

MASTERARBEIT IN MATHEMATIK

# Validierung von FEM-Ansätzen höherer Ordnung für das EEG-Vorwärtsproblem

eingereicht von Florian Grüne

Braunschweig, August 2014





Gutachter:

Prof. Dr. Christian Engwer Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Priv.-Doz. Dr. Carsten Wolters Institut für Biomagnetismus und Biosignalanalyse

## Inhaltsverzeichnis

1	Ein	leitung	1			
<b>2</b>	Das	Das EEG-Vorwärtsproblem				
	2.1	Signalentstehung des EEG	4			
	2.2	Quasistatische Approximation	6			
	2.3	Herleitung der Potentialgleichung	7			
	2.4	Der Stromdipol	8			
	2.5	Der Subtraktionsansatz	9			
	2.6	Die analytische Lösung	12			
3	$P_k$ -1	Finite-Elemente-Ansätze	14			
4	Vali	Validierung höhergradiger $P_k$ -Ansätze				
	4.1	Kopfmodell	17			
	4.2	Dipole	19			
	4.3	Fehlermaße	19			
	4.4	Implementierung  .  .  .  .  .  .  .  .  .	20			
	4.5	$Hardware plat form \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ $	22			
	4.6	Ergebnisse	22			
5	Der	Deformationsansatz	30			
6	Vali	idierung des Deformationsansatzes	38			
	6.1	Radiale Deformation $\ldots \ldots \ldots$	38			
	6.2	Volumenleiter	41			
	6.3	Dipole	46			
	6.4	Ergebnisse	46			
7	Zus	ammenfassung und Ausblick	52			
Li	Literatur 5					
A	Abbildungsverzeichnis 57					

## 1 Einleitung

Die Elektroencephalographie (EEG) ist eine nichtinvasive Methode zur Messung der elektrischen Aktivität des Gehirns. Anwendung findet dieses Verfahren in der klinischen Diagnose neuronaler Erkrankungen und in der Hirnforschung. Beispielsweise hilft das EEG beim Erkennen von Epilepsien. Die physikalische Grundlage des EEG bildet der Ionentransport im Inneren der Nervenzellen des Gehirns. Die Verschiebungen dieser elektrischen Ladungen verursachen elektromagnetische Felder, die sich durch das Kopfgewebe und den Schädel bis hin zur Kopfoberfläche fortpflanzen. Mithilfe an der Kopfhaut angebrachter Elektroden können dann räumliche Differenzen und zeitliche Schwankungen des elektrischen Potentials gemessen werden. Der Psychiater Hans Berger leitete 1924 erstmals solche elektrischen Ströme an der Oberfläche des Kopfes ab und erfand damit das EEG, siehe dazu Berger [7]. Seit dem wurde es ständig weiterentwickelt. Was zunächst mit wenigen Elektroden begann, wird heutzutage durch moderne EEG-Kappen mit hunderten Elektroden bewerkstelligt. Mit der technischen Entwicklung ging jedoch auch ein Fortschritt der Datenauswertung einher. Zunächst konnten nur fachkundige Ärzte ein EEG visuell interpretieren. Für ein gutes Resultat ist dabei jedoch viel Erfahrung notwendig. Daher war und ist man an zuverlässigeren Methoden der EEG-Analyse interessiert. Die gemessenen Potentialdifferenzen stellen nur eine Wirkung der eigentlichen neuronalen Aktivität des Gehirns dar. Deshalb hat man sich mit der mathematischen Analyse des zugrunde liegenden inversen Problems befasst [16, 22]. Die dabei gewonnen Erkenntnisse führten dann zur Entwicklung automatisierter Quellrekonstruktionsverfahren. Um mit diesen Verfahren Rückschlüsse auf die Aktivität im Inneren des Gehirns ziehen zu können, muss das zugehörige Vorwärtsproblem gelöst werden. Dabei wird eine bestimmte elektrische Aktivität angenommen und dann berechnet, was das EEG in diesem Fall messen würde. Ein Optimierungsalgorithmus passt dann iterativ die angenommene elektrische Aktivität an, bis die simulierten EEG-Daten und die tatsächlich gemessenen hinreichend gut übereinstimmen. In jedem Iterationsschritt muss dabei ein Vorwärtsproblem gelöst werden. Doch woher stammt die zugehörige mathematische Gleichung? Die physikalische Grundlage des Vorwärtsproblems sind die quasistatischen Maxwell-Gleichungen, da sie die elektromagnetischen Zusammenhänge beschreiben. Über geeignete Umformungen erhält man aus ihnen eine elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese wird dann als Vorwärtsmodell bezeichnet. Da das Vorwärtsmodell nur für das sehr simple Kugelmodell des Kopfes exakt gelöst werden kann (siehe dazu deMunck [10]), man aber an realistischen Kopfmodellen interessiert ist, müssen zur Lösung der mathemati-

#### 1 EINLEITUNG

schen Gleichung numerische Verfahren, wie Finite Differenzen-, Finite Elemente- oder Randelemente-Verfahren eingesetzt werden [13]. Standard in der Anwendung sind derzeit die Randelemente-Verfahren. Dabei werden die Oberfläche des Kopfmodells und sämtliche Grenzflächen zwischen den unterschiedlichen Geweben im Inneren durch Dreieckselemente diskretisiert. Auf diesem Netz wird dann eine zur Differentialgleichung äquivalente Integralgleichung gelöst. Ein Nachteil dabei ist jedoch, dass eine adäquate Modellierung der Nervenbahnen durch eine anisotrope elektrische Leitfähigkeit unmöglich ist. Diesen Mangel behebt die Finite-Elemente-Methode. Dadurch, dass das gesamte Volumen in Elemente zerlegt wird, ist es möglich, jedem Element eine individuelle Leitfähigkeit zuzuweisen, die auch anisotrop sein darf. So kann dann die Differentialgleichung für ein realistisches Kopfmodell gelöst werden. Die Geometrie des Kopfes und die elektrischen Leitfähigkeiten können dafür aus Patienten-individuellen Magnetresonanztomographien verschiedener Aufnahmesequenzen entnommen werden und im Kopfmodell berücksichtigt werden. Eine besondere Herausforderung an das FE-Verfahren stellen allerdings die Sprünge der Leitfähigkeiten an den Materialgrenzen dar. Je näher ein Dipol an eine solche Unstetigkeit heranrückt, desto schlechter fällt die Gitter-Konvergenz des Verfahrens aus, was sich in erhöhten numerischen Fehlern äußert. Diesem Umstand widmet sich die vorliegende Arbeit. Bisherige FE-Ansätze befassten sich lediglich mit Ansatzfunktionen ersten Grades. Wir zeigen durch Studien an Kugelmodellen, dass durch Verwendung höhergradiger Ansatzfunktionen diese Konvergenz signifikant verbessert werden kann. Ein weiterer Punkt dieser Arbeit stellt die Verwendung eines alternativen Kopfmodells dar. Durch eine Transformation kann erreicht werden, dass die Leitfähigkeitssprünge in Normalenrichtung entlang der Grenzflächen beseitigt werden können, was eine erhöhte Regularität der Lösung zur Folge hat. Deren Auswirkung auf die numerischen Fehler wird in einer weiteren Kugelstudie untersucht.

Gegliedert ist diese Arbeit wie folgt. Nach dieser Einleitung folgt im zweiten Kapitel zunächst eine Erläuterung der Physiologie der Nervenzelle, auf die sich die Methode der Elektroencephalographie stützt. Darauf aufbauend wird die physikalische Modellierung der für das EEG relevanten Effekte vorgenommen und der numerische Subtraktionsansatz zur Lösung der Modellgleichung erklärt. Kapitel drei beschreibt die notwendigen Konzepte für den Einsatz höhergradiger Ansatzfunktionen im Rahmen der Finite-Elemente-Methode. Diese Ansätze werden in Kapitel vier in einer Kugelstudie validiert. Es schließt sich ein Kapitel über einen neuartigen Deformationsansatz zur Glättung der Leitfähigkeiten an, welcher schließlich in Kapitel sechs validiert wird. Das letzte Kapitel fasst diese Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf ein mögliches weiteres Vorgehen.

## 2 Das EEG-Vorwärtsproblem

In diesem Kapitel werden zunächst die physiologischen Grundlagen der Signalentstehung des EEG erläutert. Anschließend wird, ausgehend von den Maxwellgleichungen, das in der Einleitung erwähnte Vorwärtsmodell hergeleitet, indem zunächst eine quasistatische Approximation durchgeführt wird, die letztendlich die Potentialgleichung der Elektrostatik liefert.

#### 2.1 Signalentstehung des EEG

Die Ursache für die Potentialdifferenzen, welche mittels EEG detektierbar sind, ist die elektrische Aktivität des Gehirns. Durch die Sinne, erhält das Gehirn Reize von außen, verarbeitet diese Informationen, speichert sie als Erinnerungen ab und sendet Signale an die Muskeln. Die funktionale Grundeinheit bildet dabei die Nervenzelle. Wilhelm Waldeyer prägte dafür den Begriff des Neurons [28]. Im menschlichen Gehirn tauschen hunderte von Milliarden komplex verschalteter Neuronen gegenseitig Informationen aus und erzeugen damit im EEG ablesbare, charakteristische Muster der Hirnaktivität. In diesem Kapitel soll die Funktionsweise des Neurons und die damit verbundene Signalentstehung des EEG beschrieben werden. Für eine ausführliche Darstellung der Physiologie des Nervensystems siehe [23].

Grob gegliedert, besteht ein Neuron aus drei Teilen, dem Zellkörper, den Dendriten und seinem Axon (Abb. 2.1). Über die Dendriten erhält das Neuron elektrische Signale anderer Nervenzellen. Die Koppelung findet dabei auf chemischem Wege über die Synapsen statt. Eine elektrische Erregung veranlasst eine Synapse dazu, Botenstoffe auszuschütten, welche von Rezeptoren des anliegenden Dendriten aufgenommen werden. Dadurch kommt es zu einem Ionentransport durch die Zellmembran des Dendriten, was eine kurzfristige Potentialänderung zur Folge hat. Diese lokale Änderung des elektrischen Potentials im Dendrit pflanzt sich dann über seine gesamte Länge bis hin zum Zellkörper des Neurons fort. Da ein Neuron aber möglicherweise über sehr viele Dendriten verfügt, werden all deren ankommenden Signale hier als Gesamtpotential aufsummiert. Kommt es dabei zum Überschreiten eines gewissen Schwellwertes, dem Aktionspotential, werden auch hier Ionenkanäle geöffnet und Ionen strömen in die Zelle ein. Die daraus resultierende Potentialänderung pflanzt sich dann über das Axon zu den daran gekoppelten Zellen fort.



Abbildung 2.1: Links: Motoneuron mit seinen Hauptbestandteilen. Quelle: Gemeinfrei veröffentlicht auf Wikimedia Commons als File:Neuron5.jpg. Rechts: Neuronen der Großhirnrinde mit Pyramidenzellen. Quelle: Gemeinfrei veröffentlicht auf Wikimedia Commons als File:Gray754.png.

Auf diesem Wege wird es durch das Auslösen weiterer Aktionspotentiale im Axon immmer wieder verstärkt. Die Weiterleitung der Erregung läuft daher im Axon sehr schnell ab und ist von quadrupolarar Ordnung [21]. Das heißt, dass die elektrische Feldstärke in der Entfernung R vom Axon um den Faktor  $1/R^3$  herabgesetzt ist. An den Elektroden ist daher, wegen der Schwäche der Amplitude und wegen der begrenzten zeitlichen Auflösung des EEG, kein Signal der axonalen Erregung detektierbar. Was als Kurve im EEG sichtbar ist, ist eine Erregung der Dendriten, welche sich dipolar verhält und daher nur mit dem Faktor  $1/R^2$  abfällt. An den Elektroden wird damit für eine Messung noch eine ausreichende Amplitude erreicht. Auch auf der zeitlichen Skala spielt sich dieser Vorgang im messbaren Bereich von 10-20ms ab. Die Erregung eines einzelnen Dendriten wäre allerdings nicht zu messen. Die tatsächlich gemessenen EEG-Signale stammen aus einer synchronen Erregung von ganzen Verbänden von Neuronen der Großhirnrinde. In der Großhirnrinde befindet sich nämlich eine Schicht hauptsächlich parallel ausgerichteter Neuronen, welche untereinander eng verknüpft sind und Pyramidenzellen genannt werden (Abb. 2.1). Diese Zellen erzeugen bei gleichzeitiger Aktivierung eines kleinen zusammenhängenden Bereiches ein vom EEG messbares elektrisches Signal.

