# Mathematische Beschreibung der Potentialverteilung bioelektrischer Quellen: Quasi-statische Formulierung

Prof. Dr.-Ing. Jiri Silny
PD Dr. med. Helmut Buchner
Dipl.-Ing. Adrian Rienäcker

Prof. Dr.-Ing. Gunter Knoll
Dipl.-Ing. Rainer Beckmann
cand.-phys. Jörg Pesch

2. November 1994

## 1 Einleitung

Die Aktivität von Nervenzellen ist mit transmembranen elektrischen Strömen verbunden. Während diese Ströme selbst räumlich auf den jeweils aktiven Teil der Zellmembran begrenzt sind, breitet sich im angrenzenden Gewebe ein elektrisches Strömungsfeld aus. Die zugehörige Potentialverteilung kann mit Elektroden gemessen werden. So kann z.B. bei einem EEG die Summenaktivität der Nervenzellen des ZNS mit Elektroden auf der Kopfoberfläche beobachtet werden [1].

Für eine Interpretation von EEG-Daten im Rahmen der Lokalisierung der zugrundeliegenden elektrischen Aktivität des ZNS ist es notwendig, diese Zusammenhänge auch quantitativ beschreiben zu können. Im Folgenden soll daher ein mathematisches Modell entwickelt werden, das einen Bezug zwischen der Verteilung des elektrischen Potentials und seinen Quellen herstellt. Ausgehend von einer bezüglich der Zeitentwicklung allgemeinen Formulierung werden mögliche Vereinfachungen diskutiert, die schließlich zur sog. quasi-statischen Näherung führen.

## 2 Allgemeine Herleitung

Zunächst soll eine mathematische Beschreibung der Potentialverteilung hergeleitet werden, die auch zeitlich veränderliche elektrische Aktivitäten zuläßt. Die Herleitung erfolgt für einen unendlich ausgedehnten, homogenen und isotropen Volumenleiter. Diese Vereinfachung bietet sich an, da hier der Einfluß der zeitlichen Änderung der elektromagnetischen Felder auf ihre Ausbreitung im Volumenleiter untersucht werden soll und nicht die Abhängigkeit von seinen Materialeigenschaften oder seiner Geometrie.

Ausgangspunkt der Berechnung sind die Maxwell-Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
rot\,\vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \quad (1) \qquad & div\,\vec{D} &= \rho \quad (3)\\
rot\,\vec{H} &= \vec{j} + \partial_t \vec{D} \quad (2) \qquad & div\,\vec{B} &= 0 \quad (4)
\end{aligned}
$$

Hinzu kommen noch die "Materialgleichungen":

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E} \quad , \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

Hierbei wurden folgende Abkürzungen verwendet[1]:

| | |
|---|---|
| $\vec{B}$ | Magnetische Induktion |
| $\vec{D}$ | Dielektrische Verschiebung |
| $\vec{E}$ | Elektrische Feldstärke |
| $\vec{H}$ | Magnetische Feldstärke |
| $\vec{j}$ | Elektrische Stromdichte |
| $\epsilon$ | Relative Dielektrizitätszahl |
| $\epsilon_0$ | Dielektrizitätskonstante des Vakuums |
| $\mu$ | Relative Permeabilitätszahl |
| $\mu_0$ | Permeabilitätszahl des Vakuums |
| $\rho$ | Elektrische Ladungsdichte |
| $\sigma$ | Elektrische Leitfähigkeit |

Aus den Gleichungen (1) und (4) folgt, daß sich die Feldstärken $\vec{H}$ und $\vec{E}$ aus einem Vektorpotential $\vec{A}$ und einem skalaren Potential $\Phi$ ableiten lassen.

$$
\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{1}{\mu\mu_0}\, rot \vec{A} \qquad (5)\\
\vec{E} &= -grad\,\Phi - \partial_t \vec{A} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Teilt man nun die Gesamtstromdichte $\vec{j}$ in den Anteil der Volumenleitung und den der transmembranen Quellstromdichte $\vec{j_Q}$ auf, so ergibt sich aus Gleichung (2) zusammen mit den Materialgleichungen:

$$rot \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon\epsilon_0\, \partial_t \vec{E} + \vec{j_Q} \qquad (7)$$

[1] Im allgemeinen Fall anisotroper Medien sind $\epsilon$, $\mu$ und $\sigma$ richtungsabhängig (Tensoren).

