



Analytische Lösungen der Poissonschen Differentialgleichung mit Hilfe Greenscher Funktionen

Prof. Dr.-Ing. Gunter Knoll PD Dr. med. Helmut Buchner
Prof. Dr.-Ing. Jiri Silny cand.-phys. Joerg Pesch
Dipl.-Ing. Rainer Beckmann Dipl.-Ing. Adrian Rienäcker

5. November 1994

Zusammenfassung

Partielle Differentialgleichungen lassen sich durch Anwendung der Greenschen Formeln und geschickte Wahl sogenannter Greenscher Funktionen auf einfachen (mathematisch elementar beschreibbaren) Geometrien und unter einfachen Randbedingungen analytisch lösen. In diesem Bericht wird das Verfahren vorgestellt und einige spezielle Lösungen der Poissonsgleichung entwickelt.

1 Greensches Lösungsverfahren

1.1 Problemformulierung

Die Aufgabe, die Poissonsche Differentialgleichung für das Potential $u(x_i)$

$$\Delta u = \varrho \quad \text{im Gebiet } \Omega \quad (1)$$

infolge der Quelldichteverteilung $\varrho(x_i)$, unter den Dirichletschen Randbedingungen

$$u|_{\Gamma} = \alpha \quad \text{auf dem Rand } \Gamma \quad (2)$$

oder den Neumannschen Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma} = \alpha \quad \text{auf dem Rand } \Gamma \quad (3)$$

ist nur in einfachen Fällen, d.h. bei einfach beschreibbarer Geometrie und für einfache Funktionen $\alpha(x_i)$, analytisch zu lösen.

1.2 Grundprinzip des Greenschen Lösungsverfahrens

Ein Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe, das Greensche Lösungsverfahren, nutzt die zweite Greensche Formel

$$\int_{(\Omega)} v \Delta u \, d\Omega = \int_{(\Gamma)} \left\{ v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right\} d\Gamma + \int_{(\Omega)} u \Delta v \, d\Omega \quad (4)$$

in eleganter Weise aus.

Wählt man nämlich die Funktion $v(x_i)$ so, daß

$$\Delta v = \delta \quad \text{im Gebiet } \Omega \quad (5)$$

mit der Deltafunktion $\delta(x_i - \xi_i)$ nach Dirac, so ist das Gebietsintegral der rechten Seite — wie noch gezeigt wird — die gesuchte Funktion $u(\xi_i)$, so daß die Lösung über die Beziehung

$$u(\xi_i) = \int_{(\Omega)} v \varrho \, d\Omega - \int_{(\Gamma)} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, d\Gamma + \int_{(\Gamma)} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \, d\Gamma \quad (6)$$

ermittelt werden kann. Das Gebietsintegral auf der rechten Seite von Gleichung (6), enthält die Belastungsfunktion (Quelldichtevertelung) und wird (in den betrachteten Fällen) einfach berechenbar sein. Von den beiden Randintegralen der rechten Seite von Gleichung (6) wird in jedem Fall eines durch die Randbedingung für $u(x_i)$ wesentlich vereinfacht, während das andere durch geschickte Wahl der durch die Greenfunktion $v(x_i)$ erfüllten Randbedingungen vereinfacht wird.

Die Greenfunktion $v(x_i)$ wird im allgemeinen aus zwei Teilfunktionen, der Fundamentallösung $f(x_i)$ und der Partikulärlösung $p(x_i)$, zusammengesetzt¹.

$$v(x_i) = f(x_i) + p(x_i) \quad (7)$$

Durch die Fundamentallösung wird — ohne Beachtung der Randbedingungen, d.h. für einen unendlich ausgedehntes Gebiet Ω — die grundlegende Singularität des Problems behandelt

$$\Delta f = \delta \quad \text{im Gebiet } \Omega, \quad (8)$$

während p so bestimmt wird, daß die gewünschten Randbedingungen erfüllt werden.