#### 2.2 Quasistatische Approximation

Da der menschliche Kopf mit seiner Aktivität der Nervenzellen ein elektromagnetisches System bildet, liefern die 1864 von James Clerk Maxwell [17] angegebenen Grundgleichungen der Elektrodynamik ein geeignetes Ausgangsmodell. Es handelt sich dabei um ein gekoppeltes System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, welches den Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern beschreibt. Das Gleichungssystem lautet

(2.1) 
$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

(2.3) 
$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

(2.4) 
$$\nabla \times B = \mu_0 j + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E}{\partial t},$$

wobei E und B die elektrische Feldstärke und die magnetische Flussdichte darstellen. Weiter beschreiben  $\rho$  und j die elektrische Ladungs- und Stromdichte,  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  die elektrische und magnetische Feldkonstante, sowie  $\epsilon_r$  die relative Permittivität.

Als nächstes wird mit der quasistatischen Approximation gezeigt, dass die zeitliche Koppelung für die Anwendung auf das EEG-Problem vernachlässigt werden kann. Dabei halten wir uns an Hämäläinen [12]. Zunächst kann die Stromdichte in Gleichung (2.4) mithilfe der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$  ausgedrückt werden durch  $j = \sigma E$ . Da das elektrische Feld Fourier-transformierbar ist, darf eine harmonische Zeitabhängigkeit von E für eine feste Kreisfrequenz  $\omega$  angenommen werden. Das heißt,  $E(t) = E_0 e^{i\omega t}$ . Zusammen mit (2.4) folgt dann

(2.5)  

$$\nabla \times B = \mu_0 \boldsymbol{\sigma} E + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r i \omega E$$

$$= (\mu_0 \boldsymbol{\sigma} + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r i \omega) E$$

$$= \mu_0 \boldsymbol{\sigma} \left( 1 + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \omega}{\boldsymbol{\sigma}} \right) E.$$

Typische EEG-Signale bewegen sich in einem Frequenzband von 0.5 - 70 Hz. Mit einiger Sicherheit können daher die für das Problem relevanten Frequenzen durch  $f = \omega/2\pi < 100$  Hz nach oben abgeschätzt werden. Setzt man weiter für die Leitfähigkeit einen typischen Wert von  $\boldsymbol{\sigma} = 0.3$  S/m und  $\epsilon_r = 10^5$ , so folgt für den letzten Summanden in Gleichung (2.5),  $\epsilon_0 \epsilon_r \omega / \sigma \approx 2 \cdot 10^{-3} \ll 1$ . Somit kann die Zeitableitung in (2.4) ohne großen Fehler vernachlässigt werden. Mit Gleichung (2.3) folgt weiter

$$\nabla \times \nabla \times E = -\nabla \times \frac{\partial B}{\partial t}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times B)$$
$$= -(\mu_0 \boldsymbol{\sigma} + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r i \omega) \frac{\partial E}{\partial t}$$
$$= -(\mu_0 \boldsymbol{\sigma} i \omega - \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega^2) E$$

Lösungen dieser Gleichung haben eine charakteristische Wellenlänge von

$$\lambda_c = |\mu_0 \boldsymbol{\sigma} i \omega - \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega^2|^{-1/2} \approx 65 \text{ m}.$$

Weil das sehr viel größer als ein menschlicher Kopf ist, kann in (2.3) auch der Term  $\partial B/\partial t$  vernachlässigt werden. Damit erhalten wir die quasistatische Approximation der Maxwell-Gleichungen

(2.6) 
$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

(2.7) 
$$\nabla \cdot B = 0,$$

(2.8) 
$$\nabla \times E = 0,$$

(2.9) 
$$\nabla \times B = \mu_0 j.$$

Für dieses Gleichungssystem kann jeder Zeitpunkt unabhängig betrachtet werden.

#### 2.3 Herleitung der Potentialgleichung

Da mit der quasistatischen Approximation das elektrische Feld rotationsfrei ist, kann über  $E = -\nabla u$  ein elektrisches Potential definiert werden. Weiter teilen wir die Stromdichte, gemäß  $j = j^p + \sigma E$ , in zwei Teile auf. Dabei stellt  $j^p$  den elektrischen Strom innerhalb der Nervenzellen dar.  $j^p$  steht also unmittelbar in Verbindung mit der Aktivität des Gehirns und wird daher auch als Primärstrom bezeichnet. Der zweite Term  $\sigma E$  stellt die resultierenden passiven Rückflüsse dar und heißt deshalb Sekundärstrom. Nutzt man das eben definierte Potential, so kann der Strom ausgedrückt werden durch  $j = j^p - \sigma \nabla u$ .

Setzen wir dies in (2.9) ein und wenden die Divergenz an, so folgt für alle  $x \in \Omega$ 

$$0 = \nabla \cdot \nabla \times B(x)$$
  
=  $\nabla \cdot (j^p(x) - \boldsymbol{\sigma}(x)\nabla u(x))$   
=  $\nabla \cdot j^p(x) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}(x)\nabla u(x))$ 

Für diese Differentialgleichung benötigen wir noch eine passende Randbedingung. Diese erhalten wir durch die Flussbedingung des elektrischen Stroms. Da die den Kopf umgebende Luft als Isolator angesehen werden kann, darf keine Ladung den Kopf verlassen. Dies können wir als Randbedingung formulieren und damit das Randwertproblem der Elektrostatik angeben:

(2.10)  

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}(x)\nabla u(x)) = \nabla \cdot j^{p}(x) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\boldsymbol{\sigma}\nabla u(x) \cdot n(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega$$

$$\int_{\Omega} u(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) = 0$$

Die Mittelwertbedingung dient dazu, das Potential auf einem Niveau zu fixieren, da sonst keine eindeutige Lösung erwartet werden kann. Gelöst werden soll das System (2.10) auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , welches den menschlichen Schädel repräsentiert und daher aus mehreren Teilgebieten zusammengesetzt ist, die die einzelnen Gewebebereiche im Kopf (Gehirn, Liquor, Schädel, Haut) darstellen. D.h.  $\Omega = \biguplus_{i=1}^n \Omega_i$ . Zu beachten ist dabei, dass die Gleichung keine klassische Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  besitzen kann, da die Leitfähigkeit an den Gewebegrenzen  $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$  Sprünge aufweist. Das Potential ist zwar stetig an diesen Grenzen, doch dessen Gradient muss die Sprünge ausgleichen, um einen stetigen Fluss zu garantieren. Die Isoflächen des Potentials weisen also an den Gewebegrenzen einen Knick auf. Somit kann  $\nabla u$  nicht stetig sein, was die Existenz einer klassischen Lösung ausschließt. Sinn macht es somit nur nach schwachen Lösungen  $u \in H^1_*(\Omega) :=$  $\{u \in H^1(\Omega) | \int_{\Omega} u(x) d\Omega(x) = 0\}$  zu suchen.

#### 2.4 Der Stromdipol

Offen ist bis jetzt noch, wie die Stromdichte  $j^p$  auf der rechten Seite der Differentialgleichung zu wählen ist. Das soll hier geklärt werden. Für das inverse Verfahren der Quellrekonstruktion ist es vorteilhaft, räumlich begrenzte elektrische Aktivitäten als Lösungen verwenden zu können. Ein Beispiel bei dem dies sehr wichtig ist, ist das Lokalisieren fokaler Epilepsien. Die dabei auftretenden elektrischen Felder verhalten sich in hinreichend großer Entfernung wie die eines Dipols. Daher bietet sich als mathematisches Modell für eine solche lokal begrenzte Aktivität im Hirn der Stromdipol an [12,22]. Er wird als Grenzwert zweier sich einem gemeinsamen Ort  $x_0 \in \Omega$  nähernden, gegensätzlichen Punktladungen mit Ladung  $\pm \rho$  definiert, wobei das Dipolmoment

$$M := \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \rho \to \infty}} \int x \left( \rho \, \delta_{x_0 + \frac{\epsilon}{2}}(x) - \rho \, \delta_{x_0 - \frac{\epsilon}{2}}(x) \right) \mathrm{d}\Omega(x) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \rho \to \infty}} \rho \epsilon$$

konstant gehalten wird. Wir schreiben dann die Stromdichte eines Dipols mithilfe des Dirac-Maßes als

$$j^p(x) = M\delta_{x_0}(x)$$

Mit dieser Definition der Stromdichte kommt ein zusätzliches Regularitätsproblem hinzu. Eine eindeutige schwache Lösung von (2.10) in  $H^1_*(\Omega)$ , existiert nur, wenn  $\partial/\partial x_i j^p(x) \in L^2(\Omega)$ , aber es gilt  $\delta_{x_0}(x) \in H^{-3/2-\epsilon} \,\forall \epsilon > 0$ , vgl. [27]. Die klassische Formulierung (2.10) kann somit nicht als wohlgestellt aufgefasst werden. Um dieses Problem zu umgehen, definieren wir im nächsten Abschnitt direkt eine schwache Form der Differntialgleichung und teilen deren Lösung in zwei Teile auf.

#### 2.5 Der Subtraktionsansatz

Der Subtraktionsansatz geht mit der durch den Dipol hervorgerufenen Singularität auf analytische Weise um. Er besteht darin, das elektrische Potential in zwei Teile zu zerlegen. Der erste Teil beschreibt das Potential, welches durch den Dipol in einem homogenen unendlichen Leiter hervorgerufen wird. Dieses wird analytisch berechnet. Der zweite Teil ist ein Korrekturpotential, welches die tatsächliche Geometrie und die Leitfähigkeiten berücksichtigt. Dieser Teil wird numerisch berechnet. Die Summe der beiden Potentiale ist dann die gesuchte Lösung des Vorwärtsproblems (2.10). Bei der Darstellung des Subtraktionsansatzes beziehen wir uns auf [11, 29]. Wir treffen folgende Annahme für die Leitfähigkeit.

**Definition 2.1.** (Homogenität im Quellbereich)

In einem kleinen Bereich rund um den Dipol sei die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  homogen, das heißt

(2.11) 
$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \boldsymbol{\sigma}_{\infty} := \boldsymbol{\sigma}(x_0) \; \forall x \in B_{\epsilon}(x_0)$$

für ein  $\epsilon > 0$ .

Mithilfe der neu eingeführten Leitfähigkeit  $\sigma_{\infty}$  können wir jetzt eine Korrekturleitfähigkeit

(2.12) 
$$\boldsymbol{\sigma}_{\rm corr}(x) := \boldsymbol{\sigma}(x) - \boldsymbol{\sigma}_{\infty}.$$

definieren. Analog dazu teilen wir das Potential gemäß

$$(2.13) u_{\rm corr}(x) = u(x) - u_{\infty}(x)$$

in die beiden oben erwähnten Teile auf, wobei  $u_{\infty}$  die Lösung der Gleichung

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{\infty} \nabla u_{\infty}(x)) = \nabla \cdot j^{p} \qquad \text{in } \mathbb{R}^{3}$$

darstellt. Nach [29] ist diese für einen allgemeinen anisotropen Leitfähigkeitstensor  $\sigma_{\infty}$ :  $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  durch

$$u_{\infty}(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \boldsymbol{\sigma}_{\infty}}} \frac{\langle M, \boldsymbol{\sigma}_{\infty}^{-1}(x-x_0) \rangle}{\langle \boldsymbol{\sigma}_{\infty}^{-1}(x-x_0), (x-x_0) \rangle^{3/2}}$$

gegeben. Für  $\nabla u_{\infty}(x)$  existiert ebenfalls ein analytischer Ausdruck [29]. Betrachtet man  $u_{\infty}(x)$ , so sieht man, dass die Funktion für ein beliebiges  $\epsilon > 0$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus B_{\epsilon}(x_0)$  glatt ist. In  $x_0$  liegt jedoch eine Singularität vor. Man kann zeigen, dass aufgrund der Singularität weder  $u_{\infty}(x) \in H^1(\Omega)$ , noch  $u_{\infty}(x) \in L^2(\Omega)$  gilt [11]. Zumindest gilt jedoch  $u_{\infty}(x) \in L^1(\Omega)$ . Diese Eigenschaft reicht für die folgende Definition.

**Definition 2.2.** (Schwache Formulierung) Suche eine Funktion  $u: \Omega \to \mathbb{R}^3$ , so dass

(2.14) 
$$-\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) = -\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\infty} \nabla u_{\infty}(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\infty} \nabla u_{\infty}(x) \cdot n(x) v(x) \, \mathrm{d}\partial\Omega(x)$$

(2.15) 
$$\int_{\Omega} u(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) = 0$$

für alle  $v \in H^1(\Omega)$  gilt.

