$
$\partial_i$	partielle Ableitung $\partial/\partial x_i$
$\partial^\alpha$	partielle Ableitung der Ordnung $\alpha$
$\Phi$	Elektrisches Potential
$\Phi^n$	Ritz-Galerkin-Lösung im Raum $V_n$
$\Phi$	Koeffizientenvektor von $\Phi^n$ bzgl. der Basis $\{h_1, \dots, h_n\}$
$\Psi$	Magnetischer Fluß
$Q$	Orthogonale Matrix
$\mathcal{R}$	Menge der reellen Zahlen
$R(A)$	$\{g \in Y : \exists f \in X \text{ mit } Af = g\}$
$R(A)^\perp$	Orthogonale Komplement von $R(A)$
$r_i$	Radius der Oberfläche $\Gamma_i$
$\rho$	Elektrische Ladungsdichte
$\rho(A)$	Spektralradius der Matrix $A$
$\nabla \times \mathbf{A}$	Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{A}$
$\mathbf{s}$	Vektor der Quellstärken
$\mathbf{s}^+$	$= E^+ \mathbf{v}$ Lösung minimaler Norm bei unverrauschten Daten
$\mathbf{s}^\epsilon$	Berechnete Quellstärken bei verrauschten Meßdaten
$\mathbf{s}_\epsilon^+$	$= E^+ \mathbf{v}^\epsilon$ Lösung minimaler Norm bei verrauschten Daten
SA	Simulated Annealing
SA-COF	Simulated Annealing in Kombination mit kompletter orthogonaler Faktorisierung (ohne Regularisierung)
SA-TSVD	Simulated Annealing in Kombination mit abgeschnittener Singulärwertzerlegung (mit Regularisierung)
$\sigma$	Elektrische Leitfähigkeit
$\sigma_i^- = \sigma_i = \sigma_{i-1}^+$	Leitfähigkeit der $i$ -ten Schicht im Mehrschichtmodell
$s_i$	$i$ -ter Singulärwert
SN	Signal-Rausch-Verhältnis
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Duale Paarung (Skalarprodukt)
$\langle f, g \rangle_\nu$	$\sum_n s_n^{-2\nu} \langle f, v_n \rangle \langle g, v_n \rangle$ , Skalarprodukt in $X_\nu$
$H^m(\Omega)$	Sobolevraum von $L_2$ -Funktionen mit quadrat-integrierbaren Ableitungen bis zur Ordnung $m$
$H_U^1$	$\{v \in H^1(\Omega), \int_\Omega v d\Omega = 0\}$
$H'$	Dualraum zu $H$
$\ \cdot\ _m$	Sobolevnorm der Ordnung $m$
$\ f\ _\nu$	$(\sum_n s_n^{-2\nu}  \langle f, v_n \rangle ^2)^{1/2}$ , Norm in $X_\nu$
$\ \cdot\ _{0,\Gamma}$	$L_2$ -Norm auf $\Gamma$
$ \cdot _m$	Sobolevseminorm der Ordnung $m$

$\text{span}\{h_1, \dots, h_n\}$	Erzeugnis von $\{h_1, \dots, h_n\}$
SQUIDS	Superconducting QUantum Interference DeviceS
$\ \cdot\ _{L^\infty}$	Suprenumsnorm
T	Tesla, Einheit der magnetischen Induktion, $1\text{T}=1\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$
$\tau$	Triangulation von $\Omega$
$T_i$	$i$ -tes finites Element der Triangulation von $\Omega$
$T_\gamma$	Regularisierung von $A^+$ mit Regularisierungsparameter $\gamma$
$\text{Tr}(f)$	Träger der Funktion $f$
TSVD	Truncated Singular Value Decomposition
$U$	Bei der Singulärwertzerlegung entstehende orthogonale Matrix aus $\mathcal{R}^{m \times m}$
$u_i$	$i$ -ter Eigenvektor von $AA^*$
$\mathbf{u}_i$	$i$ -ter Eigenvektor von $EE^{tr}$
$\Upsilon$	Leiterschleife beim MEG
$\mathbf{v}$	Vektor der unverrauschten Potential- und Flußwerte an den Meßabnehmern
$\mathbf{v}^\epsilon$	$= \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ Vektor der verrauschten Potential- und Flußwerte an den Meßabnehmern
$\Delta\mathbf{v}$	Rauschen in den Meßdaten
$v_i$	$i$ -ter Eigenvektor von $A^*A$
$\mathbf{v}_i$	$i$ -ter Eigenvektor von $E^{tr}E$
$V$	Bei der Singulärwertzerlegung entstehende orthogonale Matrix aus $\mathcal{R}^{n \times n}$
$\text{Var}(\cdot)$	Variationsaufgabe
$V_n$	$n$ -dimensionale Teilraum des Raums $V$
$X_\nu$	$= R((A^*A)^{\nu/2})$ , Prähilbertskala
$\xi_m$	Kollokationspunkt $m$