1.3 Dirac Deltafunktion

Die Deltafunktion δ nach P.A.M. Dirac ist eine verallgemeinerte Funktion die dazu dient Punktwirkungen (Kräfte, Punktmassen, elektrische Mono- und Multipole) mathematisch zu erfassen. Die Deltafunktion ist glatt und beliebig oft differenzierbar, soll aber bereits ab einer (beliebig) kleinen Entfernung vom Quellpunkt ξ_i den Wert Null annehmen. Das Integral der Deltafunktion über Ω ist Eins,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_i - \xi_i) d\Omega = 1 \quad (9)$$

¹Die Poissonschen Differentialgleichungen für $u(x_i)$ und $v(x_i)$ sind linear, d.h. das Superpositionsprinzip gilt

wobei die Integrationsgrenzen infolge der obengenannten Eigenschaft nicht im Unendlichen liegen müssen.

Eine Funktion, die die obengenannten Eigenschaften erfüllt, ist beispielsweise gegeben durch

$$\delta(r) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{ke^{-kr^2}}{\pi} \quad (10)$$

wobei mit r der euklidische Abstand zum Quellpunkt

$$r = \sqrt{(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)} \quad (11)$$

gemeint ist. Die vorgestellte Deltafunktion ist ein Grenzprozess². Dieser Grenzprozess ist notwendig, weil δ bereits in einem beliebig kleinen Abstand von der singulären Stelle den Wert Null annehmen muß. Für $k = 1$ ist eine zweidimensionale Deltafunktion in Abbildung 1 mit den zugehörigen Konturlinien dargestellt.

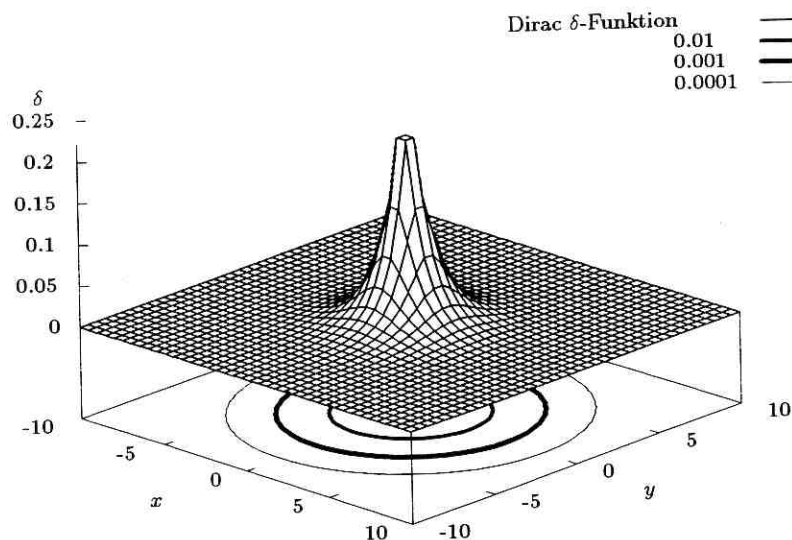


Abbildung 1: Deltafunktion

Die Deltafunktion besitzt — wie in Abbildung 2 graphisch veranschaulicht wird — die Eigenschaft einer „Abtastfunktion“ d.h. das Gebietsintegral einer beliebigen Funktion $h(x_i)$ multipliziert mit der Deltafunktion liefert als Ergebnis den Funktionswert $h(\xi_i)$ an der singulären Stelle ξ_i .

$$\int_{(\Omega)} h(x_i) \delta(x_i - \xi_i) d\Omega = h(\xi_i) \quad (12)$$

1.4 Fundamentallösungen

Zur Lösung konkreter Aufgabenstellungen mit Hilfe des Green-Verfahrens werden Fundamentallösungen für zwei- und dreidimensionale Problemstellungen bereitgestellt. Sie erfüllen die in Gleichung (8) formulierte Beziehung.

²und deshalb eine verallgemeinerte Funktion die auch als Distribution bezeichnet wird