Unklar ist dabei, in welchem Funktionenraum eine solche Funktion u liegen soll. Um dieses Problem zu lösen, führen wir den Subtraktionsansatz mithilfe des oben definierten Korrekturpotentials ein. Dazu formen wir mit (2.12) und (2.13) zunächst das Integral auf der linken Seite der schwachen Formulierung (2.14) um.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(x) \nabla u_{\infty}(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) \\ + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(x) \nabla u_{\mathrm{corr}}(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) \\ = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\infty}(x) \nabla u_{\infty}(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) \\ + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{corr}}(x) \nabla u_{\infty}(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) \\ + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(x) \nabla u_{\mathrm{corr}}(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}\Omega(x)$$

Setzen wir dies in (2.14) ein und sortieren die Terme um, so erhalten wir

## Folgerung 2.1. (Subtraktionsansatz)

Such  $u_{corr} \in H^1(\Omega)$ , so dass

(2.16) 
$$-\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(x) \nabla u_{\text{corr}}(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\text{corr}}(x) \nabla u_{\infty}(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\infty} \nabla u_{\infty}(x) \cdot n(x) v(x) \, \mathrm{d}\partial\Omega(x)$$

(2.17) 
$$\int_{\Omega} u_{\rm corr}(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) = -\int_{\Omega} u_{\infty}(x) \, \mathrm{d}\Omega(x)$$

für alle  $v \in H^1(\Omega)$  gilt.

Die letzte Gleichung folgt aus (2.15) und garantiert die Bedingung  $u \in H^1_*(\Omega)$ . Da die Korrekturleitfähigkeit aufgrund der Homogenität im Quellbereich für alle  $x \in B_{\epsilon}(x_0)$  verschwindet, enthält das Volumenintegral auf der rechten Seite von (2.16) keine Singularität mehr. Für das Funktional

$$l: H^{1}(\Omega) \to \mathbb{R};$$
$$v \mapsto \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{corr}(x) \nabla u_{\infty}(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\infty} \nabla u_{\infty}(x) \cdot n(x) v(x) \, \mathrm{d}\partial\Omega(x)$$

auf der rechten Seite, gilt somit  $l \in H^{-1}(\Omega)$ . Dadurch ist die Aufgabe, eine Lösung  $u_{\text{corr}} \in H^1(\Omega)$  zu suchen, wohlgestellt. Es gilt sogar folgender Satz.

#### Satz 2.1. (Existenz und Eindeutigkeit)

Sei  $\Omega$  kompakt und stückweise glatt berandet. Dann besitzt die Gleichung des Subtraktionsansatzes genau eine Lösung  $u_{corr} \in H^1(\Omega)$ .

Beweis. Siehe [29].

#### 2.6 Die analytische Lösung

Zu Validierungszwecken werden häufig Multischalen-Kugelmodelle verwendet, da für diese Geometrie eine analytische Lösung für Gleichung (2.10) zur Verfügung steht. Wir verwenden eine als Potenzreihe gegebene Lösung von de Munck [10]. Das Potential an einer Elektrode am Ort  $y \in \partial \Omega$  für einen Dipol  $M\delta_{x_0}$  kann demnach durch folgende Formel berechnet werden.

$$u_{M,x_{0}}(y) = \frac{1}{4\pi} \left\langle M, \ y \frac{S_{0}}{y^{r}} + x_{0} \left( \frac{S_{1}}{x_{0}^{r}} - \cos \omega_{x_{0},y} \frac{S_{0}}{x_{0}^{r}} \right) \right\rangle$$

$$S_{0} = \frac{F_{0}}{x_{0}^{r}} \frac{\Lambda}{(1 - 2\Lambda \cos \omega_{x_{0},y} + \Lambda^{2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{1}{x_{0}} \sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1)R_{n}(x_{0}^{r}, y^{r}) - F_{0}\Lambda^{n}]P_{n}'(\cos \omega_{x_{0},y})$$

$$S_{1} = F_{1} \frac{\Lambda}{(1 - 2\Lambda \cos \omega_{x_{0},y} + \Lambda^{2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1)R_{n}'(x_{0}^{r}, y^{r}) - F_{1}n\Lambda^{n}]P_{n}(\cos \omega_{x_{0},y})$$

Dabei bezeichnen  $x_0^r$  und  $y^r$  die Radien von  $x_0$  und y. Durch  $\omega_{x_0,y}$  ist der Winkel zwischen  $x_0$  und y gegeben und  $P_n$  bezeichnet die Legendre-Polynome.  $F_i$  und  $\Lambda$  werden ausführlich in [10] definiert.

## 3 $P_k$ -Finite-Elemente-Ansätze

Dieser Abschnitt erklärt höhergradige Lagrange-Finite-Elemente-Ansätze, welche zur numerischen Approximation des oben beschriebenen EEG-Vorwärtsproblems genutzt werden sollen. Abgesehen von Tests mit quadratischen Ansatzfunktionen für einzelne Dipole in [26], wurde das Lösen des EEG-Vorwärtsproblems nur mit linearen Ansatzfunktionen genauer untersucht. Wir führen im nächsten Abschnitt eine ausgiebige Studie mit einer statistischen Fehleranalyse für quadratische und kubische Ansatzfunktionen durch. Die Idee bei höhergradigen Polynomen als Ansatzfunktionen ist, durch eine bessere Approximation der analytischen Lösung  $u_{corr} \in H^1(\Omega)$  von Gleichung (2.16) eine höhere Konvergenzrate zu erzielen. Bei den folgenden Definitionen halten wir uns an [20].

Wir beginnen direkt mit den zentralen Dingen und setzen Begriffe wie *Triangulierung*, *baryzentrische Koordinaten* usw. voraus. Für eine ausführlichere Darstellung verweisen wir auf [20].

#### **Definition 3.1.** (*Gitter k-ter Ordnung*)

Sei  $T \subset \mathbb{R}^3$  ein Tetraeder,  $a_0, ..., a_3$  dessen Ecken und  $k, m \in \mathbb{N}$ . Dann heißt

$$G_k(T) := \left\{ x = \sum_{i=0}^{i=3} \lambda_i a_i | \lambda_i \in \left\{ \frac{m}{k} | m = 0, ..., k \right\}, \ 0 \le \lambda_i, \ \sum \lambda_i = 1 \right\}$$

das Gitter k-ter Ordnung auf T.

Die Gesamtheit der Gitter k-ter Ordnung aller Tetraeder einer Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  definiert, wie wir in der folgenden Definition sehen werden, die Freiheitsgrade (*Degrees of Freedom* oder DoF) des Ansatzraumes  $S_h^k$ .

**Definition 3.2.** (Lagrange Finite Elemente Raum  $S_h^k$ )

(i) Set  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{T}_h$  eine zulässige Triangulierung von  $\Omega$ . Dann heißt

$$S_h^k := \{ v_h \in C^0(\Omega) | v_h|_T \in \mathbb{P}^k(T), T \in \mathcal{T}_h \}$$

der Lagrange Finite-Elemente-Raum der Ordnung k.

(ii) Das Lagrange-Gitter k-ter Ordnung ist definiert als

$$G_k(\mathcal{T}_h) := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} G_k(T)$$

(iii) Durch die Werte an den Punkten  $\bar{x}_j \in G_k(T_h)$  ist jede Funktion  $v_h \in S_h^k$  offenbar eindeutig festgelegt. Deshalb definiert

$$\phi_i \in S_h^k, \ \phi_i(\bar{x}_j) = \delta_{ij}, \ i, j = 1, ..., \#G_k(\mathcal{T}_h)$$

eine Basis von  $S_h^k$ .



Abbildung 3.1: Gitter der Ordnungen 1,2,3 eines Tetraeders.

Für unsere Zwecke sind lineare, quadratische und kubische Ansatzfunktionen interessant. Den Polynomgrad weiter zu erhöhen, würde, wie wir später sehen, die Rechenzeiten unverhältnismäßig steigern. Die Abbildung 3.1 zeigt die Anordnung der Freiheitsgrade in einem Tetraeder für diese drei Ansätze.

Unter Verwendung von  $S_h^k$  als Ansatz- und Testraum und der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$ , schreiben wir jetzt Gleichung (2.16) als

$$(3.1) \qquad -\sum_{i=1}^{N} u_{\text{corr},i} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(x) \nabla \phi_{i}(x) \cdot \nabla \phi_{j}(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) \\ = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\text{corr}}(x) \nabla u_{\infty}(x) \cdot \nabla \phi_{j}(x) \, \mathrm{d}\Omega(x) \qquad \forall j = 1, ..., \dim(S_{h}^{k}) \\ + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\infty} \nabla u_{\infty}(x) \cdot n(x) \phi_{j}(x) \, \partial\Omega(x).$$

Durch die höhere Regularität von  $S_h^2$  und  $S_h^3$  gegenüber  $S_h^1$ , kann eine bessere Konvergenz beim numerischen Lösen der Differentialgleichung erwartet werden. Das soll im folgenden Abschnitt in einer Studie untersucht werden.



Abbildung 4.1: Schnitt durch das feine Rechennetz (tet519K) des vierschichtigen Kopfmodells. Die Elektroden sind grün gefärbt. Die anderen Farben repräsentieren die unterschiedlichen Gewebetypen.

## 4 Validierung höhergradiger $P_k$ -Ansätze

In diesem Kapitel soll der Einsatz von höhergradigen  $P_k$ -Ansatzfunktionen zur Lösung des EEG-Vorwärtsproblems hinsichtlich Akkuratesse und Rechenzeit untersucht werden. Um die numerischen Ergebnisse mit der analytischen Referenzlösung (2.18) vergleichen zu können, nutzen wir für diese Studie das Multischalen-Kugelmodell.

### 4.1 Kopfmodell

Die Simulationen und die anschließende Validierung führen wir an einem 4-schichtigen Kopfmodell mit zwei unterschiedlich feinen Diskretisierung durch. Es handelt sich dabei um zwei Tetraedernetze, die sich im wesentlichen in der Netzfeinheit der drei äußeren Schalen unterscheiden. In diesen Modellen werden die vier Gewebebereiche Gehirn, Liquor, Schädel und Haut berücksichtigt. Eine Parametrisierung des Modells zeigt Tabelle 4.1.



Abbildung 4.2: Links: Detailansicht des grobe Rechennetzes (tet64K). Rechts: Detailansicht des feinen Rechennetzes (tet519K). Die Farben repräsentieren die unterschiedlichen Gewebetypen.

Gewebetyp	Radius [mm]	Leitfähigkeit [S/m]
Gehirn	78	0.33
Liquor	80	1.79
Schädel	86	0.0042
Haut	92	0.33

Tabelle 4.1: Parametrisierung des 4-Schalen-Kugelmodells

Um die Netze zu erstellen, wurden zunächst die vier Oberflächen der einzelnen Gewebebereiche durch Dreiecksnetze approximiert. Anschließend wurden die Teilvolumina durch den Gittergenerator TetGen [24] mithilfe der Oberflächennetze in Tetraeder zerlegt. TetGen basiert auf dem Delaunay-Algorithmus, dem ein Qualitäts- und ein Volumen-Parameter für das Netz übergeben werden kann. Eine Ansicht des feinen Netzes zeigt Abb. 4.1. In der Detailansicht in Abb. 4.2 ist die unterschiedliche Güte der beiden Diskretisierungen zu erkennen. Das feine Gitter ist aus der Arbeit von Vorwerk [27] übernommen. Das grobe Gitter wurde mithilfe des Volumen-Parameters so konstruiert, dass die Anzahl der Freiheitsgrade für  $P_2$ -Ansatz-Funktionen im groben Gitter in etwa derer für  $P_1$ -Ansatz-Funktionen im feinen Gitter entspricht, vgl. dazu Tabelle 6.2. Diese Vorgehensweise er-

möglicht es, die Effekte der unterschiedlichen Ansatzfunktionen in verschiedenen Netzen direkt vergleichen zu können.

Rechennetz	#Knoten	#Elemente	$\# DoF P_1$	$\# DoF P_2$	#DoF $P_3$
tet64K	64.060	371.947	64.060	507.956	1.703.636
tet519K	518.730	3.159.575	518.730	4.232.665	

Tabelle 4.2: Daten der Rechennetze (tet64K) und (tet519K) für die Validierung

#### 4.2 Dipole

Für die Studie im Kugelmodell wurden zur Validierung radiale und tangentiale Dipole verwendet. In [27] wurde gezeigt, dass die ermittelten numerischen Fehler sehr von der lokalen Netzgeometrie abhängen. Um diese lokalen Abhängigkeiten zu vermeiden, wurden für 15 logarithmisch gesetzte Exzentrizitäten zwischen 0.3 und 0.995 jeweils 25 Dipole in radialer und tangentialer Orientierung zufällig in der Kugel verteilt. Die Exzentrizität bezeichnet dabei den relativen Radius des Dipols in Bezug auf den Radius des Gehirns. Sie ist folglich definiert als

Exzentrizität = 
$$\frac{r}{r_{\text{Gehirn}}} = \frac{r}{78 \text{mm}}$$
.

Die daraus gewonnen Ergebnisse können so einer statistischen Analyse unterzogen werden, um die auftretenden numerischen Fehler zuverlässig identifizieren zu können.