Setzt man nun die Gleichungen (5) und (6) ein, erhält man wegen der Vektoridentität $rot(rot\vec{A}) = grad(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$ :

$$grad\left(div\vec{A}\right) - \Delta\vec{A} = \mu\mu_0\left[\sigma\left(-grad\,\Phi - \partial_t\vec{A}\right) + \epsilon\epsilon_0\,\partial_t\left(-grad\,\Phi - \partial_t\vec{A}\right) + \vec{j_Q}\right] \quad (8)$$

Um diese Gleichung lösen zu können, muß man $\phi$ und $\vec{A}$ zusätzlichen Nebenbedingungen unterwerfen. Eine Möglichkeit bietet die sog. **Lorentz-Bedingung** :

$$div\vec{A} = -\mu\mu_0\left(\sigma\Phi + \epsilon\epsilon_0\,\partial_t\Phi\right) \quad (9)$$

Damit geht Gleichung (8) über in :

$$\mu\mu_0\left(\sigma\,\partial_t\vec{A} + \epsilon\epsilon_0\,\partial_t^2\vec{A}\right) - \Delta\vec{A} = \mu\mu_0\,\vec{j_Q} \quad (10)$$

Unter der Vorraussetzung, daß die Materialeigenschaften linear sind ist es möglich, jede beliebige Aktivität durch eine Überlagerung von harmonischen Fourierkomponenten darzustellen. Es genügt also, eine harmonische Ort-Zeit-Abhängigkeit der Form

$$\vec{F} = \vec{F_0}\,e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{R})}$$

zu betrachten. Hierbei handelt es sich bei $\vec{R}$ um den Abstandsvektor zwischen dem Quellort $\vec{y}$ und einem beliebigen Ort $\vec{x}$ und bei $\omega$ um die Kreisfrequenz der Komponente. Für den sog. Wellenvektor $\vec{k}$ gilt [2] :

$$k^2 = -i\left(1 + \frac{i\omega\epsilon\epsilon_0}{\sigma}\right)\mu\mu_0\,\omega\sigma \quad (11)$$

Aus der harmonischen Formulierung ergeben sich folgende Korrespondenzen :

$$\partial_t \rightarrow i\omega \quad , \quad \partial_j \rightarrow -i\,k_j$$

Aus Gleichung (10) wird dadurch :

$$i\left(1 + \frac{i\omega\epsilon\epsilon_0}{\sigma}\right)\mu\mu_0\,\omega\sigma\,\vec{A} - \Delta\vec{A} = \mu\mu_0\,\vec{j_Q} \quad (12)$$

Diese Differentialgleichung für $\vec{A}$ hat folgende Lösung :

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j_Q}(\vec{y})\,e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{R})}}{R}\,d^3y} \quad (13)$$

Mit Hilfe der Lorentz-Bedingung (Gl.(9)) ergibt sich daraus als Lösung für das skalare Potential $\Phi$ :

$$\boxed{\Phi(\vec{x},t) \quad = \quad \frac{1}{4\pi(\sigma + i\omega\epsilon\epsilon_0)} \int_V \frac{-div\left(\vec{j_Q}(\vec{y})\right) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{R})}}{R} \, d^3y} \qquad (14)$$

Der Ausdruck $-div\left(\vec{j_Q}(\vec{y})\right)$ wird häufig mit $I_Q$ abgekürzt und kann als Stromquelldichte interpretiert werden.

Die Lösungen für die Potentiale $\vec{A}$ und $\Phi$ liefern zusammen mit den Gleichungen für das magnetische Feld $\vec{H}$ und das elektrische Feld $\vec{E}$ (Gl.(5),(6)) die gesuchte mathematische Grundlage für die Beschreibung der Ausbreitung elektromagnetischer Felder im Volumenleiter bei zeitlich veränderlichen Quellen.

In dieser allgemeinen Form stellen sich die Zusammenhänge zwischen elektrischer Aktivität und der zugehörigen Feldverteilung als äußerst komplex dar. Der Phasenfaktor $e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{R})}$ beschreibt beispielsweise den "Ausbreitungseffekt". Das bedeutet, daß die elektromagnetischen Felder einer zeitlichen Veränderung der Quellen mit einer Verzögerung folgen, die vom Abstand R zum Ort der Quellen abhängt. Unter Berücksichtigung dieses Effektes ist es sehr schwer, die bei einem EEG gemessene Potentialverteilung im Bezug auf die zu grunde liegenden Quellen richtig zu deuten. Schließlich trifft die Information über die Veränderung der elektrischen Aktivität einer Quelle an den unterschiedlichen Ableitelektroden zu verschiedenen Zeitpunkten ein!