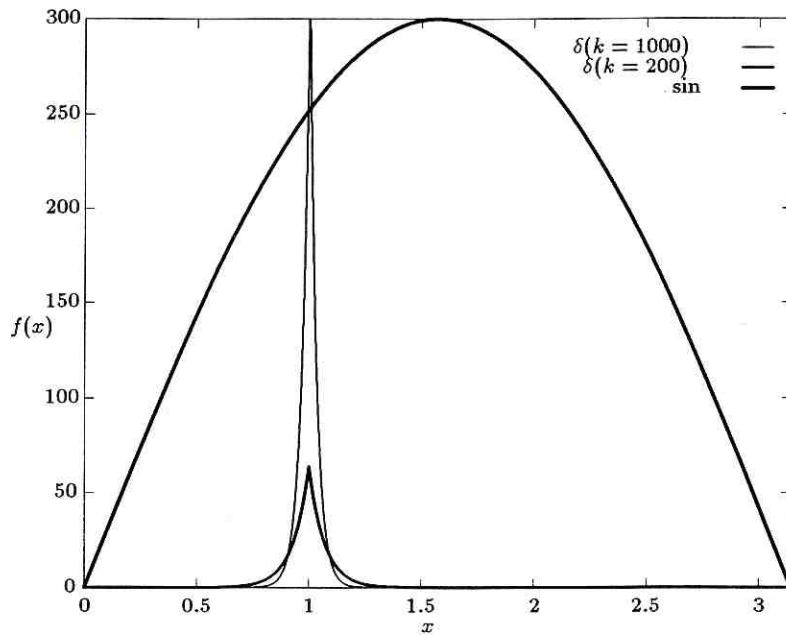


Abbildung 2: Deltafunktion

Im zweidimensionalen Fall formuliert man den Laplaceoperator in Polarkoordinaten, wobei die Fundamentallösung natürlich nur von der radialen Koordinate abhängt.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{k e^{-kr^2}}{\pi} \quad (13)$$

Die Multiplikation mit r und Integration in den Grenzen $[0, r]$ liefert

$$\hat{r} \frac{\partial f}{\partial \hat{r}} \Big|_0^r = -\frac{1}{2\pi} e^{-k\hat{r}^2} \Big|_0^r \quad (14)$$

Unter der Voraussetzung der Beschränktheit der Ableitung im Ursprung

$$\frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r=0} < \infty \quad (15)$$

folgt

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1 - e^{-kr^2}}{2\pi r} \quad (16)$$

Eine weitere Integration

$$\int_r^1 \frac{\partial f}{\partial \hat{r}} d\hat{r} \stackrel{!}{=} \int_r^1 \frac{1 - e^{-k\hat{r}^2}}{2\pi \hat{r}} d\hat{r} = [\ln(1) - \ln(r)] + \frac{1}{2\pi} \int_r^1 \frac{e^{-k\hat{r}^2}}{\hat{r}} d\hat{r} \quad (17)$$

liefert, da das verbleibende Integral für $k \rightarrow \infty$ den Wert Null annimmt, unter der Normierungsbedingung

$$f|_{(r=1)} = 0 \quad (18)$$

schließlich das Ergebnis

$$f_{2D}(r) = \frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad (19)$$

Im dreidimensionalen Fall formuliert man den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten und betrachtet wiederum nur die radiale Richtung.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \delta(r) \quad (20)$$

Außerhalb einer kleinen Kugel mit dem Radius ϵ integriert bleibt die rechte Seite Null, so daß

$$f = \frac{A}{r} + B \quad (21)$$

Innerhalb der Kugel gilt

$$\int_{(\Omega)} \Delta f \, d\Omega = \int_{(\Omega)} \delta \, d\Omega \quad (22)$$

Der Integralsatz von ^{Green}Gauß, angewendet auf der linken Seite und die Eigenschaft (9) der Deltafunktion auf der rechten Seite liefert

$$\int_{(\Gamma)} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, d\Gamma = 1. \quad (23)$$

Auf der Oberfläche der Kugel gilt aber

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} = -\frac{A}{\epsilon^2}, \quad (24)$$

so daß über

$$\int_{(\Gamma)} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, d\Gamma = -\frac{A}{\epsilon^2} 4\pi\epsilon^2 = 1 \quad (25)$$

und — der Einfachheit halber — mit $B = 0$ die gesuchte Fundamentallösung gefunden ist.

$$f_{3D}(r) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (26)$$

Nachdem die Fundamentallösungen entwickelt sind, sind die weiteren Schritte des Greenschen Lösungsverfahrens von den konkreten Problemstellungen, d.h. von der Geometrie, den Randbedingungen und den Quelldichteverteilungen abhängig. Die Vorgehensweise soll anhand einfacher Beispiele im folgenden Abschnitt behandelt werden.