#### 4.3 Fehlermaße

Für den Vergleich zweier Lösungen des Vorwärtsproblems bieten sich verschiedene Fehlermaße an. Zur Verfügung stehen dafür prinzipiell die Werte an allen Punkten  $y \in \Omega$  mit  $y^r > x_0^r$ , vergleiche Gleichung (2.18). Da man aber hinsichtlich der Lösung des inversen Problems nur an einer möglichst guten Auswertung an den Elektrodenpositionen  $y_i \in \partial \Omega$ interessiert ist, schränken wir unsere Validierung auf diese Punkte ein. Für die numerischen Tests wurde dazu eine möglichst gleichmäßig verteilte Elektrodenkonfiguration aus 222 Elektroden auf der Oberfläche des Kugelmodells erzeugt, siehe Abb. 4.1. Da das Modell der Finite-Elemente-Simulation die tatsächliche Kugelgeometrie aber nur durch Tetraeder approximieren kann, liegen die Elektrodenpositionen im Allgemeinen außerhalb des numerischen Rechengitters. Um dieses Problem zu lösen, wurden die Elektroden für die Auswertung auf den nächstgelegenen Punkt im Rechengitter projiziert. Die Auswertung und der Vergleich der numerischen Lösung  $u_{\text{num}}$  mit der analytischen Referenzlösung  $u_{\text{ana}}$  findet somit an den Punkten  $\bar{y}_i := \min_{\bar{y}_i \in \Omega} ||y_i - \bar{y}_i||$  statt. Im Bereich der Quellanalyse haben sich zwei besondere Fehlermaße etabliert. Der RDM-Fehler (Relative Difference Measure) und der MAG-Fehler (Magnitude Error). Sie sind definiert durch die beiden folgenden Ausdrücke.

(4.1) 
$$\operatorname{RDM}(u_{\operatorname{num}}, u_{\operatorname{ana}}) := \left\| \frac{u_{\operatorname{num}}}{\| u_{\operatorname{num}} \|_2} - \frac{u_{\operatorname{ana}}}{\| u_{\operatorname{ana}} \|_2} \right\|_2$$

(4.2) 
$$MAG(u_{num}, u_{ana}) := \frac{\| u_{num} \|_2}{\| u_{ana} \|_2}$$

Der RDM beschreibt den für die Quellenanalyse wichtigen Topologie-Fehler der Lösung. Er ist offenbar unabhängig von den absoluten Werten der Lösungen, da diese zunächst normiert werden. Der optimale Wert des RDM liegt bei 0. Nach oben ist er durch 2 beschränkt. Den Fehler in der absoluten Größe der Lösungswerte beschreibt der Magnituden-Fehler MAG. Sein optimaler Wert liegt bei 1. Um den MAG in den Grafiken logarithmisch darstellen zu können, verwenden wir ihn jedoch in seiner prozentualen Darstellung

$$MAG(\%) = |1 - MAG| \cdot 100\%,$$

deren Optimum bei 0 liegt.

#### 4.4 Implementierung

Zur Implementierung wurde das Open Source Framework *DUNE* [3–6,8,9] benutzt, welches eine nutzerfreundliche Schnittstelle zur Implementierung von Numerischen Algorithmen zur Verfügung stellt.

DUNE besteht aus einer Reihe von einzelnen Modulen, deren Funktionalitäten aufeinander aufbauen. Die grundlegende Schnittstelle zum Arbeiten mit Gittern stellt das Modul dune-grid dar. Verschiedene andere Module wie dune-common, dune-localfunctions und dune-istl liefern allgemeine Funktionalität, Ansatzfunktionen und iterative Löser. Das zentrale Modul für den Anwender ist jedoch dune-pdelab, was die gesamte Infrastruktur zur Assemblierung der Steifigkeitsmatrix und des Residuums bereitstellt. In dune-pdelab muss der Nutzer die Differentialgleichung nur als lokalen Operator implementieren, welcher die Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementbeiträge des Lastvektors assembliert. Um die weitere Organisation der Daten und der Berechnung innerhalb des eigentlichen Finite Elemente Programmes muss sich nicht gekümmert werden. Ein weiterer Vorteil den DUNE bietet, ist eine relativ einfache Möglichkeit der Parallelisierung mithilfe eines MPI-Wrappers. Wir nutzen ihn für eine Parallelisierung mit OpenMPI. Im Folgenden soll kurz der Programmablauf in den einzelnen Schritten skizziert werden.

- Die Parameter für die Simulation werden aus einer Datei eingelesen.
- Über die DUNE-eigene Schnittstelle DGF (DUNE Grid Format) werden das Gitter und die Leitfähigkeiten eingelesen.
- Ein Gebietszerlegungsverfahren der Bibliothek METIS [14] partitioniert das Gitter für die parallele Berechnung.
- Die Elektrodenpositionen werden aus einer Datei eingelesen.
- Die Elektroden werden auf die Oberfläche des Rechenmodells projiziert und dem jeweiligen Prozessor zugewiesen.
- Die Dipole werden aus einer Datei eingelesen.
- Der Raum der Ansatzfunktionen wird definiert.
- Eine etwaige Deformation des Modells wird berechnet.
- Die künstlichen Randbedingung an den Prozessorgrenzen werden bestimmt.
- Die Referenzabbildung auf die einzelnen Elemente wird bestimmt.
- Der lokale Operator wird angelegt.
- Mithilfe des lokalen Operators wird ein globaler Grid Operator erzeugt.
- Der Grid Operator assembliert die Steifigkeitsmatrix.
- Für einen Dipol assembliert der Grid Operator das Residuum.
- Ein CG-Löser für eine nicht überlappende Gebietszerlegung mit SSORk Vorkonditionierung löst das lineare Gleichungssystem.
- Das Potential  $u_{\infty}$  wird zur Lösung  $u_{\text{corr}}$  hinzu addiert.

• Mithilfe der analytischen Lösung werden die Fehler RDM und MAG berechnet.

#### 4.5 Hardwareplattform

Ausgeführt wurden die Simulationen auf einem Rechencluster von Amazon Web Services [2]. In Verbindung mit dem Interface StarCluster des MIT [25], kann dort auf einfache Weise Hardware gemietet werden. Unsere Simulationen wurden auf einer Instanz mit einer Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2680 v2 @ 2.80GHz und 60 GB RAM durchgeführt. Die CPU besteht aus zehn physikalischen Kernen die insgesamt bis zu 32 Threads unterstützen.

#### 4.6 Ergebnisse

Die Abbildungen (4.3)-(4.6) stellen die Ergebnisse der Vorwärtssimulationen für radiale und tangentiale Dipole dar. Aufgetragen sind dabei die oben beschriebenen Fehler RDM und MAG(%) als Boxplots für die 15 verschiedenen Exzentrizitäten. Um die Fehler in allen Größenordnungen übersichtlich darstellen zu können, wurde eine doppelt-logarithmische Skalierung gewählt. Die Ergebnisse zeigen für RDM und MAG(%) in beiden Modellen geringere Fehler bei zunehmendem Grad der Ansatzfunktionen. Die Grafiken verdeutlichen auch die Abhängigkeit der Fehler von der Gitterweite an der Grenze zwischen Gehirn und Liquor. Diese liegt im groben Gitter bei 1.95mm und im feinen bei 1.56mm, vergleiche dazu Abbildung (4.2). Liegen die Dipole innerhalb des äußersten Elementes des Gehirns, wachsen die Fehler mit zunehmender Exzentrizität stärker an, als sie es im Inneren des Gehirns tun. Dieses Verhalten ist dem Geometriefehler des Modells und der Unstetigkeit der elektrischen Leitfähigkeit beim Übergang vom Gehirn zum Liquor zuzurechnen. Sieht man genauer auf die Zahlenwerte, erkennt man, dass beim Übergang von  $P_1$ - zu  $P_2$ -Funktionen der RDM mindestens um den Faktor 10 reduziert wird, solange das äußerste Element des Gehirns nicht berücksichtigt wird. Teilweise liegt die Verbesserung sogar deutlich darüber. Diese Fehlerreduktion wird allerdings mit einer längeren Rechenzeit erkauft. Interessanter, um den tatsächlichen Vorteil höhergradiger Ansatzfunktionen auch hinsichtlich der Rechenzeit zu untersuchen, ist der direkte Vergleich zwischen  $P_1$ - und  $P_2$ -Funktionen bei gleicher Anzahl an Freiheitsgraden. Wie oben schon erwähnt, wurde das grobe Gitter mit der Vorgabe erzeugt, für  $P_2$ -Funktionen in etwa so viele Freiheitsgrade aufzuweisen, wie das feine Gitter für  $P_1$ -Funktionen. In dieser Konfiguration kann eine ähnliche Rechenzeit erwartet werden. Den direkten Vergleich des RDM zeigt Abbildung (4.7). Man sieht, dass die Simulation mit  $P_2$ -Funktionen im groben Gitter im Vorteil ist, solange die Dipole nicht im letzten Element vor dem Leitfähigkeitsprung liegen. Der RDM für  $P_2$ -Funktionen liegt in diesem Bereich knapp unter dem für  $P_1$ -Funktionen. Die durch die erhöhte Regularität der  $P_2$ -Funktionen gewonnene Akkuratesse ist offenbar so groß, das selbst der größere Geometriefehler des groben Modells kompensiert wird und trotzdem noch kleinere Fehler als mit  $P_1$ -Funktionen erzielt werden. Für höhere Exzentrizitäten übersteigt er allerdings die Fehler der  $P_1$ -Lösung im feinen Gitter, da sich dort der Geometriefehler des groben Modells stärker bemerkbar macht. Betrachten wir die Rechenzeiten in Tabelle (4.3), so wird bestätigt, dass diese Fehleranalyse auch bei konstanter Rechenzeit gilt. Sie ist sogar mit 63.7 s gegenüber 65.9 s etwas geringer, was aber auch an den etwas weniger Freiheitsgraden liegen mag.

Um den Effekt der Parallelisierung beurteilen zu können, wurde zusätzlich ein Performance-Studie durchgeführt. Für Gebietszerlegungen mit  $2^0, ..., 2^5$  Teilgebieten und entsprechend vielen Threads bei der Simulation, wurden die Rechenzeiten für jeweils zwölf Dipole bestimmt. Mithilfe der sequenziellen Rechenzeiten wurde dann der Speedup berechnet. Er ist für die Teilaufgaben Assemblierung des Residuums und Lösen des linearen Gleichungssystems in Abbildung (4.8) aufgetragen. Man erkennt an den Graphen, dass der Speedup für die Assemblierung des Residuums bis zu einer Anzahl von 16 Threads in allen Fällen sehr nahe am Optimum liegt. Dies liegt daran, dass diese Aufgabe für jedes Element unabhängig ausgeführt werden kann und keiner Kommunikation zwischen den einzelnen Prozessen bedarf. Das Abknicken des Speedups für 32 Threads ist dadurch zu erklären, dass für die Berechnung tatsächlich nur zehn physikalische Kerne zur Verfügung standen. Womöglich wird der beste Speedup auf der genutzten Plattform mit 20 Threads erzielt. Der Speedup für das Lösen des linearen Gleichungssystems fällt insgesamt deutlich geringer aus. Er liegt für  $P_1$ -Funktionen und 16 Threads bei 6-7 und für  $P_2$ -Funktionen etwa bei 5. Im Gegensatz zur Assemblierung des Residuums, müssen beim Lösen der Gleichungen an den Prozessorgrenzen Informationen über die Funktionswerte an den DoFs ausgetauscht werden, was den geringeren Speedup erklärt. Bei  $P_2$ -Funktionen gibt es aufgrund der höheren Anzahl an DoFs mehr Kommunikation, was sich in einem noch geringeren Speedup äußert. Eine Möglichkeit den Effekt der Parallelisierung in Bezug auf das Lösen des Gleichungssystems zu erhöhen, wäre auf einen anderen Löser umzusteigen. Mit einem AMG-Löser (Algebraic Multi Grid) könnte die Performance möglicherweise weiter gesteigert werden.



Abbildung 4.3: RDM für radiale Dipole, dargestellt durch Boxplots. Jede Box repräsentiert 25 Dipole. Die Boxen wurden zur besseren Darstellung seitlich verschoben. Die senkrechten Linien des Gitters geben die tatsächliche Exzentrizität der Dipole wieder. Die Kurven zeigen zusätzlich das arithmetische Mittel des RDM.



Abbildung 4.4: MAG(%) für radiale Dipole, dargestellt durch Boxplots. Jede Box repräsentiert 25 Dipole. Die Boxen wurden zur besseren Darstellung seitlich verschoben. Die senkrechten Linien des Gitters geben die tatsächliche Exzentrizität der Dipole wieder. Die Kurven zeigen zusätzlich das arithmetische Mittel des MAG(\%).