# Literaturverzeichnis

- [1] Aarts, E., Korst, J. SIMULATED ANNEALING AND BOLTZMANN MACHINES; A STOCHASTIC APPROACH TO COMBINATORIAL OPTIMIZATION AND NEURAL COMPUTING. John Wiley & Sons, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore
- [2] Beckmann, R., Buchner, H., Knoll, G. INVERSE LOCALIZATION OF NEURONAL ACTIVITY ON OPPOSITE WALLS OF A SIMULATED SULCUS. Third International Hans Berger Congress, Jena, Oktober 1996
- [3] Beckmann, R. FINITE-ELEMENTE ANALYSE DER ELEKTRISCHEN AKTIVITÄT DES ZENTRALNERVENSYSTEMS SOWIE LÖSUNG DES INVERSEN PROBLEMS. Diplomarbeit im Maschinenbau, Mai 1993, Institut für Maschinenelemente und Maschinengestaltung der RWTH Aachen
- [4] Bertrand, O., Thévenet, M. and Perrin, F. EFFECTS OF SCULL HOLES ON THE SCALP POTENTIAL DISTRIBUTION EVALUATED WITH A FINITE ELEMENT MODEL. In: Proc. Satellite Symp. on Neuroscience and Technology. 14th Annual Int. Conf. of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, Lyon, 1992:42-45
- [5] Braess, Dietrich FINITE ELEMENTE. Springer-Verlag, 1992
- [6] Bronstein-Semendjajew TASCHENBUCH DER MATHEMATIK. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main
- [7] Buchner, H., Fuchs, M., Wischmann, H.-A., Dössel, O., Ludwig, I., Knepper, A., Berg, P. SOURCE ANALYSIS OF MEDIAN NERVE AND FINGER STIMULATED SOMATOSENSORY EVOKED POTENTIALS: MULTICHANNEL SIMULTANEOUS RECORDING OF ELECTRIC AND MAGNETIC FIELDS COMBINED WITH 3D-MR-TOMOGRAPHY. Brain Topography, Vol.6, Nr.4, 1994
- [8] Buchner, H., Adams, L., Knepper, A., Rüger, R., Laborde, G., Ludwig, I., Reul, J. and Scherg, M. PRE-OPERATIVE DETERMINATION OF THE CENTRAL SULCUS BY DIPOLE SOURCE ANALYSIS OF EARLY SOMATOSENSORY EVOKED POTENTIALS AND 3D-NMR-TOMOGRAPHY. J.Neurochir., 1994
- [9] Buchner, H., Rienäcker, A., Beckmann, R., Pesch, J., Fuchs, M., Wagner, M., Silny, J. and Knoll, G. INVERSE LOCALIZATION OF ELECTRIC DIPOLE CURRENT SOURCES IN FINITE ELEMENT MODELS OF THE HUMAN HEAD. Electroenceph. clin. Neurophysiol., to appear
- [10] Buchner, H., Beckmann, R., Rienäcker, A., Pohlmeier, Wagner, M., Fuchs, M., Pesch, J., Wolters, C., Silny, J. and Knoll, G. EEG/MEG SOURCE RECONSTRUCTION, -THE FUNCTIONALITY OF CAUCHY-. ISBET, Zürich 1997