2 Beispiele

2.1 Kreisscheibe mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

Wählt man als Geometrie des Problems eine Kreisscheibe mit den homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (27)$$

so fällt infolge der Randbedingung ein Randintegral aus Gleichung (6) weg. Gleichung (6) nimmt dann folgende Form an

$$u(\xi_i) = \int_{(\Omega)} v \varrho d\Omega - \int_{(\Gamma)} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\Gamma \quad (28)$$

Durch die Forderung

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad (29)$$

kann auch das zweite Randintegral eliminiert werden. Die spezielle Belastungsfunktion

$$\varrho = \delta \quad (30)$$

bei beliebiger Lage der Quelle $\{x_s, y_s\}^T$ führt darauf, daß die gesuchte Potentialfunktion u genau der Greenfunktion v entspricht. Wegen

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln a + p(x_i) \quad (31)$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \{x - x_s, y - y_s\}^T \\ a &= \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} \end{aligned} \quad (32)$$

muß nur noch eine Funktion $p(x_i)$ gefunden werden, die dafür sorgt, daß die Randbedingungen für v erfüllt werden. Dabei hilft die geometrische Interpretation eines Kreisumfangs mit Radius R als Kurve, auf der die Größe κ den Wert Eins annimmt.

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{Ra}{r_s a'} \\ r_s &= \sqrt{(x_s)^2 + (y_s)^2} \\ a &= \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} \\ \nu &= \frac{R^2}{r_s^2} \end{aligned} \quad (33)$$

$$a' = \sqrt{(x - \nu x_s)^2 + (y - \nu y_s)^2} \quad (34)$$

Da der Logarithmus von Eins Null ist, ergibt sich die gesuchte Greenfunktion v damit zu

$$v = \ln \left(\frac{Ra}{r_s a'} \right). \quad (35)$$

Diese Funktion ist in Abbildung 3 für die konkreten Werte ($R = 3, x_s = 2, y_s = 1$) mit einigen Konturlinien abgebildet. Man erkennt, daß $u = 0$ genau der Kreis mit Radius $R = 3$ ist. Im Abstand a' vom Beobachtungspunkt $\{x, y\}^T$ liegt — radial fluchtend mit dem Quellpunkt $\{x_s, y_s\}^T$ eine entgegengerichtete Quelle *außerhalb* des Kreises. Diese Quelle nennt man auch Spiegelquelle (Spiegelladung) zu der betrachteten Quelle *innerhalb* des Kreises. Diese Spiegelquelle ist im sogenannten *reziproken Radius* R^2/r_s vom Ursprung aus gesehen angebracht. Da sich durch geeignetes Plazieren von Punktquellen viele Probleme auf unterschiedlicher Geometrie lösen lassen, führt diese Technik den Namen *Spiegelungsverfahren*.