Abbildung 4.5: RDM für tangentiale Dipole, dargestellt durch Boxplots. Jede Box repräsentiert 25 Dipole. Die Boxen wurden zur besseren Darstellung seitlich verschoben. Die senkrechten Linien des Gitters geben die tatsächliche Exzentrizität der Dipole wieder. Die Kurven zeigen zusätzlich das arithmetische Mittel des RDM.



Abbildung 4.6: MAG(%) für tangentiale Dipole, dargestellt durch Boxplots. Jede Box repräsentiert 25 Dipole. Die Boxen wurden zur besseren Darstellung seitlich verschoben. Die senkrechten Linien des Gitters geben die tatsächliche Exzentrizität der Dipole wieder. Die Kurven zeigen zusätzlich das arithmetische Mittel des MAG(\%).



Abbildung 4.7: Vergleich des RDM für radiale Dipole im groben und feinen Gitter. Jede Box repräsentiert 25 Dipole. Die Boxen wurden zur besseren Darstellung seitlich verschoben. Die senkrechten Linien des Gitters geben die tatsächliche Exzentrizität der Dipole wieder. Die Kurven zeigen zusätzlich das arithmetische Mittel des RDM.

	tet 64 K $P_{\rm 1}$	tet 64 K $P_{\rm 2}$	tet 64 K $P_{\rm 3}$	tet 519 K $P_{\rm 1}$	tet 519 K $P_{\rm 2}$
Residuum Assemblieren	$2.84\mathrm{s}$	$10.39\mathrm{s}$	$73.10\mathrm{s}$	$25.52\mathrm{s}$	$86.69\mathrm{s}$
LGS Lösen	$1.23\mathrm{s}$	$51.42\mathrm{s}$	$523.79\mathrm{s}$	$27.28\mathrm{s}$	$1168.90\mathrm{s}$
Gesamtzeit für Dipol	$5.54\mathrm{s}$	$63.71\mathrm{s}$	$599.36\mathrm{s}$	$65.89\mathrm{s}$	$1273.10\mathrm{s}$

Tabelle 4.3: Sequenzielle Rechenzeiten



Abbildung 4.8: Speedup für die Vorwärtssimulationen mit  $P_1$ - und  $P_2$ -Ansatzfunktionen im groben und im feinen Rechengitter.

## 5 Der Deformationsansatz

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, entstehen aufgrund der unstetigen Leitfähigkeit beim numerischen Lösen des EEG-Vorwärtsproblems erhöhte Fehler für Dipole hoher Exzentrizitäten. So ist es schwierig für Dipole, welche in einem Element liegen, dass an einen Leitfähigkeitssprung grenzt, die numerischen Fehler zu kontrollieren. In diesem Abschnitt wird daher ein Deformationsansatz, der sich diesem Problem widmet, vorgestellt und an einem einfachen Testproblem validiert. Einen ähnlichen Transformationsansatz verwendete Oberkampf [19], um numerische Eigenschaften partieller Differentialgleichungen zu verbessern. Dabei ging er von deren klassischer Form aus und nutzte im wesentlichen die Kettenregel für seine Umformungen. Wir legen jedoch die schwachen Form zugrunde und verwenden zusätzlich den Transformationssatz zur Umformung. Für ein zweischichtiges Kugelmodell zeigen wir dann, dass durch eine spezielle Deformation des Volumenleiters die Leitfähigkeitssprünge in Normalenrichtung der Grenzflächen geglättet werden können. Das hat den Effekt, dass die Lösung des so entstandenen Ersatzproblemes verbesserte Regularitätseigenschaften aufweist, was die numerische Simulation positiv beeinflusst.

Da das Lösen des EEG-Vorwärtsproblems nur darin besteht, das elektrische Potential an den Elektroden auf der Kopfoberfläche zu berechnen, kann das Potential im Inneren des Volumenleiters beliebig abgeändert werden. Dies wollen wir ausnutzen, indem wir den Transformationssatz auf die schwache Formulierung (2.14) anwenden. Das soll allerdings für jeden Gewebebereich einzeln geschehen. Wir teilen daher das Integrationsvolumen gemäß  $\Omega = \bigcup_{j=1}^{l} \Omega_j$  in die verschiedenen Kopfgewebe auf und erreichen so, dass die Leitfähigkeit auf den einzelnen  $\Omega_j$  stetig ist. Für alle  $v \in H^1(\Omega)$  soll also gelten

(5.1) 
$$-\sum_{j=1}^{l} \int_{\Omega_{j}} \langle \boldsymbol{\sigma}(x) \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \mathrm{d}\Omega_{j}(x) = \sum_{j=1}^{l} \int_{\Omega_{j}} \boldsymbol{\sigma}_{\infty} \nabla u_{\infty}(x) \cdot \nabla v(x) \mathrm{d}\Omega_{j}(x) + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\infty} \nabla u_{\infty}(x) \cdot n(x) v(x) \mathrm{d}\partial\Omega(x)$$

Es folgen einige technische Definitionen und Folgerungen, die die Anwendung des Transformationssatzes vorbereiten und später notwendige Umformungen ermöglichen.

**Definition 5.1.** Sei  $\Psi$ :  $\Omega \to \Omega$ . Dann heißt  $\Psi$  bi-Lipschitz-stetig, falls es ein  $K \ge 1$  gibt,

so dass

(5.2) 
$$\frac{1}{K} \|x_1 - x_2\| \le \|\Psi(x_1) - \Psi(x_2)\| \le K \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega.$$

**Lemma 5.1.** Sei  $\Psi: \Omega \to \Omega$  bi-Lipschitz-stetig und surjektiv, dann gilt

- (i)  $\Psi$  ist bijektiv.
- (ii)  $\Psi^{-1}$  ist Lipschitz-stetig.
- (iii) Die partiellen Ableitungen von  $\Psi$  und  $\Psi^{-1}$  sind beschränkt.

Beweis. (i) Angenommen es gibt  $x_1, x_2 \in \Omega$  mit  $x_1 \neq x_2$  und  $\Psi(x_1) = \Psi(x_2)$ , dann folgt mit der bi-Lipschitz-Stetigkeit von  $\Psi$ 

$$0 < \frac{1}{K} \|x_1 - x_2\| \le \|\Psi(x_1) - \Psi(x_2)\| = 0.$$

Das ist ein Widerspruch, also muss  $\Psi$  injektiv sein und zusammen mit der Surjektivität folgt die Behauptung.

(*ii*) Sei  $x_1 = \Psi^{-1}(y_1)$  und  $x_2 = \Psi^{-1}(y_2)$ , dann folgt mit (5.2)

$$\frac{1}{K} \|\Psi^{-1}(y_1) - \Psi^{-1}(y_2)\| \le \|y_1 - y_2\| \le K \|\Psi^{-1}(y_1) - \Psi^{-1}(y_2)\|$$

Multiplikation der linken Ungleichung mit K und Division der rechten Ungleichung durch K liefert dann die Aussage.

(iii)Für alle $x\in \varOmega$  gilt

$$\left| \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(x) \right| = \lim_{t \to 0} \frac{|\Psi_i(x + te_j) - \Psi_i(x)|}{t}$$
$$\leq \lim_{t \to 0} \frac{\|\Psi(x + te_j) - \Psi(x)\|}{\|x + te_j - x\|}$$
$$\leq K.$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit von  $\Psi$ . Analog zeigt man die Abschätzung für  $\Psi^{-1}$ .

**Definition 5.2.** Set  $\Psi \colon \Omega \to \Omega$ , dann heißt  $\Psi$  innere Deformation, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\Psi$  ist bi-Lipschitz-stetig.
- (ii)  $\Psi$  ist surjectiv.
- (iii)  $\Psi$  ist auf den Mengen  $\Omega_j^* := \Psi^{-1}(\mathring{\Omega}_j)$  jeweils diffeomorph.
- (iv) Der Rand des Gebietes ist unter  $\Psi$  invariant, d.h.  $\Psi_{|\partial\Omega} = \mathrm{id}_{\partial\Omega}$ .

**Satz 5.1** (Transformationssatz). Set  $V \subset \mathbb{R}^3$  offen und  $\Psi: V \to U$  ein Diffeomorphismus, dann ist  $g: U \to \mathbb{R}$  genau dann integrierbar auf U, wenn  $g \circ \Psi |\det D\Psi|$  auf V integrierbar ist. In dem Fall gilt

$$\int_{U} g(x) dU(x) = \int_{V} g(\Psi(y)) |\det \mathcal{D}\Psi(y)| dV(y).$$

Beweis. Siehe [15]

Mit diesen Hilfsmitteln kann jetzt transformiert werden. Sei  $\Psi$  also eine innere Deformation, dann können wir wegen der stückweisen Diffeomorphie von  $\Psi$  den Transformationssatz auf jeder Teilmenge  $\Omega_j$ , j = 1, ..., l und für alle  $v \in H^1(\Omega)$  anwenden:

(5.3) 
$$-\sum_{j=1}^{l} \int_{\Omega_{j}^{*}} \underbrace{\langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Psi}(y)) \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\Psi}(y)), \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\Psi}(y)) \rangle}_{=:S(y)} |\det \mathbf{D}\boldsymbol{\Psi}(y)| d\Omega_{j}^{*}(y)$$
$$=\sum_{j=1}^{l} \int_{\Omega_{j}^{*}} \underbrace{\langle \boldsymbol{\sigma}_{\infty}(\boldsymbol{\Psi}(y)) \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u}_{\infty}(\boldsymbol{\Psi}(y)), \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\Psi}(y)) \rangle}_{=:T(y)} |\det \mathbf{D}\boldsymbol{\Psi}(y)| d\Omega_{j}^{*}(y)$$
$$+ \int_{\partial\Omega} \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{\infty} \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u}_{\infty}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})}_{=:U(x)} d\partial\Omega(\boldsymbol{x})$$

Da in den Termen S(y) und T(y) noch Ableitungen nach der Variablen x vorkommen, definieren wir die Funktionen  $u^* := u \circ \Psi$ ,  $u^*_{\infty} := u_{\infty} \circ \Psi$  und  $v^* := v \circ \Psi$  und formen um:

$$S(y) = \langle \boldsymbol{\sigma}(\Psi(y)) \nabla_x u(\Psi(y)), \nabla_x v(\Psi(y)) \rangle$$
  
=  $\langle \boldsymbol{\sigma}(\Psi(y)) \overbrace{(\mathbf{D}\Psi(y))^{-t}(\mathbf{D}\Psi(y))^{t}}^{=\mathbf{I}} \nabla_x u(\Psi(y)), \overbrace{(\mathbf{D}\Psi(y))^{-t}(\mathbf{D}\Psi(y))^{t}}^{=\mathbf{I}} \nabla_x v(\Psi(y)) \rangle$ 

(mit Kettenregel)

$$= \langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Psi}(y)) (\mathrm{D}\boldsymbol{\Psi}(y))^{-\mathrm{t}} \nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{u}^*(y), (\mathrm{D}\boldsymbol{\Psi}(y))^{-\mathrm{t}} \nabla_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{v}^*(y) \rangle$$

(mit adjungierter Matrix)

$$= \langle (\mathrm{D}\Psi(y))^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\Psi(y)) (\mathrm{D}\Psi(y))^{-\mathrm{t}} \nabla_y u^*(y), \nabla_y v^*(y) \rangle$$

Mit einer analogen Umformungen folgt für  ${\cal T}$ 

(5.4) 
$$T(y) = \langle (\mathrm{D}\Psi(y))^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{\infty} (\mathrm{D}\Psi(y))^{-\mathrm{t}} \nabla_{y} u_{\infty}^{*}(y), \nabla_{y} v^{*}(y) \rangle.$$

Da die Deformation auf dem Rand des Gebietes die Identität ist, kann U(x) wie folgt geschrieben werden.

$$U(x) = \langle \boldsymbol{\sigma}_{\infty} \nabla_{x} u_{\infty}(x), n(x)v(x) \rangle$$
  
=  $\langle \boldsymbol{\sigma}_{\infty} \nabla_{x} u_{\infty}(y), n(y)v(y) \rangle$   
=  $\langle \boldsymbol{\sigma}_{\infty} \underbrace{(\mathbf{D}\Psi(y))^{-t}(\mathbf{D}\Psi(y))^{t}}_{\mathbf{T}} \nabla_{x} u_{\infty}(y), n(y)v(y) \rangle$   
=  $\langle \boldsymbol{\sigma}_{\infty}(\mathbf{D}\Psi(y))^{-t} \nabla_{y} u_{\infty}(y), n(y)v(y) \rangle$ 

Durch Einführung von

(5.5) 
$$\boldsymbol{\sigma}^{*}(y) := (\mathrm{D}\Psi(y))^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\Psi(y))(\mathrm{D}\Psi(y))^{-t}|\det\mathrm{D}\Psi(y)|$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{*}_{\infty}(y) := (\mathrm{D}\Psi(y))^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{\infty}(\Psi(y))(\mathrm{D}\Psi(y))^{-t}|\det\mathrm{D}\Psi(y)|,$$

kann Gleichung (5.1) bezüglich der deformierten Koordinaten und den zugehörigen transformierten Leitfähigkeiten ausgedrückt werden. Bis auf den Raum der Testfunktionen ist damit Gleichung (5.1) bezüglich  $\Psi$  transformiert und durch die neue Variable y ausgedrückt:

(5.6)  

$$-\sum_{j=1}^{l} \int_{\Omega_{j}^{*}} \langle \boldsymbol{\sigma}^{*}(y) \nabla u^{*}(y), \nabla v^{*}(y) \rangle d\Omega_{j}^{*}(y)$$

$$=\sum_{j=1}^{l} \int_{\Omega_{j}^{*}} \boldsymbol{\sigma}_{\infty}^{*} \nabla u_{\infty}^{*}(y) \cdot \nabla v^{*}(y) d\Omega_{j}^{*}(y)$$

$$+\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\infty} (\mathrm{D}\Psi(y))^{-\mathrm{t}} \nabla u_{\infty}^{*}(y) \cdot n(y) v^{*}(y) d\partial\Omega(y).$$

Diese Gleichung soll aber noch für alle alten Testfunktionen  $v \in H^1(\Omega)$  gelten. Um als neue Testfunktionen alle  $v^* \in H^1(\Omega)$  verwenden zu können, benötigen wir den folgenden Satz.