- [11] Dahmen, W. MULTISKALENMETHODEN. Vorlesung an der RWTH Aachen, Sommersemester 1995
- [12] de Munck, J.C. A LINEAR DISCRETIZATION OF THE VOLUME CONDUCTOR BOUNDARY INTEGRAL EQUATION USING ANALYTICALLY INTEGRATED ELEMENTS. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.39,No.9,september 1992
- [13] de Munck, J.C. A MATHEMATICAL AND PHYSICAL INTERPRETATION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD OF THE BRAIN. Ph.D.Thesis, University of Amsterdam, The Netherlands, 1989
- [14] Engl,H.W., Gfrerer,H. A POSTERIORI PARAMETER CHOICE FOR GENERAL REGULARIZATION METHODS FOR SOLVING LINEAR ILL-POSED PROBLEMS. Appl.Numer.Math.4, 1988, 395-417
- [15] Fender, D.H. MODELS OF THE HUMAN BRAIN AND THE SURROUNDING MEDIA: THEIR INFLUENCE ON THE RELIABILITY OF SOURCE LOCALIZATION. J. clin. Neurophysiol., Vol.8, 1991, pp.381-390
- [16] Friedrich, V., Hofmann, B., Tautenhahn, U. MÖGLICHKEITEN DER REGULARISIERUNG BEI DER AUSWERTUNG VON MESSDATEN. Wissenschaftliche Schriftenreihe der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, 10/1979
- [17] Hackbusch, W. THEORIE UND NUMERIK ELLIPTISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. Teubner Studienbücher, 1986
- [18] Hackbusch, W. INTEGRALGLEICHUNGEN, THEORIE UND NUMERIK. Teubner Studienbücher, 1989
- [19] Hämmerlin, G., Hoffmann, K.-H. NUMERISCHE MATHEMATIK. Springer-Verlag, 2.Auflage, 1991
- [20] Helmholtz, H. ÜBER EINIGE GESTZE DER VERTHEILUNG ELEKTRISCHER STRÖME IN KÖRPERLICHEN LEITERN, MIT ANWENDUNG AUF DIE THIERISCH-ELEKTRISCHEN VERSUCHE. Ann.Phys.Chem., vol.89, pp.211-233, pp.353-377, 1853
- [21] Hämäläinen, M.S., Sarvas, J. REALISTIC CONDUCTIVITY GEOMETRY MODEL OF THE HUMAN HEAD FOR INTERPRETATION OF NEUROMAGNETIC DATA. In: M.S.Hämäläinen Interpretation of Neuromagnetic Measurements: Modelling and Statistical Considerations, Ph.D.thesis, Helsinki University of Technology. Finland, 1987.
- [22] Heuser, H. LEHRBUCH DER ANALYSIS, TEIL 2. B.G.Teubner Stuttgart, 1991
- [23] Heuser, H. FUNKTIONALANALYSIS. Teubner Stuttgart, 1975
- [24] Hofmann, Bernd REGULARIZATION FOR APPLIED INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS. Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig, 1986
- [25] Ilmoniemi, R.J. MAGNETIC SOURCE IMAGING. Biological Effects of Electric and Magnetic Fields, Vol2, D.O.Carpenter and S.Ayrapetyan
- [26] Jantscher, Lothar DISTRIBUTIONEN. W. De Gruyter, 1971
- [27] Kernighan & Ritchie. PROGRAMMING LANGUAGE C. Prentice Hall Software Series

- [28] Lynn, M.Stuart, Timlake, William P. THE USE OF MULTIPLE DEFLATIONS IN THE NUMERICAL SOLUTION OF SINGULAR SYSTEMS OF EQUATIONS, WITH APPLICATIONS TO POTENTIAL THEORY. SIAM J. Numer.Anal., Vol.5, No.2, june 1968
- [29] Louis, A.K. INVERSE UND SCHLECHT GESTELLTE PROBLEME. Teubner-Verlag,1989
- [30] Louis, Maaß, Rieder WAVELETS. Teubner-Verlag, 1994
- [31] Schäffler, A., Schmidt, S. MENSCH, KÖRPER, KRANKHEIT. Jungjohann Verlag bei Gustav Fischer, 2.Auflage, 1996
- [32] Meijs, J.W.H., Peters, M.J. THE EEG AND MEG, USING A MODEL OF EXCENTRIC SPHERES TO DESCRIBE THE HEAD. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.34,pp.913-920, 1987
- [33] Meijs, J.W.H., Weier, O.W., Peters, M.J., van Oosterom, A. ON THE NUMERICAL ACCURACY OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.36, pp.1038-1049, 1989
- [34] Melkman, A.A., Micchelli, C.A. OPTIMAL ESTIMATION OF LINEAR OPERATORS IN HILBERT SPACES FROM INACCURATE DATA. SIAM, J.Numer.Anal. 16, 1979, 87-105
- [35] Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H.,Teller, E. EQUATION OF STATE CALCULATIONS BY FAST COMPUTING MACHINES. J.of Chemical Physics, 1953, 21, 1087
- [36] Nolting, W. ELEKTRODYNAMIK. Grundkurs: Theoretische Physik, Band 3, Verlag Zimmermann-Neufang
- [37] Nunez, P.L. LOCALIZATION OF BRAIN ACTIVITY WITH ELECTROENCEPHALOGRAPHY. In: S. Sato (Ed.), Magnetoencephalography, Raven Press, New York, 1990, 39-65
- [38] Okada, Y. NEUROGENESIS OF EVOKED MAGNETIC FIELDS. Biomagnetism, Erné, S.N., Hahlbohm, H.D. and Lübbig, H.(eds.), de Gruyter, Berlin, pp.399-408,1981
- [39] Penfield, W. and Jasper, H. EPILEPSY AND THE FUNCTIONAL ANATOMY OF THE HUMAN BRAIN. Little, Brown, Boston (1954)
- [40] Pesch, Jörg ÜBERPRÜFUNG INVERSER FELDBERECHNUNGEN IM MODELL AM BEISPIEL DES ELEKTROENCEPHALOGRAMMS. Diplomarbeit in Physik, Oktober 1995, Helmholtz-Institut für Biomedizinische Technik der RWTH Aachen
- [41] Plonsey, R. BIOELECTRIC PHENOMENA. McGraw-Hill Book Company, New York, 1969
- [42] Plonsey, R. and Heppner, D. CONSIDERATIONS ON QUASI-STATIONARITY IN ELECTRO-PHYSIOLOGICAL SYSTEMS. Bull.math.Biophys., Vol.29, pp.657-664, 1967
- [43] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P. NUMERICAL RECIPES IN FORTRAN: THE ART OF SCIENTIFIC COMPUTING. Cambridge University Press, Second Edition, 1992
- [44] Pohlmeier, R. LOKALISATION ELEKTRISCHER GEHIRNAKTIVITÄT DURCH INVERSE ANALYSE DES MAGNETOENCEPHALOGRAMMS (MEG) MIT FINITE-ELEMENTE-MODELLEN DES KOPFES. Diplomarbeit in Elektrotechnik, 1996, Klinik für Neurologie der RWTH Aachen