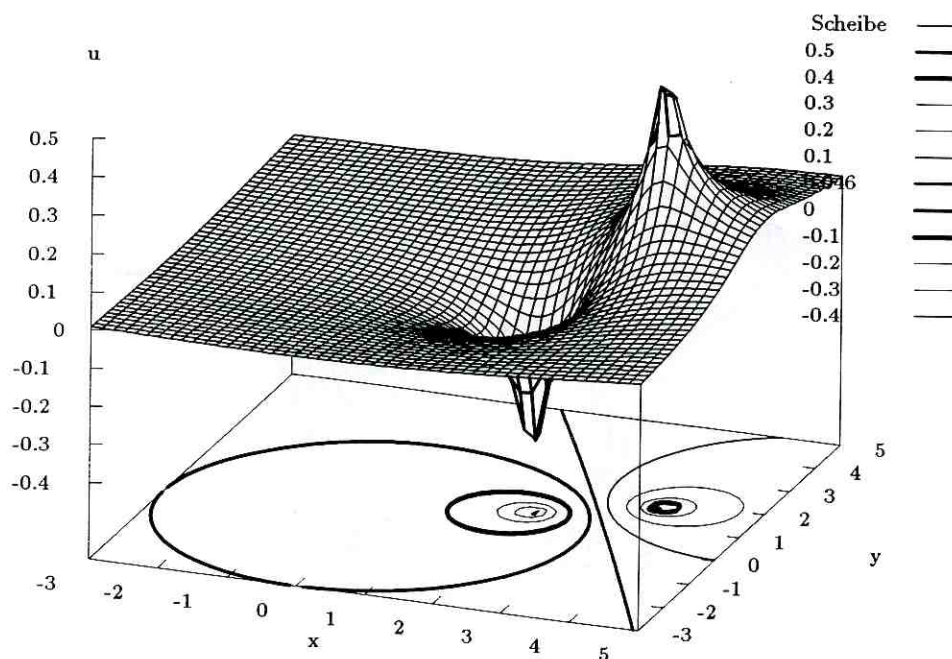


Abbildung 3: Scheibe mit Monopol

Da die Poissongleichung und die gewählten Randbedingungen linear sind, lassen sich Lösungen für eine beliebige Anzahl M von Punktquellen — wie in Abbildung 4 für 3 Monopole veranschaulicht — durch einfache Superposition bestimmen.

$$u = \sum_{k=1}^M \ln \left(\frac{Ra_k}{r_{sk}a'_k} \right) \quad (36)$$

2.2 Kugel mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

Die Übertragung des gerade gewonnenen Ergebnisses auf eine Kugelgeometrie gelingt nach dem gleichen Schema mit der Fundamentallösung f_{3D} . Die Potentialverteilung innerhalb der Kugel mit Radius R lautet:

$$v = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{R/r_s}{a'} - \frac{1}{a} \right) \quad (37)$$

$$\nu = R^2/r_s^2$$

$$a = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$$

$$a' = \sqrt{(x - \nu x_s)^2 + (y - \nu y_s)^2 + (z - \nu z_s)^2}$$

(38)

Es ist leider nicht möglich diese Funktion vollständig graphisch darzustellen, so daß man nur einzelne Schnitte durch die Kugel mit den zugehörigen Isopotentiallinien darstellen kann. In den folgenden beiden Abbildungen wurde als Schnittebene

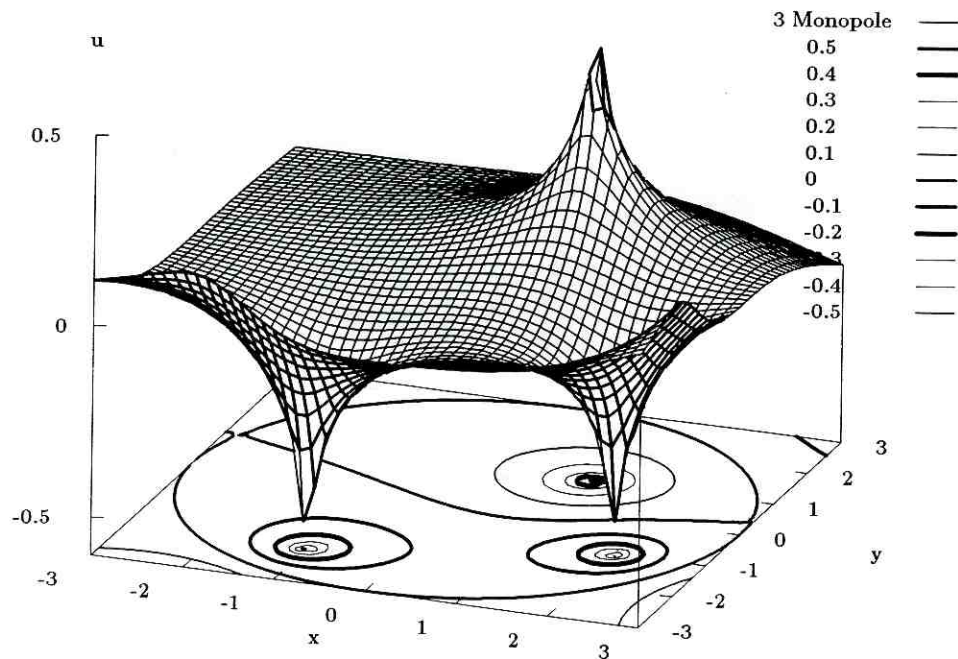


Abbildung 4: Scheibe mit drei Monopolen

$z = 0$ gewählt. In der ersten Darstellung liegt der Monopol genau in der Schnittebene, während in der zweiten Abbildung ein Monopol gewählt wurde der um $z_s = 0.2$ nach oben versetzt liegt.