**Satz 5.2.** Sei  $\Psi$  innere Deformation und  $v \in H^1(\Omega)$ . Dann gilt

- (i)  $v \circ \Psi \in H^1(\Omega)$
- (ii) Die Abbildung  $F_{\Psi} \colon H^1(\Omega) \to H^1(\Omega); \quad v \mapsto v \circ \Psi \text{ ist surjektiv.}$

Vergleiche dazu [1] und [18].

Beweis. (i) Da  $C^{\infty}(\Omega) \cap H^{1}(\Omega)$  dicht in  $H^{1}(\Omega)$  ist, lässt sich v durch eine Folge glatter Funktionen  $\{v_k\}$  approximieren, d.h.  $\lim_{k\to\infty} \|v - v_k\|_{H^{1}(\Omega)} = 0$ . Auf den offenen Mengen  $\Omega_j, \ j = 1, \ldots, L$  ist  $\Psi$  stetig differenzierbar, so dass die Verknüpfung  $v_k^* := v_k \circ \Psi$  dort ebenfalls stetig differenzierbar ist. Damit gilt für den Gradienten

(5.7) 
$$\nabla_y v_k^*(y) = (\mathbf{D}\Psi(y))^{\mathsf{t}} \nabla v_k(\Psi(y)) \quad \text{in } \Omega_j^*, \ j = 1, \dots, L$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^l \int_{\Omega_j^*} \nabla_y v_k^*(y) \phi(y) \mathrm{d}\Omega_j^*(y) = \sum_{j=1}^l \int_{\Omega_j^*} (\mathbf{D}\Psi(y))^{\mathsf{t}} \nabla v_k(\Psi(y)) \phi(y) \mathrm{d}\Omega_j^*(y) \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Da  $\Psi$  fast überall in  $\Omega$  differenzierbar ist, lassen sich die Integrale zusamenfassen und es folgt weiter mit patieller Integration

(5.8) 
$$\Leftrightarrow -\int_{\Omega} v_k^*(y) \nabla_y \phi(y) d\Omega(y) = \int_{\Omega} (\mathbf{D}\Psi(y))^{\mathsf{t}} \nabla v_k(\Psi(y)) \phi(y) d\Omega(y) \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

Als nächstes teilen wir die Integrale wieder auf und transformieren mit  $\Psi^{-1}$ .

(5.9) 
$$\Leftrightarrow -\sum_{j=1}^{l} \int_{\Omega_{j}} v_{k}(x) \nabla_{y} \phi(\Psi^{-1}(x)) |\det \mathcal{D}\Psi^{-1}(x)| d\Omega_{j}(x)$$
$$= \sum_{j=1}^{l} \int_{\Omega_{j}} (\mathcal{D}\Psi(\Psi^{-1}(x)))^{t} \nabla v_{k}(x) \phi(\Psi^{-1}(x)) |\det \mathcal{D}\Psi^{-1}(x)| d\Omega_{j}(x) \quad \forall \phi \in C_{c}^{\infty}(\Omega)$$

Nach Konstruktion der Folge  $\{v_k\}$  konvergiert  $\nabla v_k$  gegen die schwache Ableitung  $\nabla v$ , d.h.  $\lim_{k\to\infty} \|\nabla v - \nabla v_k\|_{L^2(\Omega)} = 0$ . Insbesondere konvergiert dann  $\nabla v_k$  im schwachen Sinn, so dass für den Grenzwert  $k \to \infty$  die glatte Funktion  $v_k$  in Gleichung (5.9) durch die Sobolev-Funktion v ersetzt werden kann. So gelangt man dann rückwärts wieder zu Gleichung (5.8). Das heißt  $v^* = v \circ \Psi$  ist schwach differenzierbar und die schwache Ableitung in  $\Omega$ ist durch (5.7) gegeben, falls man  $v_k$  durch v ersetzt. Zu zeigen ist noch  $\|\nabla v^*\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ .

$$\begin{split} \|\nabla v^*\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \|\nabla_y v^*(y)\|^2 \mathrm{d}\Omega(y) \\ &= \int_{\Omega} \|(\mathrm{D}\Psi(y))^{\mathrm{t}} \nabla v(\Psi(y))\|^2 \mathrm{d}\Omega(y) \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{\|(\mathrm{D}\Psi(y))^{\mathrm{t}}\|^2}{<\infty} \|\nabla v(\Psi(y))\|^2 \mathrm{d}\Omega(y) \\ &\leq C \int_{\Omega} \|\nabla v(\Psi(y))\|^2 \mathrm{d}\Omega(y) \\ &= C \sum_{j=1}^l \int_{\Omega_j} \|\nabla v(x)\|^2 \underbrace{|\det \mathrm{D}\Psi^{-1}(x)|}_{<\infty} \mathrm{d}\Omega_j(x) \\ &\leq C' \int_{\Omega} \|\nabla v(x)\|^2 \mathrm{d}\Omega(x) \\ &= C' \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &< \infty \end{split}$$

Die beiden Abschätzungen für  $||D\Psi||$  und det  $D\Psi^{-1}$  folgen aus Lemma 5.1 (*iii*). (*ii*) Sei  $v^* \in H^1(\Omega)$ . Dann ist  $v := v^* \circ \Psi^{-1}$  Urbild von  $v^*$ , denn es gilt

$$F_{\Psi}(v) = (v^* \circ \Psi^{-1}) \circ \Psi = v^* \circ (\Psi^{-1} \circ \Psi) = v^*.$$

Obiger Satz erlaubt die äquivalente Darstellung von Gleichung (5.6) bezüglich der transformierten Testfunktionen  $v \circ \Psi \in H^1(\Omega)$ .

**Satz 5.3** (Hauptresultat). Sei  $\Psi$  innere Deformation auf  $\Omega$ . Dann gilt

- (i) Gleichung (2.14) geht unter Transformation von  $\Psi$  für alle  $v^* = v \circ \Psi \in H^1(\Omega)$  in Gleichung (5.6) über.
- (ii) Die transformierte Gleichung ist, wie die Ausgangsgleichung, ebenfalls elliptisch, d.h. der neue Leitfähigkeitstensor  $\sigma^*$  ist symmetrisch positiv definit.
- (iii) Das elektrische Potential wird an den Elektroden  $y_i \in \partial\Omega$ , i = 1, ..., m durch die Transformation nicht verändert.

Beweis. (i) Wurde oben schon gezeigt.

(*ii*) Die transformierte Leitfähigkeit ist definiert durch

$$\boldsymbol{\sigma}^*(y) := (\mathrm{D}\Psi(y))^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\Psi(y)) (\mathrm{D}\Psi(y))^{-\mathrm{t}} |\det \mathrm{D}\Psi(y)|.$$

Abkürzend schreiben wir dafür  $\sigma^* = c A \sigma A^{t}$  und zeigen die Symmetrie

$$\sigma^* - \sigma^{*t} = cA\sigma A^t - (cA\sigma A^t)^t$$
$$= cA\sigma A^t - cA\sigma^t A^t$$
$$= cA\sigma A^t - cA\sigma A^t$$
$$= 0.$$

Sei  $x \in \mathbb{R}^3$  und  $x \neq 0$ , dann folgt die positive Definitheit mit der Rechnung

(iii) Da $y_i\in\partial \varOmega,$  gilt nach Definition 5.2

$$u^*(y_i) = u(\Psi(y_i)) = u(y_i).$$

## 6 Validierung des Deformationsansatzes

In diesem Kapitel soll der oben vorgestellte Deformationsansatz anhand einer numerischen Studie im Kugelmodell validiert werden. Aufgrund der Kugelsymmetrie konstruieren wir zunächst eine allgemeine radiale Deformation. Anschließend wird diese dann auf ein 2-Schalen-Modell angepasst, das zugehörige Vorwärtsproblem mit der DUNE Implementierung gelöst und die numerischen Fehler analysiert.

#### 6.1 Radiale Deformation

In diesem Abschnitt berechnen wir für eine allgemeine radiale Deformation im Kugelmodell den neuen Leitfähigkeitstensor. Der Vorteil am Kugelmodell ist, dass hier aufgrund der sphärischen Symmetrie eine geeignete innere Deformation auf analytischem Wege bestimmt werden kann. Außerdem ist für die Kugel eine exakte Lösung des Vorwärtsproblems bekannt, so dass der numerische Fehler des Deformationsansatzes analysiert werden kann.

Im folgenden werden wir die neue elektrische Leitfähigkeit für eine allgemeine radiale Deformation berechnen. Aufgrund der sphärischen Symmetrie verwenden wir dabei Kugelkoordinaten. Sei also

(6.1) 
$$\Gamma \colon [0, r_l] \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$(r, \vartheta, \varphi) \mapsto r \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix},$$

die Abbildung von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten. Dann können wir eine Deformation durch die Komposition  $\Psi = \Gamma \circ \Sigma \circ \Gamma^{-1}$  darstellen, mit

$$\Sigma \colon [0, r_4] \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi] \to [0, R] \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$$
$$(r^*, \vartheta, \varphi) \mapsto (f(r^*), \vartheta, \varphi)$$

Dabei beschreibt die Funktion

$$f(r^*) = \begin{cases} f_1(r^*) & \text{für } 0 \le r^* \le r_1^* \\ \vdots & \\ f_l(r^*) & \text{für } r_{l-1}^* < r^* \le r_l^* \end{cases}$$

die Deformation in radialer Richtung. Die Variable  $r^*$  stellt den Radius im deformierten Modell dar und  $r = f(r^*)$  denjenigen im undeformierten Modell.  $r_1^*, ..., r_l^*$  sind die Radien der Gewebegrenzflächen bzw. der der Oberfläche des Modells. Um bei möglichen Simulationen den Subtraktionsansatz verwenden zu können, legen wir fest, dass im innersten Bereich, d.h.  $0 \le r^* \le r_1^*$ , in dem die Dipole liegen, keine Verformung stattfindet. Eine Verformung in diesem Teil würde Anisotropien in der Leitfähigkeit hervorrufen, welche bei Kugelsymmetrie Inhomogenität bedeuten würden, so dass Definition 2.1 der homogener Leitfähigkeit in einer Umgebung des Stromdipols nicht erfüllt wäre. Somit muss  $f_1(r^*) = r^*$  gelten. Außerdem darf eine innere Deformation den äußeren Rand des Gebietes nicht verändern, so dass wir  $f(r_l^*) = r_l = r_l^*$  setzen müssen. Offenbar ist dann  $\Psi = \Gamma \circ \Sigma \circ \Gamma^{-1}$  eine innere Deformation, falls f bi-Lipschitz-stetig und auf den Teilintervallen  $[r_i^*, r_{i+1}^*]$  differenzierbar ist. Um die transformierte Leitfähigkeit  $\sigma^*(y)$  zu bestimmen, berechnen wir die Jacobi-Matrix der Deformationsabbildung mithilfe der Kettenregel

$$\mathrm{D}\Psi(y) = \mathrm{D}\Gamma(\varSigma(\Gamma^{-1}(y)))\mathrm{D}\varSigma(\Gamma^{-1}(y))\mathrm{D}\Gamma^{-1}(y).$$