- [45] Pohlmeier, R., Buchner, H., Knoll, G. SENSITIVITY OF SOURCE LOCALIZATION IN THE HUMAN BRAIN TO THE ELECTRICAL CONDUCTIVITIES IN A REALISTIC HEAD MODEL. Third International Hans Berger Congress, Jena, Oktober 1996
- [46] PSCHYREMBEL, KLINISCHES WÖRTERBUCH. W. de Gruyter, 256.Auflage, 1990
- [47] Rabending, G. ASPEKTE DER PHARMAKOTHERAPIE -PSYCHOPHARMAKA-. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, Heidelberg, 1994, Band 2
- [48] Schmidt, R.F., Thews, G. PHYSIOLOGIE DES MENSCHEN. Springer-Verlag
- [49] Schwan, H., Kay, C. THE CONDUCTIVITY OF LIVING TISSUES. Ann.N.Y.Acad.Sci.65:1007 (1957)
- [50] Schwarz, H.R. METHODE DER FINITEN ELEMENTE. Teubner-Studienbücher, 1991
- [51] Silbernagl, Stefan, Despopoulos, Agamemnon TASCHEATLAS DER PHYSIOLOGIE. G. Thieme Verlag
- [52] Smythe, W. R. STATIC AND DYNAMIC ELECTRICITY. New York, Hemisphere Publishing Corporation, 1989, Third Edition
- [53] Spiegel, Murray R. VEKTORANALYSIS, THEORIE UND ANWENDUNG. McGraw-Hill Book Company, 1982
- [54] Vainikko, G.M. THE DISCREPANCY PRINCIPLE FOR A CLASS OF REGULARIZATION METHODS. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, No.3, 1982, 1-19
- [55] Vainikko, G.M. THE CRITICAL LEVEL OF DISCREPANCY IN REGULARIZATION METHODS. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, No.6, 1983, 1-9
- [56] Van Oosterom, A., Strackee, J. THE SOLID ANGLE OF A PLANE TRIANGLE. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.BME-302,february 1983
- [57] Wang, J.-Z. MNLS INVERSE DISCRIMINATES BETWEEN NEURONAL ACTIVITY ON OPPOSITE WALLS OF A SIMULATED SULCUS OF THE BRAIN. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol.41,No.5,may 1994
- [58] Wendland, W. DIE BEHANDLUNG DER RANDWERTAUFGABEN IM  $\mathcal{R}^3$  MIT HILFE VON EINFACH- UND DOPPELSCHICHTPOTENTIALEN. Numer.Math.11, 380-404, 1968
- [59] Werner, J. NUMERISCHE MATHEMATIK 1. Vieweg Studium, 1992
- [60] Wieringa, H.J. MEG, EEG AND THE INTEGRATION WITH MAGNETIC RESONANCE IMAGES. Proefschrift Enschede.-Met lit.opg.-Met samenvatting in het Nederlands, ISBN 90-9006505-9
- [61] Yosida, K. FUNCTIONAL ANALYSIS. 6th edition, Springer, Berlin, 1980
- [62] Yvert, B., Bertrand, O., Echallier, J.F., Pernier, J. IMPROVED FORWARD EEG CALCULATIONS USING LOCAL MESH REFINEMENT OF REALISTIC HEAD GEOMETRIES Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 1995, pp.381-392

- [63] Yvert, B., Bertrand, O., Echallier, J.F., Pernier, J. IMPROVED DIPOLE LOCALIZATION USING LOCAL MESH REFINEMENT OF REALISTIC HEAD GEOMETRIES: AN EEG SIMULATION STUDY *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 1996, to appear
- [64] Zhang, Z. and Jewett, D.L. INSIDIOUS ERRORS IN DIPOLE LOCALISATION PARAMETERS AT A SINGLE TIME-POINT DUE TO MODEL MISSPECIFICATIONS OF NUMBER OF SHELLS. *Electroenceph. clin. neurophys.*, vol.88,pp.1-11,1993