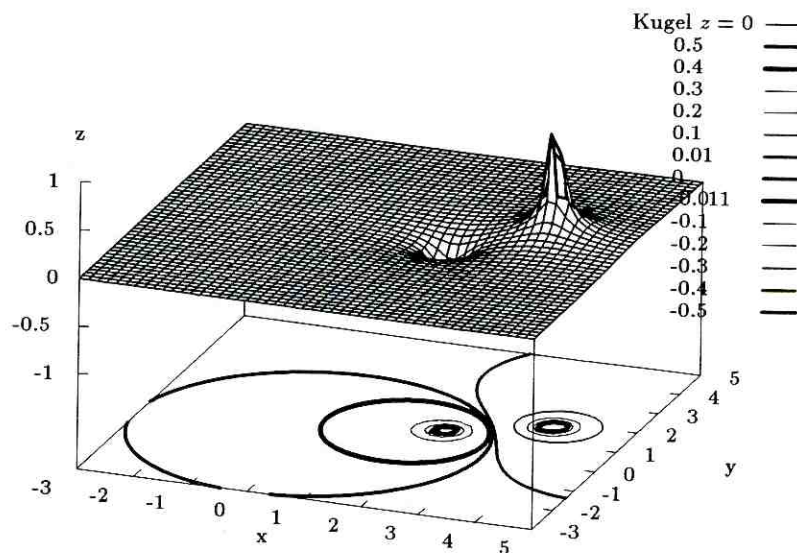


Abbildung 5: Ebene $z = 0$ der Kugel mit Monopol an $\{2, 1, 0\}^T$

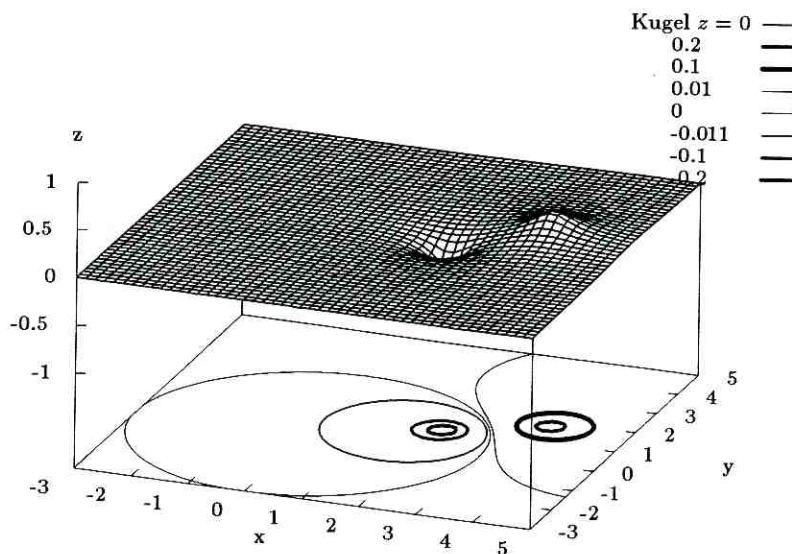
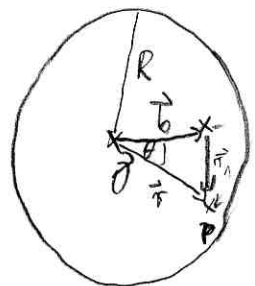


Abbildung 6: Ebene $z = 0$ der Kugel mit Monopol an $\{2, 1, 0.2\}^T$

2.3 Kugel mit Neumann-Randbedingungen

Damit es überhaupt möglich ist, die Neumann-Randbedingung zu erfüllen, müssen sich immer eine Quelle und eine Senke gleichzeitig im Kugelinernen befinden. Im folgenden wird eine Quelle am Ort P_1 und eine Senke am Kugelmittelpunkt betrachtet. Der Kugelmittelpunkt sei der Koordinatenursprung. Es gelten folgende Abkürzungen [1]:

- R Radius der Kugel
- $\vec{b}$ Ortsvektor der Quelle
- $\vec{r}$ Ortsvektor des Beobachtungspunktes P
- $\vec{r}_1$ Abstandsvektor Quelle-Beobachtungspkt.
- Θ Winkel zw. $\vec{r}$ und $\vec{b}$
- μ $\cos(\Theta)$
- $P_n(\mu)$ Legendre Polynom vom Grad n



Für das Potential V am Ort P gilt nun:

$$V = \underbrace{\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)}_{\text{Fundamentallösung}} + \underbrace{V_p}_{\text{part. Lösung}} \quad (39)$$

Die partikuläre Lösung V_p bewirkt, daß die Randbedingungen eingehalten werden. In diesem Fall handelt es sich um die Neumann-Randbedingung:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (40)$$

Entwickelt man den Ausdruck " $1/r_1$ " ($\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{b}$; $r_1 = (r^2 + b^2 - 2rb\mu)^{1/2}$) in eine Reihe:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\mu}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{r^{n+1}} P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{r} \right)^n P_n(\mu) \quad (41)$$

da $\frac{1}{\sqrt{1-2\mu\frac{b}{r} + \left(\frac{b}{r}\right)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{r}\right)^n P_n(\mu)$

folgt daraus (die Reihe beginnt erst mit $n = 1$):

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{r^{n+1}} P_n(\mu) \quad (42)$$

Mit der Neumann-Bedingung gilt dann:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b^n P_n(\mu) \left(-(n+1) \frac{1}{R^{n+2}} \right) + \left. \frac{\partial V_p}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (43)$$

Daraus ergibt sich als Bedingung für V_p :

$$\left. \frac{\partial V_p}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b^n P_n(\mu) \left((n+1) \frac{1}{R^{n+2}} \right) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b^n P_n(\mu) \left((n+1) \frac{R^{n-1}}{R^{2n+1}} \right) \quad (44)$$

Ersetzt man hier " R^{n-1} " durch " r^{n-1} " und integriert über r , erhält man:

$$V_p = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{r^n b^n}{R^{2n+1}} P_n(\mu) \quad (45)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r^n b^n}{R^{2n+1}} + \frac{r^n b^n}{n R^{2n+1}} \right] P_n(\mu) \quad (46)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{r^n b^n}{R^{2n+1}}}_S + \int_0^r \frac{r^n b^n}{R^{2n+1}} \frac{dr}{r} \right] P_n(\mu) \quad (47)$$

Für den Term "S" gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n b^n}{R^{2n+1}} P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R} \frac{r^n b^n}{(R^2)^n} P_n(\mu) - \frac{1}{R} \quad (48)$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{R^4 + r^2 b^2 - 2r b R^2 \mu}{R^4} \right)^{-1/2} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{r^2 b^2 - 2r b R^2 \mu}{R^4} \right)^{-1/2} - \frac{1}{R} \quad (49)$$

$$= \frac{R}{b} \left(r^2 + \frac{R^4}{b^2} - 2r \frac{R^2}{b} \mu \right)^{-1/2} - \frac{1}{R} \quad (50)$$

$$= \frac{R}{b} \frac{1}{r_1'} - \frac{1}{R} \quad (51)$$

Hierbei kann r_1' als Abstand einer Bildquelle vom Beobachtungspunkt interpretiert werden. Sie liegt außerhalb der Kugel und sorgt dafür, daß die Neumann-Randbedingung erfüllt wird. Die Bildquelle liegt bezüglich des Beobachtungspunktes P unter dem selben Winkel, wie die Quelle am Ort P_1 . Für den Abstand b_1' der Bildquelle vom Ursprung gilt:

$$b_1' = \frac{R^2}{b} \quad (52)$$

$$r_1' = \sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{b} \right)^2 - 2r \left(\frac{R^2}{b} \right) \mu}$$

$$r_2' = \sqrt{r^2 + b^2 - 2r b \mu}$$

Damit geht Gleichung (9) über in:

$$V_p = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{R}{br'_1} - \frac{1}{R} + \int_0^r \left(\frac{R}{br'_1} - \frac{1}{R} \right) \frac{dr}{r} \right] \quad (53)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{R}{br'_1} - \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \ln \left(\frac{br'_1 + R^2 - br\mu}{2R^2} \right) \right] \quad (54)$$