Nach (6.1) gilt dann für die Differentiale der Abbildungen  $\Gamma$  und  $\Gamma^{-1}$ 

$$\mathrm{D}\Gamma(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{D}(\Gamma^{-1})(r^*,\vartheta,\varphi) = (\mathrm{D}\Gamma)^{-1}(r^*,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\\ \frac{1}{r^*}\cos\vartheta\cos\varphi & \frac{1}{r^*}\cos\vartheta\sin\varphi & -\frac{1}{r^*}\sin\vartheta\\ -\frac{1}{r^*}\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} & \frac{1}{r^*}\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Abgesehen von den Punkten  $r_1^*, \ldots, r_4^*$ , an denen f nicht differenzierbar ist, lautet das Differential von  $\Sigma$ 

$$D\Sigma(r^*, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} f'(r^*) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auch weiterhin seien die Ableitungen von f stets auf den offenen Mengen  $(r_i^*, r_{i+1})$  zu

verstehen. Wir berechnen die neue Leitfähigkeit für die festen Winkel  $(\vartheta_0, \varphi_0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ . Das Leitfähigkeitsprofil in radialer Richtung kann dann aufgrund der Kugelsymmetrie auf alle  $\vartheta, \varphi$  übertragen werden. Die Differentiale vereinfachen sich daher zu

$$D\Gamma(r,\vartheta_0,\varphi_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & r\\ 0 & -r & 0 \end{pmatrix}$$
$$D(\Gamma^{-1})(r^*,\vartheta_0,\varphi_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^*}\\ 0 & \frac{1}{r^*} & 0 \end{pmatrix}.$$

Als Gesamtdifferential ergibt sich dann

$$D\Psi(r^*, \vartheta_0, \varphi_0) = \begin{pmatrix} f'(r^*) & 0 & 0\\ 0 & \frac{r}{r^*} & 0\\ 0 & 0 & \frac{r}{r^*} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} f'(r^*) & 0 & 0\\ 0 & \frac{f(r^*)}{r^*} & 0\\ 0 & 0 & \frac{f(r^*)}{r^*} \end{pmatrix}$$

Für den neuen Leitfähigkeitstensor gilt dann nach (5.5) mit der alten radialen und tangentialen Leitfähigkeit  $\sigma_{\rm rad}$  und  $\sigma_{\rm tan}$ 

$$\boldsymbol{\sigma}^{*}(r^{*},\vartheta_{0},\varphi_{0}) = \begin{pmatrix} \sigma_{\mathrm{rad}}(r)f'^{-2}(r^{*}) & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sigma_{\mathrm{tan}}(r)r^{*2}}{f^{2}(r^{*})} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{\mathrm{tan}}(r)r^{*2}}{f^{2}(r^{*})} \end{pmatrix} \underbrace{\left| \frac{f'(r^{*})\frac{f^{2}(r^{*})}{r^{*2}} \right|}_{=|\det D\Psi|},$$

so dass die neuen Leitfähigkeiten in radialer und tangentialer Richtung schließlich gegeben sind durch die Ausdrücke

(6.2) 
$$\sigma_{\rm rad}^*(r^*) = \sigma_{\rm rad}(f(r^*)) \frac{f^2(r^*)}{r^{*2} f'(r^*)}$$
$$\sigma_{\rm tan}^*(r^*) = \sigma_{\rm tan}(f(r^*)) f'(r^*).$$

Es stellt sich die Frage welchen Ansatz wir für die Funktionen  $f_i$  machen. Dazu betrachten wir Gleichung (6.2) und stellen fest, dass die Änderung der radialen Leitfähigkeit unter der Transformation im wesentlichen durch die Ableitung f' bestimmt wird. Eine Stauchung des Materials, d.h. f' > 1, senkt dabei die Leitfähigkeit und eine Streckung, d.h. f' < 1, erhöht diese. Geeignet scheint für die Funktionen  $f_i$  ein quadratischer Ansatz. Mit diesem lässt sich tatsächlich eine geeignete innere Deformation konstruieren. Die jeweils drei Koeffizienten der Ansatzfunktionen werden dabei aus den folgenden Gleichungen für  $i = 1, \ldots, l$  bestimmt.

$$\begin{cases} f_{i+1}(r_i^*) &= r_i \\ f_{i+1}(r_{i+1}^*) &= r_{i+1} \end{cases}$$
Stetigkeit von  $f$   
$$\lim_{r^* \searrow r_i^*} \sigma_{rad}^*(r^*) &= \lim_{r^* \nearrow r_i^*} \sigma_{rad}^*(r^*)$$
Stetigkeit von  $\sigma_{rad}^*$ 

Dazu müssen zunächst die neuen Radien  $r_i^*$  der Grenzflächen vorgegeben und dann nacheinander  $f_1$  bis  $f_l$  bestimmt werden. Die neue radiale Leitfähigkeit ist damit aufgrund der letzten Gleichung stetig.

#### 6.2 Volumenleiter

Um die Effekte der Deformation kontrolliert untersuchen zu können, wählen wir ein möglichst einfaches Testproblem. Wir verwenden daher ein zweischichtiges isotropes Kugelmodell und testen mit einem Verhältnis der beiden Leitfähigkeiten von 1:10 und 1:100. Die Parameter des Modells sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

	Radius $r_i$ [mm]	Leitfähigkeit $\pmb{\sigma}_i \; [\text{S/m}]$
Innen	78	1.0
Außen	92	0.1 / 0.01

Tabelle 6.1: Parametrisierung des 2-Schalen-Kugelmodells

Durch diese Parameter werden die beiden radialen Teildeformationen  $f_1$  und  $f_2$  festgelegt. Wie oben definiert, ist  $f_1$  die Identität,  $f_2$  ergibt sich aus den Radien und dem Verhältnis der Leitfähigkeiten. Ein Verlauf der radialen Deformationen für die Leitfähigkeitsverhältnisse 1:10 und 1:100, d.h.  $\sigma_2 = 0.1$  S/m bzw.  $\sigma_2 = 0.01$  S/m ist in Abbildung 6.1 dargestellt.



Abbildung 6.1: Links: Deformation des Modells mit Leitfähigkeitsverhältnis 1:10. Rechts: Deformation des Modells mit Leitfähigkeitsverhältnis 1:100.

Die Deformation bewirkt eine Änderung der Leitfähigkeit im Modell. Für die beiden Deformationen aus Abbildung 6.1 sind die zugehörigen alten und neuen Leitfähigkeiten in den beiden folgenden Abbildungen 6.2 und 6.3 dargestellt.



Abbildung 6.2: Oben: Isotrope Leitfähigkeit des undeformierten zweischichtigen Modells mit Leitfähigkeitsverhältnis 1:10. Mitte: Radiale Leitfähigkeit des deformierten Modells. Unten: Tangentiale Leitfähigkeit des deformierten Modells



Abbildung 6.3: Oben: Isotrope Leitfähigkeit des undeformierten zweischichtigen Modells mit Leitfähigkeitsverhältnis 1:100. Mitte: Radiale Leitfähigkeit des deformierten Modells. Unten: Tangentiale Leitfähigkeit des deformierten Modells

Das Rechennetz für die Validierung des Deformationsansatzes wurde, wie bei der Validierung der  $P_k$ -Ansätze mit TetGen [24] erzeugt. Um die Deformation gut auflösen zu können, wurde der äußere Bereich mit einer gleichmäßigen Gitterweite vernetzt. Eine Schnittansicht des Netzes zeigt Abbildung 6.4.



Abbildung 6.4: Links: Schnitt durch das Rechennetz (tet<br/>103K) für den Deformationsansatz. Rechts: Detailansicht.

Einige Daten dieses Netzes listet die folgende Tabelle auf.

Rechennetz	#Knoten	#Elemente	#DoF $P_1$	#DoF $P_2$
tet103K	103.129	617.812	103.129	836.491

Tabelle 6.2: Daten des Rechennetzes (tet<br/>103K) für die Validierung des Deformationsansatzes

#### 6.3 Dipole

Die Simulationen wurden für 375 radiale Dipole mit 15 verschiedenen Exzentrizitäten durchgeführt. Es handelt sich dabei um die gleichen Dipole wie bei der Validierung der  $P_k$ -Ansätze in Kapitel 4.

#### 6.4 Ergebnisse

Um die Auswirkungen der Deformation zu verdeutlichen, zeigen wir zunächst in der Abbildung 6.5 auf der folgenden Seite die Isolinien des elektrischen Potentials in einer Schnittdarstellung des Modells für die  $P_2$ -Lösung eines radialen Dipols der Exzentrizität 0.96. In den Abbildungen ist deutlich zu erkennen, dass die Knicke in den Isolinien, welche beim elektrischen Potential des Standardmodells deutlich ausgeprägt sind, im deformierten Modell verschwinden. Man erkennt daran schon den regularisierenden Effekt den die Deformation auf die Lösung des Vorwärtsproblems hat. Im folgenden werden wir die numerischen Fehler in dieser Hinsicht genauer untersuchen.

Abbildung 6.6 bis 6.9 auf den folgenden Seiten zeigen RDM und MAG(%) des deformierten und undeformierten Modells jeweils für  $P_1$ -/ $P_2$ -Ansätze und für die Modelle mit Leitfähigkeitsverhältnis 1:10 und 1:100. In allen Fällen ist zu erkennen, dass sich die Fehler des Standardmodells und die des deformierten Modells ähnlich verhalten, solange die Dipole nicht im äußersten Element vor dem Leitfähigkeitssprung liegen. In den Grafiken ist dies der linke Bereich bis etwa zur Exzentrizität 0.965. Die Fehler des Standardmodells sind dort zwar etwas kleiner, die Änderungen der Fehler mit der Exzentrizität sind jedoch fast gleich. Schauen wir in den rechten Bereich, der das Element direkt vor dem Leitfähigkeitssprung repräsentiert, ändert sich das Verhalten der Fehler. Die Fehler des Standardmodells wachsen dort wesentlich stärker an als im linken Bereich, und zwar um so stärker, je größer der Sprung der Leitfähigkeiten ist. Wird im Modell mit Leitfähigkeitsverhältnis 1:10 der maximale RDM von 2 erst für die Exzentrizität 0.995 erreicht, so geschieht dies für das Modell mit Leitfähigkeitsverhältnis 1:100 schon bei der Exzentrizität 0.98. Das gilt sowohl für den  $P_1$ -, als auch für den  $P_2$ -Ansatz. Wie schon in Kapitel 4 gesehen, wird also für hohe Exzentrizitäten durch einen höheren Grad der Ansatzfunktion kaum ein Vorteil erzielt. Schauen wir nun auf die Fehler des deformierten Modells. Auch sie wachsen für hohe Exzentrizitäten bzw. im äußersten Element vor dem Leitfähigkeitssprung stärker an als für niedrige Exzentrizitäten. Dieser Anstieg fällt jedoch deutlich geringer aus als im Standardmodell. Der Unterschied zum Standardmodell wächst offenbar mit zunehmender Größe des Leitfähigkeitssprunges. Im Modell mit Leitfähigkeitsverhältnis 1:100 wird dies besonders deutlich. Während der RDM der  $P_2$ -Lösung dort für die größte Exzentrizität noch in der Größenordnung von 0.1 liegt, erreicht der RDM für einige Dipole im Standardmodell schon für die Exzentrizität 0.985 seinen maximalen Wert von 2. Diese Ergebnisse zeigen, dass sich eine Deformation regulariesierend auf die Lösung des Vorwärtsproblems auswirken kann. Die numerischen Fehler für Dipole hoher Exzentrizität können dadurch erheblich gesenkt werden. Besonders deutlich kommt dabei der Effekt höhergradiger Ansatzfunktionen zum tragen.



Abbildung 6.5: Schnitt durch das Modell in der Nähe eines radialen Dipols der Exzentrizität 0.96. Dargestellt sind  $P_2$ -Lösungen des elektrische Potentials mit einigen Isolinien. Links: Standardmodell. Rechts: Deformiertes Modell.



Abbildung 6.6: RDM und MAG für radiale Dipole, dargestellt durch Boxplots. Jede Box repräsentiert 25 Dipole. Die Boxen wurden zur besseren Darstellung seitlich verschoben. Die senkrechten Linien des Gitters geben die tatsächliche Exzentrizität der Dipole wieder. Die Kurven zeigen zusätzlich das arithmetische Mittel.



Abbildung 6.7: RDM und MAG für radiale Dipole, dargestellt durch Boxplots. Jede Box repräsentiert 25 Dipole. Die Boxen wurden zur besseren Darstellung seitlich verschoben. Die senkrechten Linien des Gitters geben die tatsächliche Exzentrizität der Dipole wieder. Die Kurven zeigen zusätzlich das arithmetische Mittel.



Abbildung 6.8: RDM und MAG für radiale Dipole, dargestellt durch Boxplots. Jede Box repräsentiert 25 Dipole. Die Boxen wurden zur besseren Darstellung seitlich verschoben. Die senkrechten Linien des Gitters geben die tatsächliche Exzentrizität der Dipole wieder. Die Kurven zeigen zusätzlich das arithmetische Mittel.