Im folgenden Abschnitt wird untersucht werden welche Näherungen möglich sind, um die Beschreibung sinnvoll zu vereinfachen.

# 3 Quasi-statische Formulierung

Die Bestimmungsgleichung für $\vec{A}$ und $\Phi$ (Gl.(8)) läßt sich auch in einer anderen Darstellung ableiten. Bildet man die Divergenz beider Seiten von Gleichung (7), so folgt wegen $div(rot\vec{H}) = 0$ in der harmonischen Formulierung :

$$\boxed{div\left[(\sigma + i\omega\epsilon\epsilon_0)\left(grad\,\Phi + i\omega\vec{A}\right)\right] = div\,\vec{j_Q}} \qquad (15)$$

Dies ist die bezüglich der zeitlichen Entwicklung der Quellen und der Felder verallgemeinerte Poisson-Gleichung. Sie hat die gleiche Lösung für $\vec{A}$ und $\Phi$ wie Gl.(8), nämlich (13) und (14).

Vor der Diskussion[2] einzelner Terme der Poisson-Gleichung, soll auf die elektrischen Eigenschaften biologischer Gewebe und auf einige charakteristische Größen eingegangen werden.

- In Tabelle 1 ist die elektrische Leitfähigkeit $\sigma$ einiger Gewebearten nach Rush et al. [3] angegeben. Weitere Angaben finden sich auch bei Geddes und Baker [4].

| *Gewebe* | $\sigma$ *[S/m]* |
|---|---|
| Blut | 0.67 |
| Lunge | 0.05 |
| Leber | 0.14 |
| Fett | 0.04 |
| Gehirn | 0.25 |

Tabelle 1: Leitfähigkeit einiger Gewebearten

  In den folgenden Abschätzungen wird (als Mittelwert) mit einer Leitfähigkeit von $\sigma = 0.2$ S/m gerechnet.

- Die bei bioelektrischen Quellen am häufigsten autretenden Frequenzen liegen im Bereich $f \approx 1\,$kHz. Dies ist vor allem damit in Verbindung zu bringen, daß die Dauer von Aktionspotentialen in der Größenordnung von 1 msec liegt [1] ($1 msec = 10^{-3}\,sec$).

- Die magnetischen Eigenschaften von biologischem Gewebe können vernachlässigt werden, so daß für die Permeabilität $\mu\mu_0$ des Gewebes die des Vakuums ($\mu = 1\,,\ \mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\,\frac{V\,s}{A\,m}$) eingesetzt werden kann.

- Für den Betrag von R wird im folgenden der Wert $R_{max} = 1\,m$ angenommen.

## 3.1 Kapazitive Effekte

Der Term "$(\sigma + i\omega\epsilon\epsilon_0)$" in der Poisson-Gleichung (Gl.(15)) beschreibt die Leiteigenschaften des Volumenleiters. Neben der Leitfähigkeit $\sigma$ existiert noch ein Anteil, der aus Verschiebungsströmen stammt und durch die Dielektrizitätszahl $\epsilon$ sowie die Kreisfrequenz $\omega$ charakterisiert ist. Für einen Vergleich der beiden Anteile wird der Quotient $\frac{\omega\epsilon\epsilon_0}{\sigma}$ betrachtet. In Tabelle 2 sind einige Werte für diesen Quotienten bei verschiedenen Frequenzen aufgelistet (Schwan et al. [5]).

[2]Teile dieser Betrachtungen basieren auf der Arbeit von Plonsey [1]

| *Gewebe* | *10 Hz* | *100 Hz* | *1 kHz* | *10 kHz* |
|---|---|---|---|---|
| Lunge | 0.15 | 0.025 | 0.05 | 0.14 |
| Fett | | 0.01 | 0.03 | 0.15 |
| Leber | 0.2 | 0.035 | 0.06 | 0.2 |
| Herzmuskel | 0.1 | 0.04 | 0.15 | 0.32 |

Tabelle 2: $\omega\epsilon\epsilon_0/\sigma$ für einige Gewebe

Der kapazitive Anteil kann vernachlässigt werden, wenn die Ungleichung $\omega\epsilon\epsilon_0/\sigma \ll 1$ erfüllt ist. Mit den Werten aus Tabelle 2 ist dies zumindest für eine Frequenz von $f = 1\,\text{kHz}$ der Fall. Man kann einen biologischen Volumenleiter also in guter Näherung als ohmsch ansehen [5].