Für die Gesamtlösung des Potentials V gilt somit:

$$V = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} + \frac{R}{br'_1} - \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \ln \left(\frac{br'_1 + R^2 - br\mu}{2R^2} \right) \right] \quad (55)$$

Die Berechnung des Potentials einer Quelle und einer Senke (Dipol), die jeweils beliebig innerhalb der Kugel plaziert werden können, erfolgt durch Überlagerung der Lösung (Gl. (17)) für eine Quelle im Abstand r_1 und der einer Senke im Abstand r_2 vom Beobachtungspunkt. Die jeweils zugehörigen Quellen bzw. Senken im Ursprung heben sich gegenseitig auf.

$$V = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{R}{b_1 r'_1} - \frac{R}{b_2 r'_2} - \frac{1}{R} \ln \left(\frac{(R^2 + b_1 r'_1)^2 - b_1^2 r^2}{(R^2 + b_2 r'_2)^2 - b_2^2 r^2} \right) \right] \quad (56)$$

Hierbei ist:

- r Abstand des Beobachtungspunktes P zum Kugelmittelpunkt (Ursprung)
- r_i Abstand des Beobachtungspunktes P zum Quell/Senken-punkt i
- r'_i Abstand des Beobachtungspunktes P zur Bild-quelle/senke von i
- R Kugelradius
- b_i Abstand der Quelle (Senke) i zum Kugelmittelpunkt (Ursprung)
- b'_i Abstand der Bild-quelle/senke i vom Kugelmittelpunkt (Ursprung) $b'_i = R^2/b_i$

Eine dreidimensionale graphische Darstellung ist wiederum nur schwer möglich. Die Abbildung 7 zeigt aus diesem Grunde eine Schnittebene $z = 0$ durch eine FEM-Kugelstruktur, in der der Verlauf der Isopotentialen für einen zentrischen Dipol dargestellt sind. Die korrekte Erfüllung der Neumann Randbedingungen läßt sich hier gut verfolgen.

Literatur

- [1] Smythe, W. R., *Static and Dynamic Electricity*. New York, Hemisphere Publishing Corporation, 1989, Third Edition

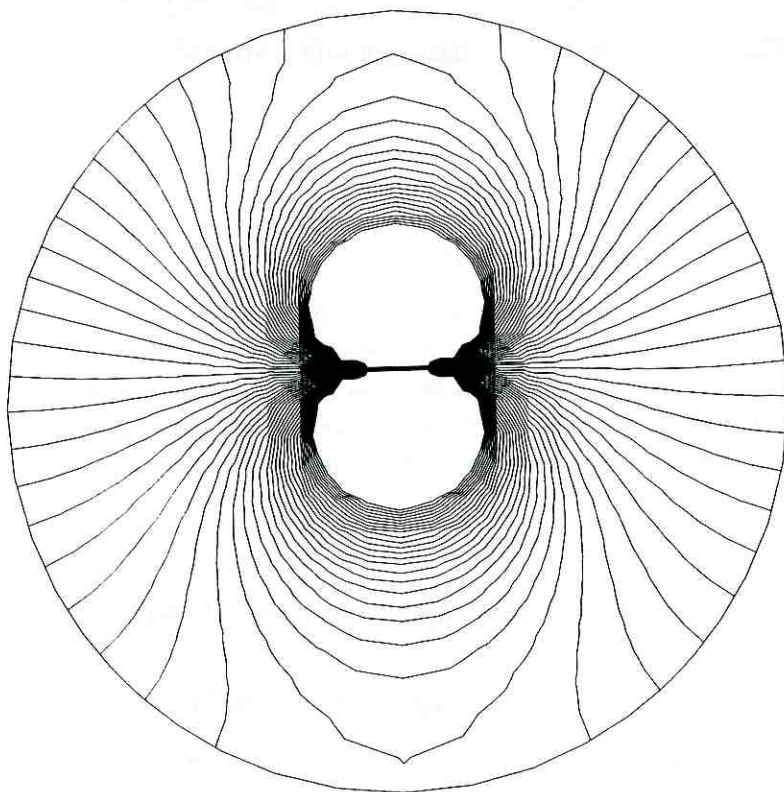


Abbildung 7: Isopotentialen der analytischen Lösung von Smythe in der Dipolebene ($z = 0$) für einen zentralen Dipol