Abbildung 6.9: RDM und MAG für radiale Dipole, dargestellt durch Boxplots. Jede Box repräsentiert 25 Dipole. Die Boxen wurden zur besseren Darstellung seitlich verschoben. Die senkrechten Linien des Gitters geben die tatsächliche Exzentrizität der Dipole wieder. Die Kurven zeigen zusätzlich das arithmetische Mittel.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Einsatz höhergradiger  $P_k$ -Ansatzfunktionen zur Lösung des EEG-Vorwärtsproblems validiert. Verglichen wurden dazu die numerischen Fehler RDM und MAG für  $P_1$ -,  $P_2$ -, und  $P_3$ -Ansätze in einem vierschichtigen Kugelmodell. Es wurden zwei unterschiedlich feine Tetraedermodelle verwendet, um den Einfluss der Gitterweite in der Nähe des Leitfähigkeitssprunges zu untersuchen. Für Dipole welche nicht im letzten Element vor dem Leitfähigkeitssprung liegen, konnte für  $P_2$ -, und  $P_3$ -Ansätze eine gute Fehlerreduktion erreicht werden. Nimmt die Exzentrizität eines Dipols zu, so erhöhen sich die numerischen Fehler. Dieser Zuwachs ist, sobald der Dipol in einem Element direkt vor dem Leitfähigkeitssprung liegt stark erhöht. Je näher er innnerhalb diese Elementes an den Leitfähigkeitssprung heranrückt, desto geringer ist der Nutzen von höhergradigen Ansatzfunktionen. Eine mögliche Abhilfe könnte der Einsatz isoparametrischer Elemente sein, welche gekrümmte Flächen aufweisen können und so die Oberfläche des Modells und die Grenzflächen im Inneren besser approximieren. Der Geometriefehler würde damit gesenkt.

Untersucht wurde zusätzlich der Nutzen höhergradiger Ansatzfunktionen bei fester Rechenzeit. Es zeigte sich, dass  $P_2$ -Ansätze im groben Modell für Dipole niedriger Exzentrizität gegenüber  $P_1$ -Ansätzen im feinen Modell im Vorteil sind. Dies gilt nicht für Dipole hoher Exzentrizität.

Weiterhin wurde für die DUNE-Implementierung des EEG-Vorwärtsproblems eine Performance-Studie auf einem Parallelrechner durchgeführt und der Speedup für parallele Läufe des Programmes mit bis zu 32 Threads bestimmt. Für die Assemblierung des Residuums zeigte sich ein nahezu optimaler Speedup. Das Lösen des Gleichungssystems erzielte für  $P_1$ -Ansätze einen höheren Speedup als für  $P_2$ -Ansätze, was an dem erhöhten Informationsaustausch an den Prozessorgrenzen bei  $P_2$ -Ansätzen liegt. Für die Zukunft interessant wäre, ob durch Verwendung eines anderen Lösers die Performance gesteigert werden kann.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde ein Deformationsansatz für das Modell des EEG-Vorwärtsproblems vorgestellt. Er beruht auf dem Transformationssatz für Volumenintegrale. Bei der Transformation werden die Leitfähigkeiten im Modell verändert, was man sich zu Nutze machen kann, um deren Unstetigkeiten zu glätten.

Für ein zweischichtiges Kugelmodell wurde eine solche Deformation bestimmt und in einer Studie die numerischen Fehler analysiert. Es zeigte sich eine Reduktion der Fehler für Dipole hoher Exzentrizität. Eine Validierung dieses Ansatzes für ein komplizierteres Modell steht noch aus. Es stellt sich aber die Frage, ob eine geeignete Deformation dafür überhaupt gefunden werden kann. Für ein mehrschichtiges Kugelmodell mag dies noch relativ einfach sein. Spätestens bei einem realistischen Modell kann eine solche Deformation nicht mehr auf analytischem Wege bestimmt werden. Dort müsste über andere Möglichkeiten nachgedacht werden. Eine Differentialgleichung zu definieren, welche das Modell auf geeignete Weise verformt wäre ein Ansatz. Diese müsste dann zur Bestimmung der Deformation vor der eigentlichen Simulation gelöst werden. Besonders interessant wäre ein solcher Deformationsansatz in Verbindung mit isoparametrischen Elementen. Mit dem Geometriefehler und dem numerischen Fehler durch die unstetigen Leitfähigkeiten, würden auf diesem Wege die beiden größten Fehlerquellen beseitigt.

## Literatur

- [1] ADAMS, R., AND FOURNIER, J. Sobolev Spaces. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, Kidlington, 2003.
- [2] AMAZON WEB SERVICES. (AWS). Cloud Computing-Services, http://aws.amazon.com/de/, abgerufen am 28.07.2014.
- [3] BASTIAN, P., BLATT, M., DEDNER, A., ENGWER, C., FAHLKE, J., GRÄSER, C., KLÖFKORN, R., NOLTE, M., OHLBERGER, M., AND SANDER, O. DUNE Web page, 2011. http://www.dune-project.org, abgerufen am 28.07.2014.
- [4] BASTIAN, P., BLATT, M., DEDNER, A., ENGWER, C., KLÖFKORN, R., KORN-HUBER, R., OHLBERGER, M., AND SANDER, O. A generic grid interface for parallel and adaptive scientific computing. Part II: Implementation and tests in DUNE. *Computing* 82, 2–3 (2008), 121–138.
- [5] BASTIAN, P., BLATT, M., DEDNER, A., ENGWER, C., KLÖFKORN, R., OHL-BERGER, M., AND SANDER, O. A generic grid interface for parallel and adaptive scientific computing. Part I: Abstract framework. *Computing* 82, 2–3 (2008), 103–119.
- [6] BASTIAN, P., HEIMANN, F., AND MARNACH, S. Generic implementation of finite element methods in the distributed and unified numerics environment. *Kybernetika* 46, 2 (2010), 294–315.
- BERGER, H. Über das Elektrenkephalogramm des Menschen. Archiv für Psychiatrie und Nervenkrankheiten 87, 1 (1929), 527–570.
- [8] BLATT, M., AND BASTIAN, P. The iterative solver template library. In Applied Parallel Computing. State of the Art in Scientific Computing (2007), B. Kågström, E. Elmroth, J. Dongarra, and J. Waśniewski, Eds., vol. 4699 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, pp. 666–675.
- [9] BLATT, M., AND BASTIAN, P. On the generic parallelisation of iterative solvers for the finite element method. Int. J. Comput. Sci. Engrg. 4, 1 (2008), 56–69.
- [10] DE MUNCK, J., AND PETERS, M. J. A fast method to compute the potential in the multisphere model. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on 40*, 11 (1993), 1166 – 1174.

- [11] DRECHSLER, F., WOLTERS, C. H., DIERKES, T., SI, H., AND GRASE-DYCK, L. A highly accurate full subtraction approach for dipole modelling in EEG source analysis using the finite element method. *Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften 95* (2007). preprint, http://www.mis.mpg.de/de/publications/preprints/2007/prepr2007-95.html, abgerufen am 28.07.2014.
- [12] HÄMÄLÄINEN, M., HARI, T., ILMONIEMI, R. J., KNUUTILA, J., AND LOUNAS-MAA, O. V. Magnetoencephalography-theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. *Reviews of Modern Physics* 65, 2 (1993), 413–497.
- [13] JOHNSON, C. R. The Biomedical Engineering Handbook. CRC Press, Boca Raton, 1999, ch. Numerical Methods for Bioelectric Field Problems.
- [14] KARYPIS, G., AND KUMAR, V. Metis unstructured graph partitioning and sparse matrix ordering system, version 2.0. Tech. rep., 1995.
- [15] KÖNIGSBERGER, K. Analysis 2, 5 ed. Springer, Heidelberg, 2003.
- [16] MALMIVUO, J., AND PLONSEY, R. Bioelectromagnetism-Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Fields. Oxford University Press, New York, 1995.
- [17] MAXWELL, J. C. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London 155* (1865), 459–512.
- [18] NAUMANN, J. Sobolev-Räume. Vorlesungsskript, Humboldt-Universität Berlin, Sommersemester 2005.
- [19] OBERKAMPF, W. L. Domain mappings for the numerical solution of partial differential equations. International Journal for Numerical Methods in Engineering 10 (1976), 211–223.
- [20] OHLBERGER, M. Numerik Partieller Differentialgleichungen I. Vorlesungskript, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2008.
- [21] RICHERSON, S., INGRAM, M., PERRY, D., AND STECKER, M. M. Classification of the extracellular fields produced by activated neural structures. *BioMedical Engineering OnLine* 4, 1 (2005), 53.

- [22] SARVAS, J. Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem. *Physics in Medicine and Biology 32*, 1 (1987), 11–22.
- [23] SCHMIDT, R. Physiologie des Menschen mit Pathophysiologie, 31 ed. Springer-Lehrbuch. Springer, Heidelberg, 2010.
- [24] SI, H. TetGen: A quality tetrahedral mesh generator and three-dimensional delaunay triangulator, http://www.tetgen.org, abgerufen am 28.07.2014.
- [25] STARCLUSTER. Software tools for academics and researchers. Massachusetts Institute of Technology, http://star.mit.edu/cluster/, abgerufen am 28.07.2014.
- [26] UITERT, R. V., WEINSTEIN, D., JOHNSON, C., AND ZHUKOV, L. Finite element EEG and MEG simulations for realistic head models: Quadratic vs. linear approximations. 3rd International Symposium On Noninvasive Functional Source Imaging, Innsbruck, Austria, 2001.
- [27] VORWERK, J. Comparison of numerical approaches to the EEG forward problem. Master's thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2011.
- [28] WALDEYER, H. W. Ueber einige neuere Forschungen im Gebiete der Anatomie des Centralnervensystems. Deutsche medicinische Wochenschrift 17 (1891), 1213–1218, 1244–1246, 1287–1289, 1331–1332, 1350–1356.
- [29] WOLTERS, C. H., KÖSTLER, H., MÖLLER, C., HÄRDTLEIN, J., GRASEDYCK, L., AND HACKBUSCH, W. Numerical mathematics of the subtraction method for the modeling of a current dipole in EEG source reconstruction using finite element head models. SIAM Journal on Scientific Computing 30, 1 (2007), 24–45.

## ${\bf Abbildung sverzeichnis}$

2.1	Neuron und Pyramidenzellen	5
3.1	Gitter der Ordnungen 1,2,3 eines Tetraeders	15
4.1	Schnitt durch das Rechennetz (tet519K) mit Elektroden	17
4.2	Rechennetze in der Detailansicht	18
4.3	RDM für radiale Dipole, (tet64K) $P_1, P_2, P_3$ , (tet519K) $P_1, P_2$	24
4.4	MAG(%) für radiale Dipole, (tet64K) $P_1, P_2, P_3$ , (tet519K) $P_1, P_2$	25
4.5	RDM für tangentiale Dipole, (tet64K) $P_1, P_2, P_3$ , (tet519K) $P_1, P_2$	26
4.6	MAG(%) für tangentiale Dipole, (tet64K) $P_1, P_2, P_3$ , (tet519K) $P_1, P_2$	27
4.7	RDM für radiale Dipole, (tet64K) $P_2$ , (tet519K) $P_1$	28
4.8	Speedup	29
6.1	Deformation	42
6.2	Leitfähigkeiten 1:10 beim Deformationsansatz	43
6.3	Leitfähigkeiten 1:100 beim Deformationsansatz	44
6.4	Schnitt durch das Rechennetz (tet 103K) $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	45
6.5	Isolinien des Potentials, standard/deformiert	47
6.6	RDM/MAG für deformiertes Modell, $P_{\rm l}\mbox{-}{\rm Ansatz},$ Leitfähigkeiten 1:10 $~$	48
6.7	RDM/MAG für deformiertes Modell, $P_2\mbox{-}Ansatz,$ Leitfähigkeiten 1:10 $\ $	49
6.8	RDM/MAG für deformiertes Modell, $P_{\rm l}\text{-}{\rm Ansatz},$ Leitfähigkeiten 1:100	50
6.9	RDM/MAG für deformiertes Modell, $P_2$ -Ansatz, Leitfähigkeiten 1:100	51

## Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, *Florian Grüne*, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Gedanklich, inhaltlich oder wörtlich Übernommenes habe ich durch Angabe von Herkunft und Text oder Anmerkung belegt bzw. kenntlich gemacht. Dies gilt in gleicher Weise für Bilder, Tabellen, Zeichnungen und Skizzen, die nicht von mir selbst erstellt wurden.

Alle auf der CD beigefügten Programme sind von mir selbst programmiert oder durch Angabe von Herkunft kenntlich gemacht worden.

Braunschweig, 16. August 2014

Florian Grüne