## 3.2 Ausbreitungseffekt

Dieser Effekt wurde bereits im vorigen Kapitel beschrieben. Die zeitliche Verzögerung mit der sich eine Veränderung der Quellen an einem beliebigen Ort abseits der Quellen auf die elektromagnetischen Felder auswirkt, wird durch den Phasenfaktor $e^{-i\vec{k}\vec{R}}$ beschrieben. Dieser Effekt kann vernachlässigt werden, wenn die Bedingung $(k \cdot R) \ll 1$ erfüllt ist. Mit Gleichung (11) ergibt sich hierfür :

$$(k \cdot R_{max}) = (1 - i)\sqrt{\omega\mu_0(\sigma + i\omega\epsilon\epsilon_0)}$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, erhält man [1] :

$$(k \cdot R_{max}) \approx 0.04\,(1 - i)$$

Somit ist der Faktor $e^{-i\vec{k}\vec{R}}$ mit einem Fehler von ca. 4% vernachlässigbar. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Felder im biologischen Gewebe ist also so groß, daß sich alle Änderungen überall im Volumenleiter gleichzeitig bemerkbar machen.

## 3.3 Induktionseffekte

Der Term "$(grad\,\Phi + i\omega\vec{A})$" der Poisson-Gleichung besagt (genau wie Gl.(6)), daß sich das elektrische Feld $\vec{E}$ nicht nur aus einem skalaren Potential $\Phi$ ableitet, sondern ein Teil durch ein zeitlich veränderliches Vektorpotential $\vec{A}$ induziert wird. Dieser Teil soll nun abgeschätzt werden. Hierzu dient das Kriterium $|\omega\vec{A}|\,/\,|grad\,\Phi| \ll 1$.
Da das Superpositionsprinzip gelten soll (lineare Materialeigenschaften), genügt es, ein Quellstrom-Element $\vec{j_Q}\,d^3y$ zu betrachten. Zusammen mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.2 ergibt sich dann für $\vec{A}$ :

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j_Q}(\vec{y})}{R}\,d^3y \qquad (16)$$

Setzt man dies in die Lorentz-Bedingung (Gl.(9)) ein und formt nach $\Phi$ um, so ergibt sich in der harmonischen Formulierung :

$$\Phi = \frac{\mu}{4\pi\mu(\sigma + i\omega\epsilon\epsilon_0)} \, div \left( \frac{\vec{j_Q}(\vec{y}) \, d^3y}{R} \right) \tag{17}$$

Da die Divergenz bezüglich $\vec{x}$ gebildet wird, ergibt sich mit der Abkürzung $\epsilon_c = \epsilon\epsilon_0 \, (1 + \frac{\sigma}{i\omega\epsilon\epsilon_0})$ :

$$\Phi = \frac{d^3y}{i \, 4\pi\omega\epsilon_c} \, \frac{\vec{j_Q} \, \vec{e_R}}{R^2} \tag{18}$$

und schließlich :

$$|grad \, \Phi| = \frac{j_Q \, d^3y}{4\pi\omega\epsilon_c \, R^3} \tag{19}$$

Für das genannte Kriterium gilt dann :

$$\boxed{\frac{|\omega\vec{A}|}{|grad \, \Phi|} = |\omega^2\mu\epsilon_c R^2| = |k \cdot R|^2} \tag{20}$$

Mit dem in Abschnitt 3.2 berechneten Wert für $(k \cdot R)$ erhält man hier [1] :

$$|k \cdot R|^2 = 0.0032$$

Induktive Effekte können also ebenfalls vernachlässigt werden.

## 3.4 Randbedingungen

Da die Gesamtstromdichte $\vec{J}$ (Ohmscher Strom, Verschiebungsstrom und Quellstrom) insgesammt quellenfrei ist[3], muß die Normalkomponente von $\vec{J}$ an der Grenzfläche zwischen zwei Medien stetig sein :

$$\sigma_1 \left( 1 + \frac{i\omega\epsilon_1\epsilon_0}{\sigma_1} \right) E_{1n} = \sigma_2 \left( 1 + \frac{i\omega\epsilon_2\epsilon_0}{\sigma_2} \right) E_{2n} \tag{21}$$

Die Klammerterme können vernachlässigt werden, wenn die kapazitiven Effekte gegenüber den ohmschen Effekten klein sind. (vgl. Abschnitt 3.1). Damit geht Gleichung (21) über in :

$$\sigma_1 \, E_{1n} = \sigma_2 \, E_{2n} \tag{22}$$

[3] Aus der Maxwell-Gleichung $rot\vec{H} = \vec{J}$ folgt : $div \, (rot\vec{H}) = 0 = div(\vec{J})$

An der Körperoberfläche gilt $\sigma_2 = 0$ und damit folgt aus Gleichung (22) $E_{1n} = 0$.
In der allgemeineren Formulierung (Gl.(21)) gilt mit $\sigma_2 = 0$ zunächst :

$$\sigma_1 \left(1 + \frac{i\omega\epsilon_1\epsilon_0}{\sigma 1}\right) E_{1n} = i\omega\epsilon_2\epsilon_0 \, E_{2n} \tag{23}$$

Damit nun $E_{1n} \approx 0$ gesetzt werden kann, muß die Ungleichung $(\omega\epsilon_2\epsilon_0)/\sigma_1 \ll 1$ erfüllt sein. Setzt man die vereinbarten Werte für $\omega$ und $\sigma$ ein, so erhält man mit $\epsilon_2 = 1$ :

$$\frac{\omega\epsilon_2\epsilon_0}{\sigma_1} \approx 3 \cdot 10^{-7}$$

An der Körperoberfläche kann daher als Randbedingung $E_{1n} = 0$ gefordert werden.

## 3.5 Zusammenfassung

Die in den vorigen Abschnitten diskutierten Effekte und die Kriterien, die zu ihrer Abschätzung herangezogen werden können sind in Tabelle 3 noch einmal zusammengefaßt.

| *Näherung* | *Kriterium* |
|---|---|
| Ausbreitungseffekt vernachlässigbar | $k \cdot R_{max} \ll 1$ |
| Kapazitive Effekte vernachlässigbar | $(\omega\epsilon\epsilon_0)/\sigma \ll 1$ |
| Induktive Effekte vernachlässigbar | $(k \cdot R_{max})^2 \ll 1$ |
| Randbedingung $E_{1n} = 0 \, (\sigma_2 = 0)$ | $(\omega\epsilon_0)/\sigma_1 \ll 1$ |

Tabelle 3: Übersicht der Abschätzungskriterien

Wie die Diskussion dieser Effekte in Abschnitt 3.1 bis 3.4 gezeigt hat sind diese Näherungen gerechtfertigt. Damit vereinfacht sich die Poisson-Gleichung (Gl.(15)) zu der Form, wie sie auch für den statischen Fall gilt :

$$\boxed{div\,(\sigma\, grad\,\Phi) = div\,\vec{j_Q}} \tag{24}$$

Die Lösung für die Potentiale und die Felder lautet damit in der **quasi-statischen Formulierung** :

$$
\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{x}, t_0) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j_Q}(\vec{y}, t_0)}{R} \, d^3y \\
\Phi(\vec{x}, t_0) &= \frac{1}{4\pi\sigma} \int_V \frac{-div\left(\vec{j_Q}(\vec{y}, t_0)\right)}{R} \, d^3y \\
\vec{E} &= -grad\, \Phi \\
\vec{H} &= \frac{1}{\mu\mu_0} rot \vec{A}
\end{aligned}
$$

Mit der Randbedingung an Grenzflächen

$$
\sigma_1 \, E_{1n} = \sigma_2 \, E_{2n}
$$

läßt sich die Berechnung der Potentialverteilung auch auf inhomogene Volumenleiter ausdehnen.

Die Folge der Gültigkeit der quasi-statischen Formulierung ist, daß man auch bei zeitlich veränderlicher elektrischer Aktivität jeden Zeitpunkt für sich betrachten kann. Man kann also eine Reihe von "Momentaufnahmen" der Potentialverteilung machen und diese dann getrennt voneinander analysieren.

# Literatur

[1] Plonsey, R. *Bioelectric Phenomena*, McGraw-Hill Book Company, New York 1969

[2] Greiner, W. *Theoretische Physik; Band 3 : Klassische Elektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch 1986

[3] Rush,S. et al. *Resistivity of Body Tissues at Low Frequencies*, Circulation Res. **12**:40 (1963)

[4] Geddes,L., Baker,L. *The Specific Resistance of Biological Material*, Med. Biol. Eng. **5**:271 (1967)

[5] Schwan,H., Kay,C. *The Conductivity of Living Tissues*, Ann. N.Y. Acad. Sci. **65**:1007 (1957)